উচ্চ মাধ্যমিক

সহজ গণিত

কে. পি. বসু
ডি. আর. ভট্টাচার্য

প্রকাশক :
শ্রীজয়ন্ত বসু,
৪২, বিধান সরণী,
কলিকাতা-৭০০ ০০৬

Paper used for printing of this book was made available by the Govt. of India at a concessional rate.

প্রথম সংস্করণ : নভেম্বর, ১৯৭৬
মূল্য : ২০.০০ টাকা

মুদ্রাকর :
শ্রীত্রিদিবেশ বসু,
কে. পি. বসু প্রিন্টিং ওয়ার্কস,
১১, মহেন্দ্র গোস্বামী লেন,
কলিকাতা-৭০০ ০০৬

নিবেদন

অধ্যাপক কে. পি. বসু-র পুরাতন 'উচ্চ মাধ্যমিক ঐচ্ছিক গণিত', *Intermediate Algebra* এবং কে. পি. বসু ও ডি. আর. ভট্টাচার্য প্রণীত *An Introduction to Advanced Mathematics* হইতে নির্বাচিত ও পরিমার্জিত অংশ লইয়া 'উচ্চ মাধ্যমিক সহজ গণিত'-এর প্রথম খণ্ডটি বিন্যস্ত হইল।

গত দশ বৎসর যাবৎ অধ্যাপক কে. পি. বসু প্রণীত গ্রন্থগুলির তত্ত্বাবধান, সংযোজন ও পরিমার্জনের ভার ছিল অধ্যক্ষ মনোরঞ্জন দাশগুপ্ত ও শ্রীযুক্ত ধীরেন্দ্ররঞ্জন ভট্টাচার্যের উপর। মাধ্যমিক স্তর হইতে উচ্চ-মাধ্যমিক স্তর পর্যন্ত অধ্যাপক কে. পি. বসু-র গ্রন্থগুলির যাবতীয় আধুনিকীকরণের কৃতিত্ব শ্রীযুক্ত ভট্টাচার্যের; বিশেষতঃ, এই গ্রন্থের দ্বিতীয় খণ্ডে সংযোজিত 'বলবিদ্যা'র অংশটুকু শ্রীযুক্ত ভট্টাচার্যের (1958—1960 সালে প্রকাশিত) বহু-প্রশংসিত 'বলবিদ্যা প্রবেশ' হইতেই সংকলিত; সেই কারণে এই গ্রন্থের সহযোগী গ্রন্থকার হিসাবে শ্রীযুক্ত ভট্টাচার্যের নাম সংযোজিত হইল।

গ্রন্থটিকে সর্বাঙ্গসুন্দর করিবার জন্য যথাসাধ্য চেষ্টা করা হইয়াছে। এই কাজে অধ্যাপক ও শিক্ষক যে-কয়েকজন বিশিষ্ট গণিতবিদ্ আমাদের সহায়তা করিয়াছেন, তাঁহাদের প্রতি আমরা গভীর কৃতজ্ঞতা প্রকাশ করিতেছি। ইতি—

৬ নভেম্বর, ১৯৭৬ প্রকাশক

SYLLABUS

PAPER I (Marks—100)

Algebra, Trigonometry and Analytical Geometry of Two Dimensions

Algebra :—30 marks :

Variation, Arithmetical Progression, Geometrical Progression, Surds, Laws of indices. Complex numbers. Theory of quadratic equation. Permutations and Combinations. Binomial theorem for positive integral index ; Idea of Infinite series—sum of infinite G. P. series. Use of Binomial theorem for fractional and negative indices. Logarithms—Compound interest and annuities. Use of logarithmic and exponential series.

Trigonometry :—30 marks :

Measure of an angle—Degrees, Radians. Trigonometrical ratios of compound angles. Multiple and submultiple angles, complementary and supplementary angles. Graphs of trigonometrical functions ; Graphical and general solutions of Trigonometrical equations. Inverse circular functions. Properties of triangles. Solution of triangles. Problems relating to heights and distances.

Analytical Geometry of Two Dimensions :—40 marks :

Rectangular cartesian co-ordinates ; Polar co-ordinates ; Transformation from one system to another. Analytical representation of reflexion, translation and rotation. Distance between two points. Division of a segment in a given ratio. Area of triangles. Concept of a locus. Equations of straight lines ; Angle between two lines—Conditions of perpendicularity and parallelism of two lines. Distance of a point from a given line. Position of a point with respect to a line. Equations of bisectors of angles between two lines. Equations of circles. Idea of conic sections—Focus—Directrix—definition of a conic section. Eccentricity and axes of conic sections. Equations of Parabola, Ellipse, and Hyperbola referred to their principal axes.

Equations of tangents and normals to circles and the different conics (use of Calculus may be indicated).

সূচীপত্র

বীজগণিত

প্রথম অধ্যায় : সূচক নিয়ম

দ্বিতীয় অধ্যায় : করণী

তৃতীয় অধ্যায় : ভেদ

চতুর্থ অধ্যায় : সমান্তর প্রগতি

বিষয় | পৃষ্ঠা

পঞ্চম অধ্যায় ঃ গুণোত্তর প্রগতি

ষষ্ঠ অধ্যায় ঃ জটিল রাশি

সপ্তম অধ্যায় ঃ দ্বিঘাত-সমীকরণের তত্ত্ব

বিষয় পৃষ্ঠা

একাদশ অধ্যায় : লগারিদ্‌ম, চক্রবৃদ্ধি ও বার্ষিকী

দ্বাদশ অধ্যায় : সূচক-শ্রেণী

ত্রয়োদশ অধ্যায় : লগারিদ্‌ম শ্রেণী

ত্রিকোণমিতি

প্রথম অধ্যায় : কোণ পরিমাণ

দ্বিতীয় অধ্যায় : যৌগিক কোণের অনুপাত

তৃতীয় অধ্যায় : গুণফল, যোগফল ও বিয়োগফলের পরিবর্তন

দ্বিতীয় অধ্যায় ঃ সরল রেখা

তৃতীয় অধ্যায় : বৃত্তের সমীকরণ

চতুর্থ অধ্যায় : শঙ্কুচ্ছেদ বা কনিক-বিভাগ

পঞ্চম অধ্যায় : স্পর্শক ও অভিলম্ব

বীজগণিত

প্রথম অধ্যায়

সূচক-নিয়ম (Laws of Indices)

1·1. সূচক-নিয়ম: m-সংখ্যক উৎপাদকের প্রত্যেকটি a হইলে সেই m-সংখ্যক উৎপাদকের (অর্থাৎ $a.a.a\ldots$ m-সংখ্যক উৎপাদক পর্যন্ত) গুণফলকে a^m দ্বারা সূচিত করা হয় এবং এইরূপ ক্ষেত্রে a-কে **নিধান** এবং m-কে **সূচক** বলা হয়।

(i) a যদি শূন্য না হয় এবং m ও n যদি যে-কোন অখণ্ড ধনসংখ্যা হয়, তবে মৌলিক সূচক-নিয়মটি এইরূপ:

$$\mathbf{a^m \times a^n = a^{m+n}}.$$

কারণ, $a^m \times a^n = (a.a.a\ldots$ m-সংখ্যক উৎপাদক$) \times (a.a.a.a\ldots$ n-সংখ্যক উৎপাদক)

$= a.a.a.a.a.a.a\ldots\ldots(m+n)$-সংখ্যক উৎপাদক $= a^{m+n}$.

(i)-এর অনুসিদ্ধান্ত হিসাবে নিম্নলিখিত অন্যতর সূচক-নিয়মগুলি পাওয়া যায়।

(ii) $\mathbf{(a^m)^n = a^{mn}}$.

কারণ, $(a^m)^n = a^m.a^m.a^m\ldots$ n-সংখ্যক উৎপাদক

$= a^{m+m+m\ldots n\text{-সংখ্যক পদ}} = a^{mn}$.

(iii) $\mathbf{a^m \div a^n = a^{m-n}}$, যেখানে $m > n$.

কারণ, $a^{m-n} \times a^n = a^{m-n+n} = a^m$; $\therefore$ $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$;

$\therefore$ $a^m \div a^n = a^{m-n}$.

(iv) $\mathbf{(ab)^m = a^m b^m}$.

কারণ, $(ab)^m = (ab).(ab).(ab)\ldots$ m-সংখ্যক উৎপাদক

$= (a.a.a\ldots$ m-সংখ্যক উৎপাদক$) \times (b.b.b\ldots.$ m-সংখ্যক উৎপাদক)

$= a^m b^m$.

(v) $\mathbf{\left(\dfrac{a}{b}\right)^m = \dfrac{a^m}{b^m}}$.

কারণ, $\left(\dfrac{a}{b}\right)^m = \dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{a}{b}\ldots$ m-সংখ্যক উৎপাদক

$$= \frac{a.a.a\ldots m\text{-সংখ্যক উৎপাদক}}{b.b.b\ldots.m\text{-সংখ্যক উৎপাদক}} = \frac{a^m}{b^m}.$$

টীকা। 1·1 অনুচ্ছেদের সূত্রগুলিতে $a=0$ হইলে a^m ও a^n-এর প্রত্যেকটি 0^n হয় এবং তখন উহারা অর্থহীন হইয়া পড়ে। সেইজন্য এইসকল সূত্রে $a \neq 0$ ধরিতে হয়।

1·2. অখণ্ড ধনসংখ্যা ভিন্ন অন্য সূচক ঃ m-সূচকের মান শূন্য, ঋণাত্মক বা খণ্ডসংখ্যা হইলে a^m-এর অর্থ হয় না। $m=0$ হইলে $a^m=a^0$ হয় এবং সেক্ষেত্রে a^0 দ্বারা a উৎপাদকটিকে শূন্যবার a উৎপাদক দিয়া গুণ বুঝায়; কিন্তু ইহা অর্থহীন। m ঋণাত্মক হইলে, $m=-t$ ধরা যায়, সেখানে t ধনাত্মক। তখন $a^m=a^{-t}$; কিন্তু a-কে a দিয়া $-t$-বার গুণ করারও কোন অর্থ নাই। অনুরূপে p ও q অখণ্ড সংখ্যা এবং $m=\frac{p}{q}$ হইলে $a^m=a^{\frac{p}{q}}$ হয় এবং সেক্ষেত্রেও a-কে a দিয়া $\frac{p}{q}$ বার গুণ করার অর্থ হয় না। তবু 1·1 **অনুচ্ছেদে বর্ণিত সূচক-নিয়মগুলি সর্বক্ষেত্রেই সত্য বলিয়া ধরিয়া লওয়া হয় এবং উহাদের সত্যতা স্বীকার করিয়া লইয়াই শূন্য, ঋণাত্মক ও খণ্ডসংখ্যক সূচকের অর্থ নিম্নরূপে প্রকাশ করা হইয়া থাকে।**

(i) **a^0-এর মান ঃ** সূচকের সকল মানের জন্যই সূচক-নিয়মের সত্যতা স্বীকার করিয়া লইলে,

$$a^0 \times a^m = a^{0+m} = a^m;$$

$\therefore$ উভয় পক্ষকে a^m-দ্বারা ভাগ করিলে, $\mathbf{a^0 = \frac{a^m}{a^m} = 1.}$

(ii) **a^{-m}-এর মান ঃ** সূচকের সকল মানের জন্যই সূচক-নিয়ম সত্য ধরিয়া,

$$a^m \times a^{-m} \times a^n = a^{m-m+n} = a^n.$$

$\therefore$ উভয় পক্ষকে a^n-দ্বারা ভাগ করিলে, $a^m \times a^{-m} = \frac{a^n}{a^n} = 1$;

$$\therefore \quad \mathbf{a^{-m} = \frac{1}{a^m}}.$$

(iii) **p ও q যদি অখণ্ড ধনসংখ্যা হয়, তবে $a^{p/q}$-এর মান ঃ** সূচকের সকল মানের জন্যই সূচক-নিয়ম সর্বদা সত্য ধরিয়া,

$$(a^{p/q})^q = a^{p/q}.a^{p/q}.a^{p/q}\ldots \text{ q-সংখ্যক উৎপাদক পর্যন্ত}$$

$$= a^{\frac{p}{q}+\frac{p}{q}+\frac{p}{q}+\cdots\cdots \text{ q-সংখ্যক পদ পর্যন্ত}} = a^{\frac{p}{q}\times q} = a^p.$$

$\therefore$ উভয় পক্ষের q-তম মূল লইলে, $\boldsymbol{a^{p/q} = a^p}$**-এর q-তম মূল** $= \sqrt[q]{a^p}$.

টীকা। q-তম মূল বুঝাইতে $\sqrt[q]{\ }$ চিহ্ন ব্যবহৃত হয়। q-এর মান 2, 3, 4, 5 ইত্যাদি হইলে, এই চিহ্ন যথাক্রমে হয়, $\sqrt{\ }$, $\sqrt[3]{\ }$, $\sqrt[4]{\ }$, $\sqrt[5]{\ }$ ইত্যাদি।

(iv) p ও q **অখণ্ড ধনসংখ্যা হইলে, $a^{-p/q}$ এর মান :**

স্থচক-নিয়ম সাধারণভাবে স্থচকের সকল মানের জন্যই সত্য, এইরূপ ধরিলে

$$a^{-p/q} = \frac{1}{a^{p/q}} = \frac{1}{\sqrt[q]{a^p}}.$$

1·3. সূচক-সূত্রের প্রয়োগ (সহজতর উদাহরণ) :

উদা. 1. $8^{\frac{5}{3}}$-এর মান নির্ণয় কর।

$$8^{\frac{5}{3}} = (\sqrt[3]{8})^5 = 2^5 = 32.$$

উদা. 2. $4^{-\frac{5}{2}}$-এর মান নির্ণয় কর।

$$4^{-\frac{5}{2}} = \frac{1}{4^{\frac{5}{2}}} = \frac{1}{(\sqrt[2]{4})^5} = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}.$$

উদা. 3. গুণ কর : $\sqrt{a^5},\ a^{\frac{3}{4}},\ \sqrt[4]{a^{-5}}$ এবং $\frac{1}{a^{-3}}$.

নির্ণেয় গুণফল $= a^{\frac{5}{2}} \times a^{\frac{3}{4}} \times a^{-\frac{5}{4}} \times a^3 = a^{\frac{5}{2}+\frac{3}{4}-\frac{5}{4}+3}$

$$= a^{\frac{5}{2}-\frac{1}{2}+3} = a^{2+3} = a^5.$$

প্রশ্নমালা 1

ভগ্নাংশ অথবা ঋণাত্মক স্থচকবিশিষ্ট আকার বর্জন করিয়া নিম্নলিখিত রাশিগুলিকে প্রকাশ কর (Express the following avoiding fractional or negative indices) :

1. $a^{\frac{5}{7}}$. 2. $x^{-\frac{3}{2}}$. 3. $\frac{3}{x^{-\frac{4}{5}}}$. 4. $x^{-\frac{2}{5}} \times 3a^{-\frac{1}{2}}$.

5. $8m^{-2} \times m^{-\frac{2}{3}}$. 6. $x^{-\frac{4}{5}} \div 3a^{-\frac{5}{4}}$. 7. $x^{-\frac{2}{3}} \div 2x^{-\frac{1}{2}}$.

8. $\sqrt[5]{x^2} \div \sqrt[5]{x^{-a}}$. 9. $\sqrt[2m]{a^{-5}} \times \sqrt[m]{a^8}$. 10. $\sqrt[4a]{x^6} \div \sqrt[2a]{x^{-5}}$.

মূল-চিহ্ন অথবা ঋণাত্মক স্থচকবিশিষ্ট আকার বর্জন করিয়া নিম্নলিখিত রাশিগুলিকে প্রকাশ কর (Express the following avoiding radical signs and negative indices) :

11. $(\sqrt[3]{x})^7$. 12. $(\sqrt[4]{a})^{-6}$. 13. $\frac{1}{\sqrt[3]{x^{-2}}}$.

14. $\frac{1}{(\sqrt[5]{a})^{-2}}$. 15. $\sqrt[3]{x^4} \div (\sqrt[6]{x})^{-1}$. 16. $\sqrt[4]{a^{-3}} \div (\sqrt[8]{a})^{-12}$.

নিম্নলিখিত রাশিগুলির মান নির্ণয় কর (Find the value of) :

17. $4^{-\frac{3}{2}}$. **18.** $8^{\frac{2}{3}}$. **19.** $9^{\frac{3}{2}}$. **20.** $16^{\frac{5}{4}}$.

21. $81^{-\frac{3}{4}}$. **22.** $\frac{1}{6^{-2}}$. **23.** $(125)^{-\frac{2}{3}}$. **24.** $(\frac{1}{27})^{-\frac{4}{3}}$.

25. $(\frac{1}{216})^{-\frac{2}{3}}$. **26.** সরল কর : $\frac{x^{m+2n}x^{3m-8n}}{x^{5m-6n}}$. [C. U. 1874]

1·4. সূচক-সূত্রের প্রয়োগ (কঠিনতর উদাহরণ) :

উদা. 1. সরল কর : $\left(a^8b^{\frac{5}{3}}\right)^{-\frac{3}{4}}$.

$$\left(a^8b^{\frac{5}{3}}\right)^{-\frac{3}{4}}=\left(a^8\right)^{-\frac{3}{4}}\times\left(b^{\frac{5}{3}}\right)^{-\frac{3}{4}}$$

$$=a^{8\times(-\frac{3}{4})}\times b^{\frac{5}{3}\times(-\frac{3}{4})}=a^{-6}b^{-\frac{5}{4}}.$$

উদা. 2. সরল কর : $\sqrt{a^{-2}b}\times\sqrt[3]{ab^{-3}}$.

$$\sqrt{a^{-2}b}=(a^{-2}b)^{\frac{1}{2}}=(a^{-2})^{\frac{1}{2}}\times b^{\frac{1}{2}}=a^{-1}b^{\frac{1}{2}}\ ;$$

এবং $\sqrt[3]{ab^{-3}}=(ab^{-3})^{\frac{1}{3}}=a^{\frac{1}{3}}\times(b^{-3})^{\frac{1}{3}}=a^{\frac{1}{3}}b^{-1}$.

সুতরাং, প্রদত্ত রাশি $=a^{-1}b^{\frac{1}{2}}\times a^{\frac{1}{3}}b^{-1}=a^{-1+\frac{1}{3}}\times b^{\frac{1}{2}-1}=a^{-\frac{2}{3}}b^{-\frac{1}{2}}$.

উদা. 3. সরল কর : $\sqrt{a^3b^{-\frac{2}{3}}c^{-\frac{7}{6}}}\div\sqrt[3]{a^4b^{-1}c^{\frac{5}{4}}}$.

$$\sqrt{a^3b^{-\frac{2}{3}}c^{-\frac{7}{6}}}=\left(a^3b^{-\frac{2}{3}}c^{-\frac{7}{6}}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(a^3\right)^{\frac{1}{2}}\left(b^{-\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}\left(c^{-\frac{7}{6}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=a^{\frac{3}{2}}b^{-\frac{1}{3}}c^{-\frac{7}{12}}\ ;$$

এবং $\sqrt[3]{a^4b^{-1}c^{\frac{5}{4}}}=\left(a^4b^{-1}c^{\frac{5}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}=\left(a^4\right)^{\frac{1}{3}}\left(b^{-1}\right)^{\frac{1}{3}}\left(c^{\frac{5}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}$

$$=a^{\frac{4}{3}}b^{-\frac{1}{3}}c^{\frac{5}{12}}.$$

সুতরাং, প্রদত্ত রাশি $=a^{\frac{3}{2}}b^{-\frac{1}{3}}c^{-\frac{7}{12}}\div a^{\frac{4}{3}}b^{-\frac{1}{3}}c^{\frac{5}{12}}$

$$=a^{\frac{3}{2}}b^{-\frac{1}{3}}c^{-\frac{7}{12}}\times a^{-\frac{4}{3}}b^{\frac{1}{3}}c^{-\frac{5}{12}}$$

$$=a^{\frac{3}{2}-\frac{4}{3}}b^{-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}}c^{-\frac{7}{12}-\frac{5}{12}}$$

$$=a^{\frac{1}{6}}b^0c^{-1}=a^{\frac{1}{6}}c^{-1}.$$

প্রশ্নমালা 2

সরল কর (Simplify):

1. $\left(a^{-\frac{3}{4}}\right)^{8}$. 2. $\left(a^{-\frac{2}{3}}b^{\frac{5}{6}}\right)^{\frac{3}{4}}$. 3. $\left(a^{-\frac{1}{2}}b^{-3}\right)^{-2}$. 4. $\left(a^{6}b^{\frac{5}{4}}\right)^{-\frac{4}{3}}$.

5. $\left(\sqrt[3]{a^{4}b^{3}}\right)^{6}$. 6. $\left(\sqrt[6]{x^{9}y^{-8}}\right)^{-3}$. 7. $\sqrt[8]{x^{2}.\sqrt[4]{x^{-3}}}$.

8. $\sqrt{a^{-3}b^{4}}\times\sqrt[4]{a^{2}b^{-8}}$. 9. $\sqrt[4]{x^{-2}\sqrt{y^{5}}}\times\sqrt{x.\sqrt[4]{y^{3}}}$.

10. $(8x^{3}\div 27a^{-3})^{\frac{2}{3}}$. 11. $(64x^{3}\div 27a^{-3})^{-\frac{2}{3}}$.

12. $\sqrt[3]{a^{6}b^{-2}c^{-4}}\times\sqrt[4]{a^{-6}b^{4}c^{8}}$. 13. $\sqrt{a^{-\frac{2}{3}}b^{4}c^{-\frac{1}{3}}}\div\sqrt[3]{a^{2}b^{4}c^{-1}}$.

14. $\sqrt{ab^{-2}c^{3}}\div\left(\sqrt[3]{a^{3}b^{2}c^{-3}}\right)^{-1}$. 15. $\left(\frac{a^{-1}b^{2}}{a^{2}b^{-4}}\right)^{7}\div\left(\frac{a^{3}b^{-5}}{a^{-2}b^{3}}\right)^{-5}$.

1·5. বিবিধ উদাহরণমালা:

উদা. 1. $a+b+c+3a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}+3a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}$-কে $a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}+c^{\frac{1}{3}}$ দ্বারা ভাগ কর।

ভাজ্য ও ভাজকের প্রত্যেককে a-এর অধঃক্রমিক শক্তি অনুসারে সাজাইয়া প্রক্রিয়া আরম্ভ করা যাক:

$$
\begin{array}{l|l|l}
a^{\frac{1}{3}}+\left(b^{\frac{1}{3}}+c^{\frac{1}{3}}\right) & a+3a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}+3a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}+(b+c) & a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}\left(2b^{\frac{1}{3}}-c^{\frac{1}{3}}\right) \\
 & a+\ a^{\frac{2}{3}}\left(b^{\frac{1}{3}}+c^{\frac{1}{3}}\right) & \quad +\left(b^{\frac{2}{3}}-b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{3}}+c^{\frac{2}{3}}\right) \\ \hline
 & \quad a^{\frac{2}{3}}\left(2b^{\frac{1}{3}}-c^{\frac{1}{3}}\right)+3a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}+(b+c) & \\
 & \quad a^{\frac{2}{3}}\left(2b^{\frac{1}{3}}-c^{\frac{1}{3}}\right)+a^{\frac{1}{3}}\left(2b^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{3}}-c^{\frac{2}{3}}\right) & \\ \hline
 & \qquad a^{\frac{1}{3}}\left(b^{\frac{2}{3}}-b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{3}}+c^{\frac{2}{3}}\right)+(b+c) & \\
 & \qquad a^{\frac{1}{3}}\left(b^{\frac{2}{3}}-b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{3}}+c^{\frac{2}{3}}\right)+(b+c) & \\ \hline
\end{array}
$$

অতএব, নির্ণেয় ভাগফল $=a^{\frac{2}{3}}+2a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}-b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{3}}+c^{\frac{2}{3}}$.

উদা. 2. $x+y^{\frac{1}{2}}+z^{\frac{1}{3}}-3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{6}}z^{\frac{1}{9}}$-কে $x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{6}}+z^{\frac{1}{9}}$ দ্বারা ভাগ কর।

$x^{\frac{1}{3}}$-এর পরিবর্তে a, $y^{\frac{1}{6}}$-এর পরিবর্তে b এবং $z^{\frac{1}{9}}$-এর পরিবর্তে c বসাইলে,

$$
\begin{aligned}
&x+y^{\frac{1}{2}}+z^{\frac{1}{3}}-3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{6}}z^{\frac{1}{9}} \\
&\quad =a^{3}+b^{3}+c^{3}-3abc \\
&\quad =(a+b+c)(a^{2}+b^{2}+c^{2}-ab-bc-ca)
\end{aligned}
$$

$$=\left(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{6}}+z^{\frac{1}{9}}\right)\left\{\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^2+\left(y^{\frac{1}{6}}\right)^2+\left(z^{\frac{1}{9}}\right)^2-x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{6}}-y^{\frac{1}{6}}z^{\frac{1}{9}}-z^{\frac{1}{9}}x^{\frac{1}{3}}\right\}$$
$$=\left(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{6}}+z^{\frac{1}{9}}\right)\left(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{1}{3}}+z^{\frac{2}{9}}-x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{6}}-y^{\frac{1}{6}}z^{\frac{1}{9}}-z^{\frac{1}{9}}x^{\frac{1}{3}}\right).$$

সুতরাং, নির্ণেয় ভাগফল $=x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{1}{3}}+z^{\frac{2}{9}}-x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{6}}-y^{\frac{1}{6}}z^{\frac{1}{9}}-z^{\frac{1}{9}}x^{\frac{1}{3}}$
$$=x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}\left(y^{\frac{1}{6}}+z^{\frac{1}{9}}\right)+\left(y^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{6}}z^{\frac{1}{9}}+z^{\frac{2}{9}}\right).$$

উদা. 3. $x^{2^n}+a^{2^{n-1}}x^{2^{n-1}}+a^{2^n}$-কে $x^{2^{n-1}}-a^{2^{n-2}}x^{2^{n-2}}+a^{2^{n-1}}$ দ্বারা ভাগ কর।

ধর, $p=x^{2^{n-2}}$ এবং $q=a^{2^{n-2}}$.

অতএব, $p^2=\left(x^{2^{n-2}}\right)^2=x^{2\times2^{n-2}}=x^{2^{n-2+1}}=x^{2^{n-1}}$

এবং $p^4=(p^2)^2=\left(x^{2^{n-1}}\right)^2=x^{2\times2^{n-1}}=x^{2^{n-1+1}}=x^{2^n}$.

এইরূপ, $q^2=a^{2^{n-1}}$ এবং $q^4=a^{2^n}$.

সুতরাং,
$$\frac{x^{2^n}+a^{2^{n-1}}x^{2^{n-1}}+a^{2^n}}{x^{2^{n-1}}-a^{2^{n-2}}x^{2^{n-2}}+a^{2^{n-1}}}$$
$$=\frac{p^4+p^2q^2+q^4}{p^2-pq+q^2}=\frac{(p^2+q^2)^2-p^2q^2}{p^2-pq+q^2}$$
$$=\frac{(p^2+q^2+pq)(p^2+q^2-pq)}{p^2-pq+q^2}$$
$$=p^2+pq+q^2$$
$$=x^{2^{n-1}}+x^{2^{n-2}}a^{2^{n-2}}+a^{2^{n-1}}.$$

উদা 4. $a^2+2b^2+(a+2b)\sqrt{ab}$ এবং $a^2-b^2+(a-b)\sqrt{ab}$-এর গ. সা. গু. নির্ণয় কর।

প্রথম রাশি $=a^2+a\sqrt{ab}+2b\sqrt{ab}+2b^2=a^2+a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{1}{2}}+2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}}+2b^2$
$$=a^{\frac{3}{2}}\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)+2b^{\frac{3}{2}}\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)=\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{3}{2}}+2b^{\frac{2}{3}}\right).$$

দ্বিতীয় রাশি $=a^2+a\sqrt{ab}-b\sqrt{ab}-b^2=a^2+a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}}-b^2$
$$=a^{\frac{3}{2}}\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)-b^{\frac{3}{2}}\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)=\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{3}{2}}-b^{\frac{3}{2}}\right).$$

অতএব, নির্ণেয় গ. সা. গু. $=a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$.

উদা. 5. সরল কর : $\dfrac{x+(xy^2)^{\frac{1}{3}}-(x^2y)^{\frac{1}{3}}}{x+y}$.

প্রদত্ত লব $=x+x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}=x^{\frac{1}{3}}\left(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}\right)$;

এবং প্রদত্ত হর $= \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3 + \left(y^{\frac{1}{3}}\right)^3 = \left(x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}}\right)\left\{\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^2 - \left(x^{\frac{1}{3}}\right)\left(y^{\frac{1}{3}}\right) + \left(y^{\frac{1}{3}}\right)^2\right\}$

$$= \left(x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}}\right)\left(x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{2}{3}}\right).$$

অতএব, প্রদত্ত রাশি $= \dfrac{x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}}}$.

উদা. 6. দেখাও যে,

$$\frac{1}{1+x^{m-n}+x^{m-p}} + \frac{1}{1+x^{n-m}+x^{n-p}} + \frac{1}{1+x^{p-m}+x^{p-n}} = 1.$$

প্রথম পদ $= \dfrac{x^{-m}}{x^{-m}(1+x^{m-n}+x^{m-p})} = \dfrac{x^{-m}}{x^{-m}+x^{-n}+x^{-p}}$;

দ্বিতীয় পদ $= \dfrac{x^{-n}}{x^{-n}(1+x^{n-m}+x^{n-p})} = \dfrac{x^{-n}}{x^{-n}+x^{-m}+x^{-p}}$;

এবং তৃতীয় পদ $= \dfrac{x^{-p}}{x^{-p}(1+x^{p-m}+x^{p-n})} = \dfrac{x^{-p}}{x^{-p}+x^{-m}+x^{-n}}$.

অতএব, প্রদত্ত রাশি

$$= \frac{x^{-m}}{x^{-m}+x^{-n}+x^{-p}} + \frac{x^{-n}}{x^{-n}+x^{-m}+x^{-p}} + \frac{x^{-p}}{x^{-p}+x^{-m}+x^{-n}}$$

$$= \frac{x^{-m}+x^{-n}+x^{-p}}{x^{-m}+x^{-n}+x^{-p}} = 1.$$

উদা. 7. $a^x = b,\ b^y = c,\ c^z = a$ হইলে, দেখাও যে, $xyz = 1.$

$$a = c^z = (b^y)^z = b^{yz} = (a^x)^{yz} = a^{xyz},$$

অথবা, $a^1 = a^{xyz}$; $\therefore\ xyz = 1.$

উদা. 8. $a^{\frac{1}{x}} = b^{\frac{1}{y}} = c^{\frac{1}{z}}$ এবং $abc = 1$ হইলে, দেখাও যে, $x + y + z = 0.$

$a^{\frac{1}{x}} = b^{\frac{1}{y}} = c^{\frac{1}{z}} = k$ ধরিলে, $\left(a^{\frac{1}{x}}\right)^x = k^x.$

অথবা, $a = k^x$, এবং অনুরূপে $b = k^y$ এবং $c = k^z$.

যেহেতু $abc = 1$, $\therefore\ k^x k^y k^z = abc = 1$; অথবা, $k^{x+y+z} = 1 = k^0$;

$\therefore\ x + y + z = 0.$

উদা. 9. $x = 2 + 2^{\frac{2}{3}} + 2^{\frac{1}{3}}$ হইলে, প্রমাণ কর যে, $x^3 - 6x^2 + 6x - 2 = 0.$
[C. U. 1930, '36, '42, '50]

যেহেতু $x = 2 + 2^{\frac{2}{3}} + 2^{\frac{1}{3}}$,

অতএব, $x-2=2^{\frac{2}{3}}+2^{\frac{1}{3}}$; [পক্ষান্তর করিয়া]

$\therefore \quad (x-2)^3=\left(2^{\frac{2}{3}}+2^{\frac{1}{3}}\right)^3$, [উভয় পক্ষের ঘন করিয়া]

অথবা, $x^3-6x^2+12x-8$

$$=\left(2^{\frac{2}{3}}\right)^3+\left(2^{\frac{1}{3}}\right)^3+3.2^{\frac{2}{3}}.2^{\frac{1}{3}}\left(2^{\frac{2}{3}}+2^{\frac{1}{3}}\right)$$

$$=2^2+2+3.2.(x-2) \qquad [\because \; x-2=2^{\frac{2}{3}}+2^{\frac{1}{3}}]$$

অথবা, $x^3-6x^2+12x-8=6+6x-12$,

অথবা, $x^3-6x^2+12x-8-6-6x+12=0$; [পক্ষান্তর করিয়া]

$\therefore \quad x^3-6x^2+6x-2=0.$

উদা. 10. $a^b=b^a$ হইলে, দেখাও যে, $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a}{b}}=a^{\frac{a}{b}-1}$; অধিকন্তু $a=2b$ হইলে, দেখাও যে, $b=2$.

যেহেতু $a^b=b^a$, $\therefore\; a=b^{\frac{a}{b}}$ [উভয় পক্ষের b-তম মূল নির্ণয় করিয়া].

অতএব, $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a}{b}}=\dfrac{a^{\frac{a}{b}}}{b^{\frac{a}{b}}}=\dfrac{a^{\frac{a}{b}}}{a}=a^{\frac{a}{b}-1}$ $[\because\; b^{\frac{a}{b}}=a]$.

আবার, যেহেতু $a=2b$, সেইহেতু, $b^{\frac{a}{b}}=b^{\frac{2b}{b}}=b^2$.

কিন্তু $a=b^{\frac{a}{b}}$; $\therefore\; 2b=b^{\frac{a}{b}}=b^2$.

$\therefore\; b^2-2b=0$, বা, $b(b-2)=0$.

$\therefore\; b\neq 0$ হইলে, $b-2=0$, অর্থাৎ $b=2$.

বি. দ্র.। মনে রাখা প্রয়োজন যে, কোন সমীকরণের উভয় পক্ষে সূচক সমান হইলেই নিধান (base) সমান হইবে, এইরূপ নিশ্চিত সিদ্ধান্ত করা চলে না। যথা :—

$a^m=3^2=9$ এবং $b^m=(-3)^2=9$.

$\therefore\; a^m=b^m$, কিন্তু $a=b$ নহে ($\because\; 3\neq -3$).

উদা. 11. $x=(a+\sqrt{a^2+b^3})^{\frac{1}{3}}+(a-\sqrt{a^2+b^3})^{\frac{1}{3}}$ হইলে, দেখাও যে, $x^3+3bx-2a=0$.

$a+\sqrt{a^2+b^3}$-এর পরিবর্তে m এবং $a-\sqrt{a^2+b^3}$-এর পরিবর্তে n বসাইলে,

$$x^3=\left(m^{\frac{1}{3}}+n^{\frac{1}{3}}\right)^3=\left(m^{\frac{1}{3}}\right)^3+\left(n^{\frac{1}{3}}\right)^3+3m^{\frac{1}{3}}.n^{\frac{1}{3}}\left(m^{\frac{1}{3}}+n^{\frac{1}{3}}\right)$$
$$=m+n+3\left(mn\right)^{\frac{1}{3}}.\left(m^{\frac{1}{3}}+n^{\frac{1}{3}}\right)=m+n+3(mn)^{\frac{1}{3}}.x.$$

কিন্তু, $m+n=2a$, এবং $(mn)^{\frac{1}{3}}=\{a^2-(a^2+b^3)\}^{\frac{1}{3}}=(-b^3)^{\frac{1}{3}}=-b$;

$\therefore\quad x^3=2a-3bx. \qquad \therefore\quad x^3+3bx-2a=0.$

প্রশ্নমালা 3

1. $x^{\frac{2}{3}}+2x^{\frac{1}{2}}+3x^{\frac{1}{3}}+2x^{\frac{1}{6}}+1$-কে $x^{\frac{1}{3}}-2x^{\frac{1}{6}}+1$ দ্বারা গুণ কর।

2. $a^{\frac{2}{3}}+3a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+9b^{\frac{2}{3}}$-কে $a^{\frac{1}{3}}-3b^{\frac{1}{3}}$ দ্বারা গুণ কর।

3. $a^{\frac{5}{2}}+8ab+4a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{2}{3}}+2a^2b^{\frac{1}{3}}+32b^{\frac{5}{3}}+16a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{4}{3}}$-কে $a^{\frac{1}{2}}-2b^{\frac{1}{3}}$ দ্বারা গুণ কর।

4. $x^{\frac{5}{2}}-4x^{\frac{3}{2}}-2x^{\frac{1}{2}}+6x-x^2$-কে $x^{\frac{3}{2}}+2-4x^{\frac{1}{2}}$ দ্বারা ভাগ কর।

5. $a^{\frac{5}{2}}-a^{\frac{3}{2}}b+ab^{\frac{3}{2}}-2a^{\frac{1}{2}}b^2+b^{\frac{5}{2}}$-কে $a^{\frac{3}{2}}-ab^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{2}}b-b^{\frac{3}{2}}$ দ্বারা ভাগ কর।

6. $8x^{-n}-8x^n+5x^{3n}-3x^{-3n}$-কে $5x^n-3x^{-n}$ দ্বারা ভাগ কর।

7. দেখাও যে, $x^3+a^3+x^{\frac{3}{2}}a^{\frac{3}{2}}$, $x^{\frac{3}{4}}+a^{\frac{3}{4}}+x^{\frac{3}{8}}a^{\frac{3}{8}}$ দ্বারা বিভাজ্য।

8. গুণ কর : $x^{2^{n-1}}+a^{2^{n-1}}$-কে $x^{2^{n-1}}-a^{2^{n-1}}$ দ্বারা।

9. ভাগ কর : $x^{2^n}-y^{2^n}$-কে $x^{2^{n-1}}+y^{2^{n-1}}$ দ্বারা। [C. U. 1879]

10. সরল কর : $\left\{\left(a^m\right)^{m-\frac{1}{m}}\right\}^{\frac{1}{m+1}}$.

11. ভাগ কর : $2x^{-\frac{1}{4}}+3x^{\frac{3}{4}}-7x^{\frac{1}{4}}+x-2x^{\frac{1}{2}}$-কে $x^{\frac{1}{4}}-2x^{-\frac{1}{4}}$ দ্বারা।

12. $x^{\frac{3}{4}}-x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{2}}$-এর বর্গ নির্ণয় কর।

13. ভাগ কর : $x^{\frac{3n}{2}}-a^{\frac{3n}{2}}$ কে $x^{\frac{n}{2}}-a^{\frac{n}{2}}$ দ্বারা।

14. $(x+y)$-কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

[সংকেত : $x+y=\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3+\left(y^{\frac{1}{3}}\right)^3$ ধর।]

15. ভাগ কর : $ax^{-1}+a^{-1}x+2$-কে $a^{\frac{1}{3}}x^{-\frac{1}{3}}+a^{-\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}}-1$ দ্বারা।

সরল কর (Simplify) :

16. $\left(\dfrac{a-b}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}-\dfrac{a^{\frac{3}{2}}-b^{\frac{3}{2}}}{a-b}\right)^{-1}$. 17. $\dfrac{x^{\frac{1}{3}}+3y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}-3y^{\frac{1}{3}}}+\dfrac{x^{\frac{2}{3}}-3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}+9y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}+3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}+9y^{\frac{2}{3}}}$.

18. $\dfrac{a^{\frac{3}{2}}-ax^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{2}}x-x^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{5}{2}}-a^2x^{\frac{1}{2}}+3a^{\frac{3}{2}}x-3ax^{\frac{3}{2}}+a^{\frac{1}{2}}x^2-x^{\frac{5}{2}}}$.

19. $\dfrac{a^2+b^2-a^{-2}-b^{-2}}{a^2b^2-a^{-2}b^{-2}}+\dfrac{(a-a^{-1})(b-b^{-1})}{ab+a^{-1}b^{-1}}$.

20. $\dfrac{x-y}{x^{\frac{3}{4}}+x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{4}}}\div\dfrac{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{4}}+x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{2}}}$.

21. $(a+b+c)(a^{-1}+b^{-1}+c^{-1})-a^{-1}b^{-1}c^{-1}(b+c)(c+a)(a+b)$.

22. $\dfrac{a^{-1}(ab^{-1}-1)^2}{b^{-2}(1+a^{-1}b)}\times\dfrac{b^2(a^{-2}+b^{-2})}{a(ab^{-1}-a^{-1}b)}\div\dfrac{1-a^{-1}b}{ab^{-1}+1}$.

23. $\dfrac{x^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{2}{3}}}{x-a}\left(\dfrac{x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{1}{3}}}+a^{\frac{1}{3}}\right)+\dfrac{x^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{2}{3}}}{x+a}\left(\dfrac{x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{1}{3}}}-a^{\frac{1}{3}}\right)$.

24. $\dfrac{x^{3n}}{x^n-1}-\dfrac{x^{2n}}{x^n+1}-\dfrac{1}{x^n-1}+\dfrac{1}{x^n+1}$, যখন $x=\sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}}$.

25. দেখাও যে,

$$\frac{x^{2^n}-y^{2^n}}{x-y}=(x+y)(x^2+y^2)(x^4+y^4)\cdots(x^{2^{n-1}}+y^{2^{n-1}}).$$

26. সরল কর : $\dfrac{a^{\frac{3}{2}}+ab}{ab-b^3}-\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-b}$. [C. U. 1924]

27. সরল কর : $\dfrac{\left(p+\dfrac{1}{q}\right)^m\left(p-\dfrac{1}{q}\right)^m}{\left(q+\dfrac{1}{p}\right)^m\left(q-\dfrac{1}{p}\right)^m}$. [B. U. 1889]

28. সরল কর : $\dfrac{\left(p^2-\dfrac{1}{q^2}\right)^p\left(p-\dfrac{1}{q}\right)^{q-p}}{\left(q^2-\dfrac{1}{p^2}\right)^q\left(q+\dfrac{1}{p}\right)^{p-q}}$. [B. U. 1891]

29. $x^a=c^b$ এবং $x^c=c^a$ হইলে, দেখাও যে, $a^2=bc$.

30. $p=a^x$, $q=a^y$ এবং $(p^yq^x)^z=a^2$ হইলে, দেখাও যে, $xyz=1$.

[C. U. 1929, '30 ; D. B. 1937]

31. সরল কর : $\left(\dfrac{x^l}{x^m}\right)^{l^2+lm+m^2} \times \left(\dfrac{x^m}{x^n}\right)^{m^2+mn+n^2} \times \left(\dfrac{x^n}{x^l}\right)^{n^2+nl+l^2}$.

[C. U. 1904]

32. সরল কর : $\dfrac{1}{1+x^{q-r}+x^{q-p}}+\dfrac{1}{1+x^{r-p}+x^{r-q}}+\dfrac{1}{1+x^{p-q}+x^{p-r}}$.

[P. U. 1903]

33. $x=a^{\frac{1}{3}}-a^{-\frac{1}{3}}$ হইলে, দেখাও যে, $x^3+3x=a-\dfrac{1}{a}$.

34. $a^{m^n}=(a^m)^n$ হইলে, m-এর মান n দ্বারা প্রকাশ কর। [P. U. 1918]

35. $xy^{p-1}=a, xy^{q-1}=b, xy^{r-1}=c$ হইলে, দেখাও যে, $a^{q-r}.b^{r-p}.c^{p-q}=1$.

36. $x=a^m, y=a^n$ এবং $x^n y^n=\sqrt[l]{a}$ হইলে, দেখাও যে, $mnl=\frac{1}{2}$.

37. $x^p=y^q=z^r$ এবং $y^2=xz$ হইলে, দেখাও যে, $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{r}=\dfrac{2}{q}$.

38. $2^{x-4}=4a^{x-6}$ হইলে, দেখাও যে, $x=6$.

39. যদি $a^{m^n}=(a^m)^n$ হয়, তবে দেখাও যে, $m=n^{\frac{1}{n-1}}$.

40. সমাধান কর : $2^{x+1}-2^x-8=0$.

41. সমাধান কর :

(i) $\left.\begin{array}{l} x^y=y^x \\ \text{এবং } x=2y \end{array}\right\}$

(ii) $\left.\begin{array}{l} a^x=(x+y+z)^y \\ a^y=(x+y+z)^z \\ a^z=(x+y+z)^x \end{array}\right\}$

দ্বিতীয় অধ্যায়

করণী (Surds)

2·1. করণী : $\sqrt{2}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[3]{5}$-এর মত যে-সংখ্যার নির্দিষ্ট মূল নির্ণয় করা যায় না তাহাকে **অমূলদ সংখ্যা** বলে। অমূলদ সংখ্যার প্রতীক নাম **করণী**।

মূলদ সংখ্যাকে (rational number) সর্বদা দুইটি অখণ্ড সংখ্যার অনুপাত হিসাবে প্রকাশ করা চলে, কিন্তু **অমূলদ সংখ্যাকে** কখনও দুইটি অখণ্ড সংখ্যার অনুপাতরূপে প্রকাশ করা সম্ভব হয় না। উদাহরণস্বরূপ $\sqrt{7}$, $\sqrt[3]{3}$ ইত্যাদির প্রত্যেকটির মূল অসীম দশমিক বলিয়া উহাদের কাহাকেও দুইটি অখণ্ড সংখ্যার অনুপাতরূপে প্রকাশ করা যায় না।

$\sqrt{x}$, $\sqrt[3]{y^2}$ ইত্যাদি উহাদের চলরাশিটির বিশেষ মানের জন্য মূলদ হইতে পারে, কিন্তু ঐরূপ মানের উল্লেখ না থাকিলে উহাদিগকে অমূলদ রাশি বলিয়াই গণ্য করা হয়।

2·2. বিভিন্ন প্রকারের সরল করণী :

(i) $\sqrt{50}$, $\sqrt[3]{x^4}$-এর মত যে-করণীর কোন মূলদ সহগ নাই তাহাকে **পূর্ণ** (complete) বা **শুদ্ধ** (pure) **করণী** বলে ; এবং

(ii) $5\sqrt{2}$, $x\sqrt[3]{x}$-এর মত যে-করণীর মূলদ সহগ থাকে তাহাকে **মিশ্র করণী** (mixed surd) বলে।

সূচক-নিয়মের প্রয়োগে সহজেই মিশ্র করণীকে পূর্ণ করণীর আকারে এবং বিপরীতক্রমে পূর্ণ করণীকে মিশ্র করণীর আকারে প্রকাশ করা যায়। উদাহরণস্বরূপ :

(মিশ্র করণী) $5\sqrt{3} = (5^2)^{\frac{1}{2}}.3^{\frac{1}{2}} = (5^2.3)^{\frac{1}{2}} = 75^{\frac{1}{2}} = \sqrt{75}$ (পূর্ণ করণী)।

(পূর্ণ করণী) $\sqrt[3]{72} = \sqrt[3]{8.9} = (2^3.9)^{\frac{1}{3}} = 2.9^{\frac{1}{3}} = 2\sqrt[3]{9}$ (মিশ্র করণী)।

(iii) একই অমূলদ গুণনীয়ক-বিশিষ্ট দুই বা ততোধিক করণীকে **সদৃশ করণী** বলে। উদাহরণস্বরূপ, $\sqrt{45}$ ও $\sqrt{80}$ সদৃশ করণী, কারণ, $\sqrt{45} = \sqrt{9.5} = 3\sqrt{5}$ এবং $\sqrt{80} = \sqrt{16.5} = 4\sqrt{5}$. $3\sqrt{5}$ ও $4\sqrt{5}$ উভয়ের অমূলদ গুণনীয়ক $\sqrt{5}$ বলিয়া উহারা সদৃশ।

মনে রাখা প্রয়োজন যে **কেবলমাত্র সদৃশ করণীরই যোগ-বিয়োগ সম্ভব।** ইতিপূর্বে মাধ্যমিক পাঠ্যক্রমে এসম্বন্ধে বিশদ আলোচনা হইয়াছে।

(iv) $\sqrt{5}$, $\sqrt{a^3}$, $(a+x)^{\frac{3}{2}}$-এর মত একই মূলচিহ্ন বা সূচক-বিশিষ্ট করণীকে **সমমূলীয় করণী** বলে।

মূলচিহ্নের ক্রম অনুসারে করণী দ্বিতীয়, তৃতীয়, চতুর্থ প্রভৃতি বিভিন্ন ক্রমের হইতে পারে। সেই বিচারে $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[4]{8}$,...$\sqrt[n]{x}$ যথাক্রমে, দ্বিতীয়, তৃতীয়, চতুর্থ,···n-তম ক্রমের করণী। কখনও কখনও দ্বিতীয় ক্রমের করণী **বর্গমূলীয়** বা **দ্বিঘাত করণী** এবং তৃতীয় ক্রমের করণী **ঘনমূলীয়** বা **ত্রিঘাত করণী** নামেও অভিহিত হয়।

সূচক-নিয়মের প্রয়োগে দুই বা ততোধিক বিভিন্নক্রমের করণীকে অনায়াসে সমমূলীয় করণীতে রূপান্তরিত করা যায়। উদাহরণস্বরূপ, $\sqrt{5}$ ও $\sqrt[3]{4}$ যথাক্রমে দ্বিতীয় ও তৃতীয় ক্রমের করণী।

এখানে $\sqrt{5}$ বা $5^{\frac{1}{2}}$ এবং $\sqrt[3]{4}$ বা $4^{\frac{1}{3}}$-এর সূচকদ্বয় যথাক্রমে $\frac{1}{2}$ ও $\frac{1}{3}$। উহাদের হরের ল. সা. গু. $=6$. এইবার সূচক-দুইটির প্রত্যেকের হরে 6 বসাইয়া এইভাবে লবের প্রয়োজনীয় পরিবর্তন করা যায় : $\frac{1}{2}=\frac{3}{6}$ এবং $\frac{1}{3}=\frac{2}{6}$; ফলে,

$$\sqrt{5}=5^{\frac{1}{2}}=5^{\frac{3}{6}}=\sqrt[6]{5^3}=\sqrt[6]{125},$$

এবং $$\sqrt[3]{4}=4^{\frac{1}{3}}=4^{\frac{2}{6}}=\sqrt[6]{4^2}=\sqrt[6]{16}$$ হইয়া যায়।

স্পষ্টতঃ $\sqrt[6]{125}$ এবং $\sqrt[6]{16}$ উভয়ে ষষ্ঠ ক্রমের করণী এবং সেই কারণে উহারা সমমূলীয়।

করণীর গুণ বা ভাগ করিতে গেলে অথবা উহাদের মানের তুলনা করিতে গেলে সংশ্লিষ্ট করণীগুলিকে সমমূলীয় করিয়া লইতে হয়। উদাহরণস্বরূপ,

$$\sqrt{2}\times\sqrt[3]{3}=2^{\frac{1}{2}}\times3^{\frac{1}{3}}=2^{\frac{3}{6}}\times3^{\frac{2}{6}}=(2^3.3^2)^{\frac{1}{6}}=(8.9)^{\frac{1}{6}}=\sqrt[6]{72}.$$

আবার, $$\sqrt{2}=2^{\frac{1}{2}}=2^{\frac{3}{6}}=\sqrt[6]{2^3}=\sqrt[6]{8}$$

এবং $$\sqrt[3]{3}=3^{\frac{1}{3}}=3^{\frac{2}{6}}=\sqrt[6]{3^2}=\sqrt[6]{9}$$ বলিয়া $\sqrt[3]{3} > \sqrt{2}$.

উদাহরণমালা

উদা. 1. $4\sqrt{2}$-কে পূর্ণ করণীর আকারে প্রকাশ কর।

$$4\sqrt{2}=4.2^{\frac{1}{2}}=(4^2)^{\frac{1}{2}}2^{\frac{1}{2}}=(16.2)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{32}.$$

উদা. 2. $\sqrt[3]{40}$-কে মিশ্র করণীর আকারে প্রকাশ কর।

$$\sqrt[3]{40}=(40)^{\frac{1}{3}}=(8.5)^{\frac{1}{3}}=(2^3.5)^{\frac{1}{3}}=2.5^{\frac{1}{3}}=2\sqrt[3]{5}.$$

উদা. 3. সরল কর : $\sqrt[3]{625}-\sqrt[3]{135}+\sqrt[3]{40}$.

$$\sqrt[3]{625}-\sqrt[3]{135}+\sqrt[3]{40}=\sqrt[3]{125.5}-\sqrt[3]{27.5}+\sqrt[3]{8.5}$$
$$=\sqrt[3]{5^3.5}-\sqrt[3]{3^3.5}+\sqrt[3]{2^3.5}$$
$$=5\sqrt[3]{5}-3\sqrt[3]{5}+2\sqrt[3]{5}=4\sqrt[3]{5}.$$

উদা. 4. $\sqrt[3]{9}$ ও $\sqrt[4]{20}$-এর মধ্যে মানগত তুলনা কর।

$$\sqrt[3]{9}=9^{\frac{1}{3}}=9^{\frac{4}{12}}=(9^4)^{\frac{1}{12}}=\sqrt[12]{6561}.$$
$$\sqrt[4]{20}=(20)^{\frac{1}{4}}=(20)^{\frac{3}{12}}=(20^3)^{\frac{1}{12}}=\sqrt[12]{8000}.$$
$$\therefore\ \sqrt[4]{20}>\sqrt[3]{9}.$$

উদা. 5. $4\sqrt[4]{5}$-কে $6\sqrt[6]{8}$ দ্বারা গুণ কর।

$$4\sqrt[4]{5}\times 6\sqrt[6]{8}=4\times 6\times 5^{\frac{1}{4}}\times 8^{\frac{1}{6}}=24\times 5^{\frac{3}{12}}\times 8^{\frac{2}{12}}$$
$$=24\sqrt[12]{5^3\times 8^2}=24\sqrt[12]{125\times 64}$$
$$=24\sqrt[12]{8000}.$$

উদা. 6. $\sqrt[6]{4}$-কে $\sqrt[4]{6}$ দ্বারা ভাগ কর।

$$\sqrt[6]{4}\div\sqrt[4]{6}=4^{\frac{1}{6}}\div 6^{\frac{1}{4}}=4^{\frac{2}{12}}\div 6^{\frac{3}{12}}$$
$$=\left(\frac{4^2}{6^3}\right)^{\frac{1}{12}}=\left(\frac{2}{27}\right)^{\frac{1}{12}}=\sqrt[12]{\frac{2}{27}}.$$

উদা. 7. $\sqrt{5}\div 3\sqrt{3}$-কে মূলদ হরবিশিষ্ট ভগ্নাংশে প্রকাশ কর :

$$\sqrt{5}\div 3\sqrt{3}=\frac{\sqrt{5}}{3\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{5}\times\sqrt{3}}{3\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{15}}{3.3}=\frac{\sqrt{15}}{9}.$$

প্রশ্নমালা 4

1. পূর্ণ করণীর আকারে প্রকাশ কর (Express as a complete surd) :

(i) $3\sqrt{5}$. (ii) $2\sqrt[3]{3}$. (iii) $2\sqrt[4]{6}$. (iv) $4\sqrt[4]{5}$.
(v) $a\sqrt[n]{b}$. (vi) $x^3\sqrt[a]{y}$. (vii) $a^4\sqrt[5]{b^2}$.

2. মিশ্র করণীর আকারে প্রকাশ কর (Express as a compound surd) :

(i) $\sqrt{18}$. (ii) $\sqrt{80}$. (iii) $\sqrt[3]{250}$. (iv) $\sqrt[5]{128}$.
(v) $\sqrt[4]{405}$. (vi) $\sqrt[3]{1372}$. (vii) $\sqrt[4]{1875}$. (viii) $\sqrt[3]{a^6b}$.
(ix) $\sqrt[3]{-2560}$. (x) $\sqrt[3]{-192a^3b^4}$. (xi) $\sqrt[3]{500a^7x^4}$.

3. সরল কর :

(i) $\sqrt{125}+\sqrt{20}$. (ii) $\sqrt[3]{128}-\sqrt[3]{54}$.

(iii) $\sqrt[4]{80}+\sqrt[4]{405}$. (iv) $2\sqrt{27}-\sqrt{75}+\sqrt{12}$.

(v) $2\sqrt{405}-3\sqrt{125}+\sqrt{45}$. (vi) $4\sqrt[3]{192}-4\sqrt[3]{375}+2\sqrt[3]{24}$.

(vii) $3\sqrt[3]{40}+2\sqrt[3]{625}-4\sqrt[3]{320}$. (viii) $\sqrt{45x^3}+\sqrt{80x^3}+\sqrt{5xy^2}$.

(ix) $x\sqrt[3]{x^3a}+y\sqrt[3]{-8y^3a}-z\sqrt[3]{-27z^3a}$.

(x) $2\sqrt[4]{32a^4x}+3\sqrt[4]{512a^4x}-4a\sqrt[4]{162x}$.

4. সমমূলীয় করণীতে রূপান্তরিত কর :

(i) $\sqrt{3}$ ও $\sqrt[3]{2}$. (ii) $\sqrt[3]{4}$ ও $\sqrt[4]{5}$. (iii) $\sqrt[5]{2}$ ও $\sqrt[3]{3}$.

(iv) $\sqrt[4]{3}$ ও $\sqrt[6]{5}$. (v) $\sqrt[6]{4}$ ও $\sqrt[8]{6}$.

5. কোন্‌টি বৃহত্তর ?

(i) $\sqrt{2}$ অথবা $\sqrt[3]{3}$? (ii) $\sqrt[3]{3}$ অথবা $\sqrt[4]{4}$? (iii) $\sqrt[3]{6}$ অথবা $\sqrt[4]{10}$?

6. অধঃক্রমিক মান অনুসারে সাজাও :

(i) $\sqrt[4]{6}$, $\sqrt{2}$ এবং $\sqrt[3]{4}$. (ii) $\sqrt[4]{3}$, $\sqrt[8]{10}$ এবং $\sqrt[12]{25}$.

সরল কর :

7. $\sqrt{5}\times\sqrt{10}$. **8.** $\sqrt{27}\times\sqrt{3}$. **9.** $\sqrt{20}\times\sqrt{45}$.

10. $\sqrt[3]{5}\times\sqrt[3]{25}$. **11.** $\sqrt[3]{6ax}\times\sqrt[3]{27a^2x^3}$. **12.** $\sqrt[3]{2}\times\sqrt{6}$.

13. $\sqrt{2}\times\sqrt[3]{6}$. **14.** $\sqrt[3]{9}\times\sqrt{27}$. **15.** $\sqrt[6]{2}\times\sqrt[9]{2}$.

16. $5\sqrt{8}\times2\sqrt{6}$. **17.** $4\sqrt[3]{72}\times5\sqrt[3]{576}$.

18. $7\sqrt[3]{8a^3x^2}\times5\sqrt[3]{27b^3x^2}$. **19.** $8\sqrt{10}\div4\sqrt{15}$.

20. $\sqrt[3]{36}\div\sqrt[3]{48}$. **21.** $\sqrt[9]{8}\div\sqrt[6]{6}$.

$\sqrt{2}=1{\cdot}414$, $\sqrt{3}=1{\cdot}732$ এবং $\sqrt{5}=2{\cdot}236$ হইলে, তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত নিম্নলিখিত রাশিগুলির মান নির্ণয় কর :

22. $\sqrt{2}\div\sqrt{6}$. **23.** $\sqrt{72}\div\sqrt{40}$.

24. $\sqrt{275}\div\sqrt{22}$. **25.** $10\sqrt{108}\div\sqrt{15}$.

2·3. সরল (simple) ও যৌগিক (compound) করণী : একটি মাত্র পদবিশিষ্ট করণীকে **সরল** এবং যোগ-বিয়োগ চিহ্নদ্বারা যুক্ত একাধিক পদবিশিষ্ট করণীকে **যৌগিক** করণী বলে।

দুই বা ততোধিক যৌগিক করণীর যোগ-বিয়োগ, গুণ-ভাগ সাধারণ বৈজিক রাশির জন্য বিহিত নিয়ম অনুসারে সম্পন্ন হয়।

উদা. 1. সরল কর : $(\sqrt{27}+\sqrt[3]{16})+(2\sqrt{3}-\sqrt[3]{2})-(\sqrt{75}-\sqrt[3]{54})$.

$$(\sqrt{27}+\sqrt[3]{16})+(2\sqrt{3}-\sqrt[3]{2})-(\sqrt{75}-\sqrt[3]{54})$$
$$=\sqrt{3^2.3}+\sqrt[3]{2^3.2}+2\sqrt{3}-\sqrt[3]{2}-\sqrt{5^2.3}+\sqrt[3]{3^3 2}$$
$$=3\sqrt{3}+2\sqrt[3]{2}+2\sqrt{3}-\sqrt[3]{2}-5\sqrt{3}+3\sqrt[3]{2}$$
$$=5\sqrt{3}-5\sqrt{3}+(\sqrt[3]{2}+3\sqrt[3]{2})$$
$$=4\sqrt[3]{2}.$$

উদা. 2. $(3\sqrt{x}+2\sqrt{3})$-কে $(\sqrt{x}-\sqrt{3})$ দ্বারা গুণ কর।

$$(3\sqrt{x}+2\sqrt{3})(\sqrt{x}-\sqrt{3})=3\sqrt{x}.\sqrt{x}+2\sqrt{3}.\sqrt{x}-3\sqrt{x}.\sqrt{3}-2\sqrt{3}.\sqrt{3}$$
$$=3x+2\sqrt{3x}-3\sqrt{3x}-6$$
$$=3x-\sqrt{3x}-6.$$

উদা. 3. $\sqrt{3a+x}+\sqrt{3a-x}$-এর বর্গ নির্ণয় কর।

$$(\sqrt{3a+x}+\sqrt{3a-x})^2=(\sqrt{3a+x})^2+(\sqrt{3a-x})^2+2\sqrt{3a+x}.\sqrt{3a-x}$$
$$=3a+x+3a-x+2\sqrt{(3a+x)(3a-x)}$$
$$=6a+2\sqrt{9a^2-x^2}.$$

উদা. 4. $(a+b)$-কে $(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})$ দ্বারা ভাগ কর।

$$(a+b)\div(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})=\frac{(\sqrt[3]{a})^3+(\sqrt[3]{b})^3}{\{(\sqrt[3]{a})^2-\sqrt[3]{a}.\sqrt[3]{b}+(\sqrt[3]{b})^2\}}$$
$$=\frac{(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b})\{(\sqrt[3]{a})^2-\sqrt[3]{a}.\sqrt[3]{b}+(\sqrt[3]{b})^2\}}{\{(\sqrt[3]{a})^2-\sqrt[3]{a}.\sqrt[3]{b}+(\sqrt[3]{b})^2\}}$$
$$=\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}.$$

2·4. করণী-নিরসন (Rationalisation) : একটি সরল করণীকে ঐ করণী দিয়াই একবার বা পর পর কয়েকবার গুণ করিলেই করণীটি অখণ্ড সংখ্যায় পরিণত হয়। উদাহরণস্বরূপ $\sqrt{5}$-এর করণী-নিরসন করিতে হইলে $\sqrt{5}$ দিয়া উহাকে গুণ করিতে হইবে যাহাতে $\sqrt{5}\times\sqrt{5}=5$ হয়। অনুরূপে $\sqrt[3]{x}$-এর করণী-নিরসন করিতে হইলে উহাকে পর পর দুইবার $\sqrt[3]{x}$ দিয়া গুণ করিতে হইবে যাহাতে $\sqrt[3]{x}\times\sqrt[3]{x}\times\sqrt[3]{x}=x$ হয়।

যৌগিক করণীর বেলায় করণী-নিরসন সহজসাধ্য নহে, কখনও কখনও উহা অসাধ্য। কেবল দ্বিপদ ও দ্বিঘাত করণীর বেলাতেই এই প্রক্রিয়া (অর্থাৎ করণী-নিরসন) সহজ এবং প্রয়োগের ক্ষেত্রে সুপ্রচলিত।

দুইটি দ্বিপদ দ্বিঘাত করণীর একটির পদ-দুইটি অপরটির পদ-দুইটির সহিত যখন এক ও অভিন্ন হয় এবং যখন একটি করণীর পদযুগল যোগ-চিহ্ন দ্বারা এবং অপর করণীটির

পদযুগল বিয়োগ-চিহ্নদ্বারা যুক্ত থাকে তখন করণী-দুইটির একটিকে আরেকটির **অনুবন্ধী** (conjugate) বা **পূরক** (complementary) করণী বলে। উদাহরণস্বরূপ $\sqrt{3}+\sqrt{2}$-এর অনুবন্ধী করণী $\sqrt{3}-\sqrt{2}$; $2\sqrt{5}-\sqrt{7}$-এর অনুবন্ধী করণী $2\sqrt{5}+\sqrt{7}$.

এখন, যেহেতু $(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})=(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2=3-2=1$.

এবং $(2\sqrt{5}-\sqrt{7})(2\sqrt{5}+\sqrt{7})=(2\sqrt{5})^2-(\sqrt{7})^2=20-7=13$,

ইহা স্পষ্ট বুঝা যায় যে একটি দ্বিঘাত দ্বিপদ-করণীকে উহার অনুবন্ধী করণী দিয়া গুণ করিলে করণী-নিরসন হয়। সেইজন্য অনুবন্ধী করণী হইল করণী-নিরসন উৎপাদক। এইরূপে কোন করণীকে অন্য কোনও একটি উপযুক্ত করণী দিয়া গুণ করিলে যদি করণী-নিরসন হয়, তবে পরবর্তী করণীকে **করণী-নিরসক উৎপাদক** বলে। পূর্ববর্তী উদাহরণে $\sqrt{5}$ যেমন $\sqrt{5}$-এর করণী-নিরসক, $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ তেমনি $\sqrt{3}+\sqrt{2}$-এর করণী-নিরসক উৎপাদক।

উদা. 1. $\sqrt{2}=1{\cdot}414$ হইলে, তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত $\dfrac{1+\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}$ -এর মান নির্ণয় কর।

$$\frac{1+\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}=\frac{(1+\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})}{(3-2\sqrt{2})(3+2\sqrt{3})}=\frac{3+3\sqrt{2}+2\sqrt{2}+4}{3^2-(2\sqrt{2})^2}$$

$$=\frac{7+5\sqrt{2}}{9-8}=7+5\sqrt{2}=7+5\times1{\cdot}414$$

$$=7+7{\cdot}070=14{\cdot}070.$$

উদা. 2. $\dfrac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}$-এর হরভাগের করণী-নিরসন কর।

$$\text{প্রদত্ত রাশি}=\frac{(\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2})^2}{(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2})(\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2})}$$

$$=\frac{(1+x^2)+(1-x^2)-2\sqrt{1-x^4}}{(1+x^2)-(1-x^2)}$$

$$=\frac{2-2\sqrt{1-x^4}}{2x^2}=\frac{1-\sqrt{1-x^4}}{x^2}.$$

উদা. 3. সরল কর : $\dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{6}}-\dfrac{4\sqrt{6}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}+\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$.

$$\text{প্রদত্ত রাশিমালার প্রথম পদ}=\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}(1+\sqrt{2})}=\frac{\sqrt{3}.\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{6}(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}=2\sqrt{3}-\sqrt{6}.$$

দ্বিতীয় পদ $= \dfrac{4\sqrt{6}}{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)} = \dfrac{4\sqrt{2}\sqrt{3}}{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)} = \dfrac{4\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} = \dfrac{4\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}$

$= \dfrac{12-4\sqrt{3}}{3-1} = \dfrac{2(6-2\sqrt{3})}{2} = 6-2\sqrt{3}.$

তৃতীয় পদ $= \dfrac{\sqrt{6}(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})} = \dfrac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{3-2} = 3\sqrt{2}-2\sqrt{3}.$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশিমালা $=(2\sqrt{3}-\sqrt{6})-(6-2\sqrt{3})+(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})$

$=2\sqrt{3}-\sqrt{6}-6+2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-2\sqrt{3}$

$=2\sqrt{3}-\sqrt{6}-6+3\sqrt{2}.$

প্রশ্নমালা 5

1. যোগ কর :

(i) $(5\sqrt{3}-2\sqrt{12})$-এর সহিত $(\sqrt{50}-\sqrt{32})$-কে।

(ii) $(\sqrt[3]{24}-\sqrt[5]{64})$-এর সহিত $(3\sqrt[5]{2}-2\sqrt[3]{3})$-কে।

2. $(2\sqrt[4]{2}+3\sqrt[3]{2})$ হইতে $(\sqrt[4]{32}+\sqrt[3]{16})$-কে বিয়োগ কর।

3. গুণ কর :

(i) $(a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}})$-কে $(a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}})$ দ্বারা।

(ii) $(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{48})$-কে $(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3})$ দ্বারা।

4. ভাগ কর :

(i) $(a\sqrt{b}-b\sqrt{a})$-কে $(\sqrt{a}-\sqrt{b})$ দ্বারা।

(ii) $(\sqrt[4]{x^3}-\sqrt[4]{y^3})$-কে $(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt[4]{xy})$ দ্বারা।

5. বর্গ নির্ণয় কর :

(i) $(2\sqrt{5}+3\sqrt{7})$-এর। (ii) $(\sqrt{a^2+2b^2}-\sqrt{a^2-2b^2})$-এর।

6. মূলদ হরবিশিষ্ট তুল্য ভগ্নাংশে পরিবর্তিত কর :

(i) $\dfrac{5\sqrt{3}+\sqrt{7}}{4\sqrt{3}+2\sqrt{7}}$. (ii) $\dfrac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}$. (iii) $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$.

7. $\sqrt{2}=1\cdot414$, $\sqrt{3}=1\cdot732$ এবং $\sqrt{5}=2\cdot236$ হইলে, নিম্নলিখিত রাশিগুলির তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত মান নির্ণয় কর :

(i) $\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$. (ii) $\dfrac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$. (iii) $\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{4+\sqrt{15}}$.

8. সরল কর :

$\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}+\dfrac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}$.

9. $\dfrac{15}{\sqrt{10}+\sqrt{20}+\sqrt{40}-\sqrt{5}-\sqrt{80}}$.

10. $\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)(2-\sqrt{3})}{(\sqrt{2}-1)(3\sqrt{3}-5)(2+\sqrt{2})}$.

11. $(3+2\sqrt{2})^{-3}+(3-2\sqrt{2})^{-3}$.

12. $\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}-\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}$.

13. $\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}+\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}$.

হরের করণী-নিরসন কর :

14. $\frac{1}{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}}$. 15. $\frac{1}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{3}}$.

2·5. কোন মূলদ রাশির বর্গমূল কখনও একটি মূলদ রাশি এবং একটি দ্বিঘাত করণীর সমষ্টি বা অন্তরফলের সমান হইতে পারে না।

সম্ভব হইলে, ধরা যাক, $\sqrt{n}=a+\sqrt{m}$.

তাহা হইলে, উভয় পক্ষের বর্গ করিয়া,

$$n=a^2+m+2a\sqrt{m},$$

সুতরাং, $\sqrt{m}=\frac{n-a^2-m}{2a}$.

অতএব, একটি অমূলদ রাশি একটি মূলদ রাশির সমান ; কিন্তু তাহা অসম্ভব।

2·6. a ও x দুই মূলদ রাশি এবং $\sqrt{b}$ ও $\sqrt{y}$ দুই অমূলদ রাশি যদি পরস্পরের সহিত এরূপভাবে সম্পর্কিত হয় যে, $a+\sqrt{b}=x+\sqrt{y}$, তাহা হইলে $a=x$ এবং $b=y$ হইবে।

ধরা যাক, a ও x সমান নহে, এবং $a=x+m$;

তাহা হইলে, প্রদত্ত শর্তানুসারে, $x+m+\sqrt{b}=x+\sqrt{y}$;

$$\therefore \quad m+\sqrt{b}=\sqrt{y}.$$

অর্থাৎ $\sqrt{y}$, এই দ্বিঘাত করণীটি একটি মূলদ ও একটি অমূলদ রাশির সমষ্টির সমান ; কিন্তু ইহা অসম্ভব।

সুতরাং, $a=x$; অতএব, $\sqrt{b}=\sqrt{y}$, অর্থাৎ $b=y$.

টীকা। বিশেষরূপে লক্ষ্য করিবার বিষয় এই যে, $\sqrt{b}$ ও $\sqrt{y}$ যথার্থ অমূলদ রাশি হইলেই উপরিউক্ত সিদ্ধান্ত সত্য। উদাহরণস্বরূপ, $5+\sqrt{9}=3+\sqrt{25}$ একটি অভেদ ; কিন্তু ইহা হইতে $5=3$ এবং $\sqrt{9}=\sqrt{25}$, এইরূপ সিদ্ধান্ত করা উচিত নহে, কারণ $\sqrt{9}$ ও $\sqrt{25}$-এর কোনটিই প্রকৃতপক্ষে অমূলদ রাশি নহে।

2·7. দ্বিপদ করণীর বর্গমূলের আকার :

সূত্রানুসারে, $(\sqrt{x} \pm \sqrt{y})^2 = (x+y) \pm 2\sqrt{xy}$.

এখন, মূলদ অংশ $x+y=a$, এবং অমূলদ অংশ $2\sqrt{xy} = \sqrt{b}$ ধরিলে,

$$(\sqrt{x} \pm \sqrt{y})^2 = a \pm \sqrt{b}.$$

উভয় পক্ষের বর্গমূল লইলে, $\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{x} \pm \sqrt{y}$.

স্বতরাং, **একটি মূলদ ও একটি অমূলদ রাশির বৈজিক সমষ্টির বর্গমূল সর্বদা দুইটি করণীর বৈজিক সমষ্টি।**

2·8. $\sqrt{b}$ একটি করণী হইলে, $a+\sqrt{b}$-এর বর্গমূল নির্ণয় :

ধরা যাক, $\sqrt{a+\sqrt{b}} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$.

তাহা হইলে, উভয় পক্ষের বর্গ লইয়া, $a+\sqrt{b} = x+y+2\sqrt{xy}$.

অতএব, অনুচ্ছেদ 2·6-এর নিয়মানুসারে

$$\left.\begin{array}{r} a = x+y \\ \text{এবং} \quad \sqrt{b} = 2\sqrt{xy} \end{array}\right\} \qquad \cdots \qquad \cdots \quad (1)$$

$\therefore \quad a^2 - b = (x+y)^2 - 4xy = (x-y)^2$;

$\therefore \quad \sqrt{a^2-b} = x - y$.

$$\left.\begin{array}{l} \text{স্বতরাং, } x+y = a \\ \text{এবং} \quad x-y = \sqrt{a^2-b} \end{array}\right\}$$

অতএব, যোগ ও বিয়োগ করিয়া,

$$2x = a + \sqrt{a^2-b}, \text{ এবং } 2y = a - \sqrt{a^2-b} ;$$

$\therefore \quad x = \frac{1}{2}(a+\sqrt{a^2-b})$, এবং $y = \frac{1}{2}(a-\sqrt{a^2-b})$.

$\therefore \quad \sqrt{a+\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{1}{2}(a+\sqrt{a^2-b})} + \sqrt{\frac{1}{2}(a-\sqrt{a^2-b})}$.

টীকা। x ও y-এর উপরিপ্রদত্ত মান হইতে দেখা যায় যে, $\sqrt{a^2-b}$ একটি মূলদ রাশি না হইলে, নির্ণীত বর্গমূলসূচক রাশি প্রদত্ত রাশি অপেক্ষা জটিলতর। কাজেই a^2-b এক পূর্ণবর্গ না হইলে, উপরিউক্ত নিয়মের বিশেষ কোন কার্যকারিতা নাই।

অনুসিদ্ধান্ত। (1)-চিহ্নিত সম্বন্ধ-দুইটি হইতে স্পষ্টতঃ দেখা যায় যে,

$$a - \sqrt{b} = x + y - 2\sqrt{xy} = (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 ;$$

$$\therefore \quad \sqrt{a-\sqrt{b}} = \sqrt{x} - \sqrt{y}.$$

অতএব, $\boldsymbol{\sqrt{a+\sqrt{b}} = \sqrt{x} + \sqrt{y}}$ হইলে, $\boldsymbol{\sqrt{a-\sqrt{b}} = \sqrt{x} - \sqrt{y}}$.

উদা 1. $19-8\sqrt{3}$-এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

$\sqrt{19-8\sqrt{3}}=\sqrt{x}-\sqrt{y}$ ধরিলে,

$19-8\sqrt{3}=x+y-2\sqrt{xy}$.

$\therefore \quad x+y=19 \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$

এবং $\quad 2\sqrt{xy}=8\sqrt{3} \quad \cdots \quad \cdots \quad (2)$

আবার, $x-y=\sqrt{(x+y)^2-4xy}$

$=\sqrt{19^2-(8\sqrt{3})^2}=\sqrt{361-192}=\sqrt{169}=13 \qquad (3)$

$\therefore$ (1) ও (3) হইতে, $x=16, y=3$.

অতএব, নির্ণেয় বর্গমূল $=\sqrt{16}-\sqrt{3}=4-\sqrt{3}$.

উদা. 2. $16-5\sqrt{7}$-এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

নির্ণেয় বর্গমূল $=\sqrt{16-5\sqrt{7}}=\sqrt{\frac{1}{2}(32-2.5\sqrt{7})}=\frac{\sqrt{5^2+(\sqrt{7})^2-2.5.\sqrt{7}}}{\sqrt{2}}$

$$=\frac{\sqrt{(5-\sqrt{7})^2}}{\sqrt{2}}=\frac{5-\sqrt{7}}{\sqrt{2}}=\frac{5}{2}\sqrt{2}-\sqrt{\frac{7}{2}}.$$

টীকা। এখানে লক্ষণীয় যে, 2·8 অনুচ্ছেদের পদ্ধতিতে না কষিয়া প্রদত্ত রাশিমালাকে একটি পূর্ণবর্গের আকারে রূপান্তরিত করিয়া মূল আকর্ষণ করা হইল। ইহাই বর্গমূল নির্ণয়ের সহজতম পদ্ধতি।

উদা. 3. $\sqrt{27}+\sqrt{15}$-এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

$$\sqrt{27}+\sqrt{15}=3\sqrt{3}+\sqrt{3}.\sqrt{5}=\sqrt{3}(3+\sqrt{5}).$$

সুতরাং, $\sqrt{\sqrt{27}+\sqrt{15}}=\sqrt[4]{3}.\sqrt{3+\sqrt{5}}$

$=\sqrt[4]{3}\sqrt{\frac{1}{2}(6+2\sqrt{5})}$

$=\sqrt[4]{3}\sqrt{\frac{1}{2}(1^2+(\sqrt{5})^2+2.1.\sqrt{5})}$

$=\sqrt[4]{3}\sqrt{\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})^2}$

$=\sqrt[4]{3}\frac{(1+\sqrt{5})}{\sqrt{2}}$

$=\sqrt[4]{3}(\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{\frac{5}{2}})$.

উদা. 4. $2x+\sqrt{3x^2-2x-1}$-এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

$2x+\sqrt{3x^2-2x-1}=2x+\sqrt{3x^2-3x+x-1}$

$=2x+\sqrt{3x(x-1)+1(x-1)}=2x+\sqrt{(3x+1)(x-1)}$

$=2x+2.\frac{1}{2}\sqrt{(3x+1)(x-1)}=2x+2\sqrt{\frac{(3x+1)}{2}.\frac{(x-1)}{2}}$

$$=\frac{(3x+1)+(x-1)}{2}+2\sqrt{\left(\frac{3x+1}{2}\right)\left(\frac{x-1}{2}\right)}$$

$$\left[\because\ \frac{(3x+1)+(x-1)}{2}=\frac{4x}{2}=2x\right]$$

$$=\left(\sqrt{\frac{3x+1}{2}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{x-1}{2}}\right)^2+2\cdot\sqrt{\frac{3x+1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{x-1}{2}}$$

$$=\left(\sqrt{\frac{3x+1}{2}}+\sqrt{\frac{x-1}{2}}\right)^2.$$

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $=\sqrt{\frac{3x+1}{2}}+\sqrt{\frac{x-1}{2}}$

$$=\frac{\sqrt{3x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3x+1}+\sqrt{x-1})}{2}.$$

টীকা। লক্ষণীয় যে, এই পদ্ধতিতে মূল চিহ্নের নীচেকার রাশিমালাকে প্রথমে দুইটি উৎপাদকে বিশ্লেষণ করা হইয়াছে। তাহার পর অমূলদ পদটিকে $2ab$-এর আকারে রূপান্তরিত করা হইয়াছে। ইহা হইতে a ও b-এর মান স্থির করিয়া মূলদ অংশটিকে ভাঙিয়া a^2+b^2-এর আকারে লিখা হইল। ফলে সমগ্র রাশিমালা a^2+b^2+2ab রূপ ধারণ করিল এবং তাহা হইতে অতি সহজে $(a+b)$ আকারের বর্গমূলটি বাহির হইয়া পড়িল।

উদা. 5. $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ হইলে, $\frac{1+x}{1+\sqrt{1+x}}+\frac{1-x}{1-\sqrt{1-x}}$-এর মান নির্ণয় কর।

এখন, $1+x=1+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{2+\sqrt{3}}{2}=\frac{4+2\sqrt{3}}{4}=\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)^2,$

এবং $1-x=1-\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{2-\sqrt{3}}{2}=\frac{4-2\sqrt{3}}{4}=\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2.$

সুতরাং, প্রদত্ত রাশিমালা

$$=\frac{\frac{1}{2}(2+\sqrt{3})}{1+\frac{1}{2}(\sqrt{3}+1)}+\frac{\frac{1}{2}(2-\sqrt{3})}{1-\frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)}=\frac{2+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}+\frac{2-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}$$

$$=\frac{(2+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})(3+\sqrt{3})}{(3+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})}$$

$$=\frac{(6+\sqrt{3}-3)+(6-\sqrt{3}-3)}{9-3}=\frac{6}{6}=1.$$

প্রশ্নমালা 6

বর্গমূল নির্ণয় কর (Find the square root of) :

1. $4-2\sqrt{3}$. 2. $7+4\sqrt{3}$. 3. $11-6\sqrt{2}$.
4. $8+2\sqrt{15}$. 5. $14-6\sqrt{5}$. 6. $28+10\sqrt{3}$.
7. $21-8\sqrt{5}$. 8. $17+12\sqrt{2}$. 9. $41+12\sqrt{5}$.
10. $37-20\sqrt{3}$. 11. $31+4\sqrt{21}$. 12. $73-12\sqrt{35}$.
13. $47+4\sqrt{33}$. 14. $4-\sqrt{7}$. 15. $6-\sqrt{35}$.
16. $\sqrt{18}-\sqrt{16}$. 17. $\sqrt{32}-\sqrt{24}$. 18. $\sqrt{27}+\sqrt{24}$.
19. $5\sqrt{5}+\sqrt{120}$.

20. সরল কর : $\dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\dfrac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}$.

21. $x=\dfrac{2ab}{b^2+1}$ হইলে, $\dfrac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}$-এর মান নির্ণয় কর।

বর্গমূল নির্ণয় কর :

22. $a^2+2x\sqrt{a^2-x^2}$. 23. $2a+2\sqrt{a^2-b^2}$.
24. $a+x+\sqrt{2ax+x^2}$. 25. $2x-1+2\sqrt{x^2-x-6}$.
26. $x+y+z+2\sqrt{xz+yz}$.

2·9. দ্বিপদ দ্বিঘাত করণীর ঘনমূল নির্ণয় :

যদি $\sqrt[3]{a+\sqrt{b}}=x+\sqrt{y}$, তাহা হইলে $\sqrt[3]{a-\sqrt{b}}=x-\sqrt{y}$.

যেহেতু, $\sqrt[3]{a+\sqrt{b}}=x+\sqrt{y}$.

উভয় পক্ষের ঘন করিয়া দেখা যায় যে, $a+\sqrt{b}=x^3+3x^2\sqrt{y}+3xy+y\sqrt{y}$.

অতএব, মূলদ ও অমূলদ অংশের সমতা রক্ষা করিয়া দেখা যায় যে,

$$a=x^3+3xy$$
এবং
$$\sqrt{b}=3x^2\sqrt{y}+y\sqrt{y}$$

অতএব, $a-\sqrt{b}=x^3-3x^2\sqrt{y}+3xy-y\sqrt{y}$.

$\therefore\ \sqrt[3]{a-\sqrt{b}}=x-\sqrt{y}$.

অনুসিদ্ধান্ত। বিপরীতক্রমে, যদি $\sqrt[3]{a-\sqrt{b}}=x-\sqrt{y}$, তাহা হইলে $\sqrt[3]{a+\sqrt{b}}=x+\sqrt{y}$.

উদা. 1. $38+17\sqrt{5}$-এর ঘনমূল নির্ণয় কর।

ধর, $\sqrt[3]{38+17\sqrt{5}}=x+\sqrt{y}$.

তাহা হইলে $\sqrt[3]{38-17\sqrt{5}}=x-\sqrt{y}$.

অতএব, গুণন-প্রক্রিয়া দ্বারা,

$$x^2-y=\sqrt[3]{1444-1445}=\sqrt[3]{-1}=-1. \quad [\because (-1)^3=-1].$$

পুনরায়, যেহেতু $\sqrt[3]{38+17\sqrt{5}}=x+\sqrt{y}$.

$\therefore\ 38+17\sqrt{5}=x^3+3x^2\sqrt{y}+3xy+y\sqrt{y}, \quad \therefore\ 38=x^3+3xy.$

এইরূপে, দেখা যায়, $\left.\begin{aligned} x^3+3xy &= 38 \\ \text{এবং}\quad x^2-y &= -1 \end{aligned}\right\}$

বা $y=x^2+1$.

অতএব, $x^3+3x(x^2+1)=38$, অথবা, $4x^3+3x=38$,

পরীক্ষা দ্বারা দেখা যায়, $x=2$, এবং $y=x^2+1=5$.

অতএব, নির্ণেয় ঘনমূল $=2+\sqrt{5}$.

টীকা। x^2-y একটি মূলদ রাশি না হইলে, উপরিউক্ত নিয়মের বিশেষ কোন কার্যকারিতা নাই।

উদা. 2. $21\sqrt{6}-23\sqrt{5}$-এর ঘনমূল নির্ণয় কর।

$$21\sqrt{6}-23\sqrt{5}=6\sqrt{6}\left(\frac{21}{6}-\frac{23\sqrt{5}}{6\sqrt{6}}\right)=(\sqrt{6})^3\left(\tfrac{7}{2}-\tfrac{23}{6}\sqrt{\tfrac{5}{6}}\right).$$

$\therefore\ \sqrt[3]{21\sqrt{6}-23\sqrt{5}}=\sqrt{6}\,\sqrt[3]{\tfrac{7}{2}-\tfrac{23}{6}\sqrt{\tfrac{5}{6}}}$.

ধর, $\sqrt[3]{\tfrac{7}{2}-\tfrac{23}{6}\sqrt{\tfrac{5}{6}}}=x-\sqrt{y}$,

তাহা হইলে $\sqrt[3]{\tfrac{7}{2}+\tfrac{23}{6}\sqrt{\tfrac{5}{6}}}=x+\sqrt{y}$.

অতএব, $x^2-y=\sqrt[3]{\tfrac{49}{4}-\tfrac{2645}{216}}=\sqrt[3]{\tfrac{1}{216}}=\tfrac{1}{6}$, ... (1)

এবং $\tfrac{7}{2}-\tfrac{23}{6}\sqrt{\tfrac{5}{6}}=x^3-3x^2\sqrt{y}+3xy-y\sqrt{y}$.

$\therefore\ x^3+3xy=\tfrac{7}{2}$. ... ... (2)

অতএব, (1) ও (2) হইতে দেখা যায় যে, $x^3+3x(x^2-\tfrac{1}{6})=\tfrac{7}{2}$;

অথবা, $8x^3-x=7$.

পরীক্ষা দ্বারা দেখা যায় যে, $x=1$, এবং $\therefore\ y=\tfrac{5}{6}$.

এইরূপে, $\sqrt[3]{\tfrac{7}{2}-\tfrac{23}{6}\sqrt{\tfrac{5}{6}}}=1-\sqrt{\tfrac{5}{6}}$;

এবং $\therefore$ নির্ণেয় ঘনমূল $=\sqrt{6}(1-\sqrt{\tfrac{5}{6}})=\sqrt{6}-\sqrt{5}$.

প্রশ্নমালা 7

ঘনমূল নির্ণয় কর (Find the cube root of) :

1. $19+9\sqrt{6}$. 2. $26-15\sqrt{3}$. 3. $11\sqrt{5}+17\sqrt{2}$.

4. $99\sqrt{2}-59\sqrt{5}$. 5. $264\sqrt{3}+150\sqrt{6}$.

2·10. বিবিধ উদাহরণ :

উদা. 1. $6+\sqrt{12}-\sqrt{24}-\sqrt{8}$-এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

মনে কর, $\sqrt{6+\sqrt{12}-\overline{24}-\sqrt{8}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{z}$.

তাহা হইলে দেখা যায় যে,

$$6+\sqrt{12}-\sqrt{24}-\sqrt{8}=x+y+z+2\sqrt{xy}-2\sqrt{yz}-2\sqrt{zx}.$$

x, y, z যদি এরূপ হয় যে,

$$\left.\begin{aligned}2\sqrt{xy}&=\sqrt{12}\\2\sqrt{yz}&=\sqrt{24}\\2\sqrt{zx}&=\sqrt{8}\end{aligned}\right\}$$ এবং $x+y+z=6$, তাহা হইলে, নির্ণেয় বর্গমূল বাহির হইবে।

প্রথম তিনটি সমীকরণ হইতে দেখা যায় যে,

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{xy}&=\sqrt{3} &\cdots (1)\\\sqrt{yz}&=\sqrt{2}.\sqrt{3} &\cdots (2)\\\sqrt{xz}&=\sqrt{2} &\cdots (3)\end{aligned}\right\}$$ $\therefore$ গুণন-প্রক্রিয়া দ্বারা $xyz=2.3=6$. $\therefore\ \sqrt{xyz}=\sqrt{6}.\ \cdots (4)$

(4)-কে (2), (3) এবং (1) দ্বারা যথাক্রমে ভাগ করিয়া,

$$\sqrt{x}=\sqrt{1},\ \sqrt{y}=\sqrt{3},\ \sqrt{z}=\sqrt{2};$$

এবং x, y ও z-এর এই মান, $x+y+z=6$, সমীকরণকে সমাধান করে।

অতএব, নির্ণেয় বর্গমূল $=1+\sqrt{3}-\sqrt{2}$.

টীকা। এই উদাহরণ হইতে সহজেই বহুপদ রাশির বর্গমূল নির্ণয় করিবার পদ্ধতি অনুমান করা যায়।

বিকল্প পদ্ধতি : $\sqrt{6+\sqrt{12}-\sqrt{24}-\sqrt{8}}=\sqrt{6+2\sqrt{3}-2.\sqrt{3}.\sqrt{2}-2\sqrt{2}}$

$$=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2+(-\sqrt{2})^2+2.1.\sqrt{3}+2.\sqrt{3}.(-\sqrt{2})+2.(-\sqrt{2}).1}$$

$$=\sqrt{(1+\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}=1+\sqrt{3}-\sqrt{2}.$$

উদা. 2. মান নির্ণয় কর : $\sqrt[3]{a\sqrt{b\sqrt[3]{a\sqrt{b\cdots}}}}$ অসীম পর্যন্ত।

$\sqrt[3]{a\sqrt{b\sqrt[3]{a\sqrt{b\cdots}}}}$ অসীম পর্যন্ত $=k$ ধরিলে,

$k^3=a\sqrt{b\sqrt[3]{a\sqrt{b\cdots}}}$ অসীম পর্যন্ত ;

$(k^3)^2=a^2b\sqrt[3]{a\sqrt{b\sqrt[3]{a\sqrt{b\cdots}}}}$ অসীম পর্যন্ত।

$\therefore\ k^6=a^2bk,\quad \therefore\ k^5=a^2b.\quad \therefore\ k=\sqrt[5]{a^2b}.$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশির মান $=\sqrt[5]{a^2b}$.

উদা. 3. $x=\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$ এবং $y=\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$ হইলে, x^2+xy+y^2-এর মান নির্ণয় কর।

দেখা যায়, $x=\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}=(\sqrt{2}+1)^2$
এবং $y=\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}=(\sqrt{2}-1)^2$

সুতরাং $x+y=6$
এবং $xy=1$.

অতএব, $x^2+xy+y^2=(x+y)^2-xy=6^2-1=35.$

উদা. 4. $X=\sqrt[3]{r+\sqrt{r^2+q^3}}+\sqrt[3]{r-\sqrt{r^2+q^3}}$ হইলে, $X^3+3qX-2r$-এর মান নির্ণয় কর।

$\sqrt[3]{r+\sqrt{r^2+q^3}}$-এর পরিবর্তে a এবং $\sqrt[3]{r-\sqrt{r^2+q^3}}$-এর পরিবর্তে b ধরিয়া দেখা যায় যে, $X=a+b$.

$$\begin{aligned}X^3&=a^3+b^3+3ab(a+b)=a^3+b^3+3aa.X\\&=(r+\sqrt{r^2+q^3})+(r-\sqrt{r^2+q^3})+3\sqrt[3]{r^2-(r^2+q^3)}.X\\&=2r+3\sqrt[3]{-q^3}.X=2r-3qX.\end{aligned}$$

$\therefore\quad X^3+3qX-2r=0.$

উদা. 5. $(x+\sqrt{x^2-bc})(y+\sqrt{y^2-ca})(z+\sqrt{z^2-ab})$
$=(x-\sqrt{x^2-bc})(y-\sqrt{y^2-ca})(z-\sqrt{z^2-ab})$ হইলে, দেখাও যে উহাদের প্রত্যেকটি $=\pm abc$.

ধর, প্রদত্ত রাশিমালার প্রত্যেকটি রাশি $=K$, তাহা হইলে

$$K=(x+\sqrt{x^2-bc})(y+\sqrt{y^2-ca})(z+\sqrt{z^2-ab}),$$

এবং $K=(x-\sqrt{x^2-bc})(y-\sqrt{y^2-ca})(z-\sqrt{z^2-ab}).$

$$\therefore\quad K^2=\{x^2-(x^2-bc)\}\{y^2-(y^2-ca)\}\{z^2-(z^2-ab)\}$$
$$=bc.ca.ab=a^2b^2c^2.$$

$\therefore\quad K=\pm abc,$

অর্থাৎ, প্রত্যেকটি রাশি $=\pm abc.$

উদা. 6. $ax=\dfrac{2pq}{1+q^2}$ হইলে,

$$\frac{\sqrt{\frac{p}{a}+x}+\sqrt{\frac{p}{a}-x}}{\sqrt{\frac{p}{a}+x}-\sqrt{\frac{p}{a}-x}}$$-এর মান নির্ণয় কর।

$$\text{প্রদত্ত রাশি} = \frac{\left(\sqrt{\frac{p}{a}+x}+\sqrt{\frac{p}{a}-x}\right)^2}{\left(\frac{p}{a}+x\right)-\left(\frac{p}{a}-x\right)}$$

$$= \frac{\frac{2p}{a}+2\sqrt{\frac{p^2}{a^2}-x^2}}{2x} = \frac{p}{ax}+\sqrt{\frac{p^2}{a^2x^2}-1}.$$

এক্ষণে, যেহেতু, $ax = \frac{2pq}{1+q^2}$; $\therefore \frac{p}{ax} = \frac{1+q^2}{2q}$.

অতএব, প্রদত্ত রাশি

$$= \frac{1+q^2}{2q}+\sqrt{\frac{(1+q^2)^2}{4q^2}-1} = \frac{1+q^2}{2q}+\sqrt{\frac{1+q^4-2q^2}{4q^2}}$$

$$= \frac{1+q^2}{2q}+\frac{1-q^2}{2q} = \frac{2}{2q} = \frac{1}{q}.$$

উদা. 7. $\sqrt{(x-\sqrt{a^2-b^2})^2+y^2}+\sqrt{(x+\sqrt{a^2-b^2})^2+y^2} = 2a$ হইলে, দেখাও যে, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1.$

পক্ষান্তর করিয়া দেখা যায় যে,

$$\sqrt{(x-\sqrt{a^2-b^2})^2+y^2} = 2a-\sqrt{(x+\sqrt{a^2-b^2})^2+y^2}.$$

উভয় পক্ষের বর্গ লইয়া,

$$(x-\sqrt{a^2-b^2})^2+y^2 = 4a^2+(x+\sqrt{a^2-b^2})^2+y^2 - 4a\sqrt{(x+\sqrt{a^2-b^2})^2+y^2};$$

অথবা, $-2x\sqrt{a^2-b^2} = 4a^2+2x\sqrt{a^2-b^2}-4a\sqrt{(x+\sqrt{a^2-b^2})^2+y^2}$;

সুতরাং, পক্ষান্তর করিয়া,

$$4a\sqrt{(x+\sqrt{a^2-b^2})^2+y^2} = 4a^2+4x\sqrt{a^2-b^2}.$$

উভয় পক্ষকে সাধারণ গুণনীয়ক 4 দ্বারা ভাগ করিয়া, ভাগফলের বর্গ করিলে, দেখা যায় যে, $a^2(x+\sqrt{a^2-b^2})^2+a^2y^2 = a^4+x^2(a^2-b^2)+2a^2x\sqrt{a^2-b^2}$;

অথবা, $a^2(a^2-b^2)+a^2y^2 = a^4-b^2x^2$; অথবা, $b^2x^2+a^2y^2 = a^2b^2$.

অতএব, উভয় পক্ষকে a^2b^2 দ্বারা ভাগ করিয়া, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1.$

উদা. 8. সরল কর ঃ $\frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{18}-\sqrt{3+\sqrt{5}}} - \frac{\sqrt{10}+\sqrt{18}}{\sqrt{18}-\sqrt{3-\sqrt{5}}}.$

$$\sqrt{3+\sqrt{5}} = \sqrt{\tfrac{1}{2}(6+2\sqrt{5})}$$

$$=\frac{\sqrt{5+1+2\sqrt{5}}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{(\sqrt{5})^2+1^2+2.\sqrt{5}.1}}{\sqrt{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{(\sqrt{5}+1)^2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{2}}.$$

অনুরূপে, $\sqrt{3-\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{2}}.$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $=\dfrac{10\sqrt{2}}{\sqrt{18}-\dfrac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{2}}}-\dfrac{\sqrt{10}+\sqrt{18}}{\sqrt{18}-\dfrac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{2}}}$

$$=\frac{10\sqrt{2}.\sqrt{2}}{6-\sqrt{5}-1}-\frac{(\sqrt{10}+\sqrt{18})\sqrt{2}}{6-\sqrt{5}+1}$$

$$=\frac{20}{5-\sqrt{5}}-\frac{2\sqrt{5}+6}{7-\sqrt{5}}$$

$$=\frac{20(5+\sqrt{5})}{20}-\frac{(2\sqrt{5}+6)(7+\sqrt{5})}{44}$$

$$=5+\sqrt{5}-\frac{(14\sqrt{5}+42+10+6\sqrt{5})}{44}$$

$$=5+\sqrt{5}-\frac{\cancel{2}(10\sqrt{5}+26)}{\underset{22}{\cancel{44}}}=\frac{110+22\sqrt{5}-10\sqrt{5}-26}{22}$$

$$=\frac{84+12\sqrt{5}}{22}=\frac{12(7+\sqrt{5})}{22}=\frac{6(7+\sqrt{5})}{11}.$$

প্রশ্নমালা 8

বর্গমূল নির্ণয় কর (Find the square root of) :

1. $8+2\sqrt{2}+2\sqrt{5}+2\sqrt{10}$.
2. $10+2\sqrt{6}+2\sqrt{10}+2\sqrt{15}$.
3. $11+6\sqrt{2}+4\sqrt{3}+2\sqrt{6}$.
4. $21-4\sqrt{5}+8\sqrt{3}-4\sqrt{15}$.
5. $\sqrt{5}=2\cdot23607$ হইলে, (i) $\dfrac{\sqrt{3-\sqrt{5}}}{\sqrt{2}+\sqrt{7-3\sqrt{5}}}$ এবং

   (ii) $\dfrac{2\sqrt{8}\sqrt{3+\sqrt{5}}}{4+\sqrt{10}+\sqrt{2}}$-এর মান নির্ণয় কর।
6. $x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ হইলে, $\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$-এর মান নির্ণয় কর।
7. $x=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}}-\sqrt{\dfrac{b}{a}}\right)$ হইলে, $\dfrac{2a\sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}}$-এর মান নির্ণয় কর।

8. $\frac{4}{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3}+1}$-কে মূলদ হরবিশিষ্ট তুল্য ভগ্নাংশে পরিবর্তিত কর।

9. সরল কর : $(72-32\sqrt{5})^{-\frac{2}{3}}-(72+32\sqrt{5})^{-\frac{2}{3}}$.

10. $x=2+2^{\frac{2}{3}}+2^{\frac{1}{3}}$ হইলে, দেখাও যে, $x^3-6x^2+6x-2=0$.

11. $x=\frac{q-\sqrt{p^2-4q}}{q+\sqrt{p^2-4q}}$ হইলে, দেখাও যে,
$(q^2-p^2+4q)(x^2+1)-2(p^2+q^2-4q)x=0$. [C. U. 1927]

12. $x=\frac{\sqrt{a+2b}+\sqrt{a-2b}}{\sqrt{a+2b}-\sqrt{a-2b}}$ হইলে, দেখাও যে, $bx^2-ax+b=0$.
[C. U. 1935]

13. $x=\frac{1}{3-\sqrt{8}}$, $y=\frac{1}{3+\sqrt{8}}$ হইলে, $3x^2+23xy+3y^2$-এর মান নির্ণয় কর।

14. $x=\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$, $y=\frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$ হইলে, x^3+y^3-এর মান নির্ণয় কর।

15. $x=3^{\frac{1}{3}}+3^{-\frac{1}{3}}$ হইলে, দেখাও যে, $3x^3-9x-10=0$.

16. $a^2+2=3^{\frac{2}{3}}+3^{-\frac{2}{3}}$ হইলে, দেখাও যে, $3a^3+9a=8$.

17. $\sqrt{a\sqrt[3]{b\sqrt{a\sqrt[3]{b\cdots}}}}$ অসীম পর্যন্ত মান নির্ণয় কর।

18. $x=3-2\sqrt{2}$ হইলে, $\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}$-এর মান নির্ণয় কর।

19. সরল কর : $\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}$.

20. সরল কর :

$$\frac{7-2\sqrt{10}}{\sqrt{12}-\sqrt{19-4\sqrt{15}-2\sqrt{10}+4\sqrt{6}}}-\frac{7+2\sqrt{10}}{\sqrt{12}-\sqrt{19-4\sqrt{15}+2\sqrt{10}-4\sqrt{6}}}.$$

2·11. করণী-সংশ্লিষ্ট সমীকরণ :

উদা. 1. সমাধান কর : $\sqrt{x^2+11x+20}-\sqrt{x^2+5x-1}=3$.
[C. U. 1881]

পক্ষান্তর করিয়া, $\sqrt{x^2+11x+20}=3+\sqrt{x^2+5x-1}$.

উভয় পক্ষের বর্গ করিয়া,

$$x^2+11x+20=9+(x^2+5x-1)+6\sqrt{x^2+5x-1};$$

অথবা, $6x+12=6\sqrt{x^2+5x-1};$

অথবা, $x+2=\sqrt{x^2+5x-1}.$

$\therefore\quad x^2+4x+4=x^2+5x-1.$ সুতরাং $x=5.$

উদা. 2. সমাধান কর : $\dfrac{3x-1}{\sqrt{3x}+1}=1+\dfrac{\sqrt{3x}-1}{2}.$

$\therefore\quad 3x-1=(\sqrt{3x}+1)(\sqrt{3x}-1);\quad \therefore\quad \dfrac{3x-1}{\sqrt{3x}+1}=\sqrt{3x}-1.$

অতএব, প্রদত্ত সমীকরণ হইতে,

$$\sqrt{3x}-1=1+\frac{\sqrt{3x}-1}{2};$$

অথবা, $(\sqrt{3x}-1)(1-\frac{1}{2})=1$ [পক্ষান্তর করিয়া] ;

অথবা, $\dfrac{\sqrt{3x}-1}{2}=1;$ অথবা, $\sqrt{3x}-1=2;$

অথবা, $\sqrt{3x}=3;\quad \therefore\quad 3x=9;\quad \therefore\quad x=3.$

উদা. 3. সমাধান কর : $\sqrt[3]{a+x}+\sqrt[3]{a-x}=b.$

যেহেতু $(\sqrt[3]{a+x}+\sqrt[3]{a-x})^3$

$$=(a+x)+(a-x)+3\sqrt[3]{a^2-x^2}\{\sqrt[3]{a+x}+\sqrt[3]{a-x}\}$$

$$=2a+3\sqrt[3]{a^2-x^2}.b.$$

অতএব, সমীকরণটির উভয় পক্ষের ঘন করিয়া,

$$2a+3\sqrt[3]{a^2-x^2}.b=b^3;$$

অথবা, $3b\sqrt[3]{a^2-x^2}=b^3-2a;\quad \therefore\quad a^2-x^2=\left(\dfrac{b^3-2a}{3b}\right)^3.$

$\therefore\quad x^2=a^2-\left(\dfrac{b^3-2a}{3b}\right)^3;\quad \therefore\quad x=\sqrt{a^2-\left(\dfrac{b^3-2a}{3b}\right)^3}.$

উদা. 4. সমাধান কর : $\sqrt{2x^2+9}+\sqrt{2x^2-9}=9+3\sqrt{7}.$

এখন, $(2x^2+9)-(2x^2-9)=18$, একটি অভেদ (অর্থাৎ, x-এর যে-কোন মানের জন্যই উহার উভয় পক্ষের সমতা রক্ষিত হইবে), সুতরাং, প্রদত্ত সমীকরণোল্লিখিত x-এর মান (অর্থাৎ, সমীকরণের বীজ)-এর জন্যও উহার সমতা বজায় থাকিবে।

সুতরাং, নির্ণেয় বীজটি অবশ্যই নিম্নলিখিত সম্বন্ধ সিদ্ধ করিবে।

$$\frac{(2x^2+9)-(2x^2-9)}{\sqrt{2x^2+9}+\sqrt{2x^2-9}}=\frac{18}{9+3\sqrt{7}};$$

অথবা, $\sqrt{2x^2+9}-\sqrt{2x^2-9}=\frac{18(9-3\sqrt{7})}{81-63}=9-3\sqrt{7}.$

প্রদত্ত সমীকরণটিকে ইহার সহিত যোগ করিয়া,

$2\sqrt{2x^2+9}=18$; অথবা, $\sqrt{2x^2+9}=9$;

$\therefore \quad 2x^2+9=81$; $\quad \therefore \; x^2=36$; $\therefore \; x=\pm 6.$

উদা. 5. সমাধান কর :

$$\frac{x-8}{\sqrt{x+1}-3}+\frac{x-26}{\sqrt{x-1}+5}=\frac{4x-5}{\sqrt{4x-1}+2}.$$

$$\frac{x-8}{\sqrt{x+1}-3}=\frac{(x-8)(\sqrt{x+1}+3)}{(x+1)-9}=\sqrt{x+1}+3;$$

$$\frac{x-26}{\sqrt{x-1}+5}=\frac{(x-26)(\sqrt{x-1}-5)}{(x-1)-25}=\sqrt{x-1}-5;$$

$$\frac{4x-5}{\sqrt{4x-1}+2}=\frac{(4x-5)(\sqrt{4x-1}-2)}{(4x-1)-4}=\sqrt{4x-1}-2.$$

$\therefore$ প্রদত্ত সমীকরণটিকে এইরূপে লেখা যায়,

$(\sqrt{x+1}+3)+(\sqrt{x-1}-5)=(\sqrt{4x-1}-2)$;

বা, $\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}=\sqrt{4x-1}$;

বা, $x+1+x-1+2\sqrt{x^2-1}=4x-1$;

বা, $2\sqrt{x^2-1}=2x-1$; বা, $4(x^2-1)=4x^2-4x+1$;

বা, $4x=5$; $\therefore \; x=\frac{5}{4}=1\frac{1}{4}.$

উদা. 6. সমাধান কর :

$4x^2+6x+\sqrt{2x^2+3x+4}=13.$ [W. B. S. F. 1953]

$4x^2+6x+\sqrt{2x^2+3x+4}=13$;

বা, $4x^2+6x+8+\sqrt{2x^2+3x+4}=13+8$;

বা, $2(2x^2+3x+4)+\sqrt{2x^2+3x+4}=21$;

বা, $2p^2+p=21$ [$\sqrt{2x^2+3x+4}=p$ ধরিয়া] ;

বা, $2p^2+p-21=0$; বা, $(p-3)(2p+7)=0$;

$\therefore$ ঋণাত্মক মান বর্জন করিয়া,

$p=3,$

অর্থাৎ $\sqrt{2x^2+3x+4}=3$; বা, $2x^2+3x+4=9$;

বা, $2x^2+3x-5=0$; বা, $(x-1)(2x+5)=0$;

$\therefore \; x=1, -\frac{5}{2}.$

প্রশ্নমালা 9

নিম্নলিখিত সমীকরণগুলির সমাধান কর :

1. $\sqrt{x+7}=1+\sqrt{x}$.

2. $\sqrt{3x}-4=\sqrt{3x+4}$.

3. $\sqrt{5x+10}=\sqrt{5x}+2$.

4. $\sqrt{2x+9}+\sqrt{2x}=9$.

5. $\sqrt{8x+33}-3=2\sqrt{2x}$.

6. $x+\sqrt{2ax+x^2}=a$.

7. $x+a+\sqrt{2ax+x^2}=b$.

8. $\sqrt{x-4}+3=\sqrt{x+11}$.

9. $\sqrt{3x+1}-\sqrt{3x-11}=2$.

10. $\sqrt{5x+6}+\sqrt{5x-14}=10$.

11. $\dfrac{x-1}{\sqrt{x}+1}=4+\dfrac{\sqrt{x}-1}{2}$.

12. $\dfrac{ax-1}{\sqrt{ax}+1}=4+\dfrac{\sqrt{ax}-1}{2}$. [C. U. 1885]

13. $\dfrac{ax-b^2}{\sqrt{ax}+b}=c+\dfrac{\sqrt{ax}-b}{c}$.

14. $\dfrac{2x-49}{\sqrt{2x+15}-8}+\dfrac{18x+22}{\sqrt{18x+31}+3}=\dfrac{8x+191}{2\sqrt{2x+54}-5}$.

15. $x=\sqrt{a^2+x\sqrt{b^2+x^2}}-a$.

16. $x^2+18=8x+6\sqrt{x^2-8x+9}$.

তৃতীয় অধ্যায়

ভেদ (Variation)

3·1. (*a*) **সরল ভেদ :** যে-রাশির মান পরিবর্তনশীল তাহাকে **চল** (variable) এবং যাহার মান সর্বদা অপরিবর্তিত থাকে তাহাকে **ধ্রুবক** (constant) বলে। উদাহরণস্বরূপ r ব্যাসার্ধ হইলে বৃত্তের পরিধি হইবে $2\pi r$; কাজেই r-এর হ্রাস-বৃদ্ধির উপর পরিধির হ্রাস-বৃদ্ধি নির্ভর করে। এক্ষেত্রে r-এর মান পরিবর্তনশীল এবং সেই কারণে r একটি চল, কিন্তু 2π-এর মান সর্বদা নির্দিষ্ট ও অপরিবর্তিত বলিয়া উহা একটি ধ্রুবক।

এখন, দুইটি চলের মধ্যে যদি এমন সম্বন্ধ থাকে যে, একটির মানের পরিবর্তন হইলে অপরটির মানেরও সমানুপাতে পরিবর্তন হয়, তবে বলা হয় যে, ঐ চল-দুইটির একটি অপরটির সহিত **সরল ভেদে** রহিয়াছে।

ভেদ-সম্পর্ক বুঝাইতে '$\propto$' প্রতীক চিহ্নটি ব্যবহার করা হয়। A-এর সহিত B সরল ভেদে আছে, এই কথা বুঝাইতে সাংকেতিক ভাষায় লেখা হয় $A \propto B$.

ইহার অর্থ, A-এর মান যখন a, তখন যদি B-এর মান b হয় এবং A-এর মান যখন a_1, তখন B-এর মান যদি b_1 হয়, তবে a ও a_1-এর অনুপাত অবশ্যই b ও b_1-এর অনুপাতের সমান হইবে। অর্থাৎ $a : a_1 = b : b_1$.

উদাহরণস্বরূপ, A যদি বইয়ের সংখ্যা এবং B যদি বইয়ের দাম হয় এবং A-এর মান তখন 3, B-এর মান তখন যদি 12 টাকা হয়, তবে A-এর মান যখন 10, B-এর মান তখন অবশ্যই 40 টাকা হইবে ; কেননা, $3 : 10 = 12 : 40$। অর্থাৎ A (বইয়ের সংখ্যা) ও B (বইয়ের দাম) সরল ভেদে থাকায় A-এর যে অনুপাতে বৃদ্ধি, B-এর ও সেই অনুপাতে বৃদ্ধি হইবে।

ইহা হইতে দেখা যায় $\frac{3}{10} = \frac{3}{10}$; $\frac{12}{40} = \frac{3}{10}$ এবং সাধারণভাবে $\frac{A}{B}$ = একটি ধ্রুবক।

সুতরাং, A-এর মান যখন $a_1, a_2, a_3,$ ইত্যাদি হয়, তখন যদি B-এর মান যথাক্রমে $b_1, b_2, b_3,$ ইত্যাদি হয়, তবে, সংজ্ঞানুসারে,

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2},\ \frac{a_2}{a_3} = \frac{b_2}{b_3},\ \frac{a_3}{a_4} = \frac{b_3}{b_4},\text{ ইত্যাদি।}$$

$$\therefore\quad \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2},\ \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3},\ \frac{a_3}{b_3} = \frac{a_4}{b_4},\text{ ইত্যাদি।}$$

ইহাদের প্রত্যেকটি = একটি ধ্রুবক m ধরিলে,

$$a_1 = mb_1,\ a_2 = mb_2,\ a_3 = mb_3,\ a_4 = mb_4, \text{ ইত্যাদি হয়।}$$

অতএব, সাধারণভাবে বলা যায় $A = mB$.

(*b*) **ব্যস্ত ভেদ :** একটি চল x যখন অপর একটি চল y-এর অন্যোন্যক $\frac{1}{y}$-এর সহিত সরল ভেদে থাকে অর্থাৎ যখন $x \propto \frac{1}{y}$ তখন বলা হয় যে, x ও y ব্যস্ত ভেদে রহিয়াছে।

সেক্ষেত্রে $x = m\frac{1}{y}$, যেখানে m একটি ধ্রুবক।

অর্থাৎ, $xy = m$.

ব্যস্ত ভেদের একটি উদাহরণ এইরূপ : একটি কাজ 20 জন মজুরে 4 ঘণ্টায় করিলে, সেই কাজ 10 জন মজুরে 8 ঘণ্টায় করিবে। এখানে মজুরের সংখ্যা যে অনুপাতে 20 হইতে 10-এ নামিয়াছে, সময়ের পরিমাণ সেই অনুপাতে 4 হইতে 8 ঘণ্টায় বাড়িয়াছে। উভয় ক্ষেত্রে মজুরের সংখ্যা × কার্যকালের ঘণ্টার সংখ্যা = $20 \times 4 = 10 \times 8$; অতএব, x যদি মজুরের সংখ্যা এবং y যদি কার্যকালের ঘণ্টার সংখ্যা হয়, তবে $xy = m$ বা একটি ধ্রুবক সংখ্যা। অর্থাৎ,

$$x = m\cdot\frac{1}{y},$$

$$\text{বা,}\quad x \propto \frac{1}{y}.$$

অনুরূপে, একই ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল A এবং উহাদের ভূমি ও উচ্চতা যদি যথাক্রমে b ও h হয়, তবে $\frac{1}{2}bh = A$ বা $bh = 2A$; স্পষ্টতঃ এখানে $2A$ একটি ধ্রুবক এবং উহা যেন $= k$; তাহা হইলে,

$$bh = k \quad \text{বা } b = k\cdot\frac{1}{h};$$

$\therefore\quad b \propto \frac{1}{h}$ এবং সেই কারণে b ও h ব্যস্ত ভেদে রহিয়াছে।

(*c*) **যৌগিক ভেদ :** একটি চলরাশি যখন একাধিক চলরাশির গুণফলের সহিত সরল ভেদে থাকে, তখন প্রথম রাশিটি অপর রাশিগুলির সহিত **যৌগিক ভেদে** রহিয়াছে—এইরূপ বলা হয়।

(i) এই সংজ্ঞানুসারে A যদি B ও C-এর সহিত যৌগিক ভেদে থাকে, তবে $A \propto BC$ অর্থাৎ $A = mBC$ যেখানে m একটি ধ্রুবক।

দিনমজুরের মাসিক আয় তাহার দৈনিক মজুরী ও মাসে তাহার কাজের দিনসংখ্যার উপর নির্ভর করে। ইহা একটি যৌগিক ভেদের উদাহরণ। সুতরাং এক্ষেত্রে

মাসিক আয় $\propto$ (দৈনিক মজুরী $\times$ দিনসংখ্যা)।

(ii) আবার, A যদি B-এর সহিত সরল ভেদে এবং C-এর সহিত ব্যস্ত ভেদে থাকে, তবে ধরিতে হয় যে, A রাশিটি B এবং $\frac{1}{C}$-এর সহিত যৌগিক ভেদে রহিয়াছে, অর্থাৎ তখন $A=m.B.\frac{1}{C}=m\frac{B}{C}$, যেখানে m একটি ধ্রুবক।

v বেগে s দূরত্ব অতিক্রমণের সময় যদি t হয়, তবে t অবশ্যই s-এর সহিত সরল ভেদে এবং v-এর সহিত ব্যস্ত ভেদে থাকিবে, অর্থাৎ $t\propto\frac{s}{v}$; সুতরাং t এক্ষেত্রে s ও $\frac{1}{v}$-এর সহিত যৌগিক ভেদে রহিয়াছে।

3·2. একটি অত্যাবশ্যক প্রতিজ্ঞা :

A, B ও C যদি এমন তিনটি চলরাশি হয়, যে $A\propto B$ যখন C-এর মান স্থির (বা অপরিবর্তিত) এবং $A\propto C$ যখন B-এর মান স্থির, তবে $A\propto BC$ যখন B এবং C উভয়ের মান পরিবর্তনশীল।

যদি $A\propto B$ যখন C অপরিবর্তিত থাকে এবং $A\propto C$ যখন B অপরিবর্তিত থাকে, তবে প্রমাণ করিতে হইবে যে $A\propto BC$.

ধরা যাক, যখন B-এর মান b_1 এবং C-এর মান c_1, তখন A-এর মান যেন a_1 এবং যখন B-এর মান b_2 এবং C-এর মান c_2, তখন A-এর মান যেন a_2 হয়। স্পষ্টতঃ, A-এর মান a_1 হইতে a_2-তে পরিবর্তিত হইবে তখনই যখন (1) B-এর মান b_1 হইতে b_2-তে এবং (2) C-এর মান c_1 হইতে c_2-তে পরিবর্তিত হইবে। অতএব, কেবল B-এর মান যখন b_1 হইতে b_2-তে পরিবর্তিত হয়, তখন যদি C-এর মান C_1-ই থাকে তবে A-এর মান a_1 হইতে সরাসরি a_2-তে পরিবর্তিত হইতে পারে না। উহা যেন তখন a_1 হইতে পরিবর্তিত হইয়া a' হয়। দ্বিতীয় ধাপে, B-এর মান যখন b_2-তে পরিবর্তিত হইয়া স্থির রহিয়াছে তখন C-এর মান যেই c_1 হইতে c_2-তে পরিবর্তিত হইল অমনি A-এর মান a' হইতে a_2-তে পরিবর্তিত হইবে।

সুতরাং, A-এর মান $=a_1$, যখন B ও C-এর মান যথাক্রমে b_1 ও c_1 (1)

A-এর মান $=a'$, যখন B ও C-এর মান যথাক্রমে b_2 ও c_1 (2)

A-এর মান $=a_2$, যখন B ও C-এর মান যথাক্রমে b_2 ও c_2 (3)

$\therefore$ (1) ও (2) হইতে ইহাই প্রতিপন্ন হয় যে C-এর মান যতক্ষণ c_1-এ অপরিবর্তিত থাকে, ততক্ষণ $\frac{a_1}{a'}=\frac{b_1}{b_2}$ ... ... (4)

আবার, (2) ও (3) হইতে দেখা যায় যে, B-এর মান যখন b_2-তে অপরিবর্তিত থাকে, তখন $\frac{a'}{a_2}=\frac{c_1}{c_2}$ ... ... (5)

$\therefore$ (4) ও (5) হইতে দেখা যায়

$$\frac{a_1}{a'}\times\frac{a'}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\times\frac{c_1}{c_2},\quad \text{বা,}\quad \frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1c_1}{b_2c_2},$$

অর্থাৎ, A-এর মান যে অনুপাতে a_1 হইতে a_2-তে পরিবর্তিত হয়, সেই অনুপাতে BC-এর মান b_1c_1 হইতে b_2c_2-তে পরিবর্তিত হয়।

সুতরাং, $A \propto BC$.

অনুসি.। B, C, D ইত্যাদির প্রত্যেকে যদি A-এর সহিত সরল ভেদে থাকে যখন অপরগুলি অপরিবর্তনশীল, তাহা হইলে B, C, D, ইত্যাদির গুণফলের সহিত A সরল ভেদে থাকে।

দৃষ্টান্ত। সুদের পরিমাণ, সুদের হার, সময় এবং মূলধনের প্রত্যেকের সহিত সরল ভেদে থাকে, যদি অপর দুইটি পরিবর্তনশীল না হয় ; কিন্তু তিনটিই পরিবর্তনশীল হইলে, সুদের পরিমাণ (সুদের হার × সময় × মূলধন)-এর সহিত সরল ভেদে থাকে।

3·3. ভেদ-সম্বন্ধীয় কয়েকটি প্রতিজ্ঞা :

(1) যদি $A\propto B$, তাহা হইলে $B\propto A$.

প্রমাণ : যেহেতু $A\propto B$; $\therefore$ $A=mB$ (m একটি ধ্রুবক) ;

$\therefore$ $B=\frac{1}{m}\cdot A$, $\therefore$ $B\propto A$ (কেননা $\frac{1}{m}$ একটি ধ্রুবক)।

(2) যদি $A\propto B$ এবং $B\propto C$ হয়, তাহা হইলে $A\propto C$.

প্রমাণ : ধরা যাক, $A=mB$ এবং $B=nC$, যেখানে m এবং n ধ্রুবক।

$\therefore$ $A=mn.C=$ একটি ধ্রুবক $\times C$. $\therefore$ $A\propto C$.

(3) যদি $A\propto C$ এবং $B\propto C$, তাহা হইলে $A\pm B\propto C$, এবং $\sqrt{AB}\propto C$.

প্রমাণ : ধরা যাক, $A=mC$ এবং $B=nC$, যেখানে m এবং n ধ্রুবক।

$\therefore$ $A\pm B=(m\pm n)C$. কিন্তু $m\pm n$ উভয়ই ধ্রুবক। $\therefore$ $A\pm B\propto C$.

পুনশ্চ, $\sqrt{AB}=\sqrt{mCnC}=\sqrt{mnC^2}=C\sqrt{mn}$. $\therefore$ $AB\propto C$.

(4) যদি $A\propto BC$, তাহা হইলে $B\propto \frac{A}{C}$ এবং $C\propto\frac{A}{B}$.

প্রমাণ ঃ ধরা যাক, $A=m.BC$, যেখানে m একটি ধ্রুবক।

$\therefore \quad B=\frac{1}{m}\cdot\frac{A}{C}=$ ধ্রুবক $\times \frac{A}{C}$; $\therefore\; B\propto\frac{A}{C}$.

অনুরূপে, $C\propto\frac{A}{B}$.

(5) যদি $A\propto B$ এবং $C\propto D$ হয়, তাহা হইলে $AC\propto BD$.

প্রমাণ ঃ ধরা যাক, $A=mB$, এবং $C=nD$, যেখানে m এবং n উভয়ই ধ্রুবক।

$\therefore \quad AC=mn.BD=$ ধ্রুবক $\times BD$; $\quad\therefore\quad AC\propto BD$.

(6) যদি $A\propto B$ হয়, তাহা হইলে $A^n\propto B^n$.

প্রমাণ ঃ ধরা যাক, $A=mB$, যেখানে m একটি ধ্রুবক।

$\therefore \quad A^n=m^nB^n=$ ধ্রুবক $\times B^n$; $\quad\therefore\quad A^n\propto B^n$.

(7) যদি $A\propto B$, তাহা হইলে $AP\propto BP$, যেখানে P একটি ধ্রুবক বা চলরাশি।

প্রমাণ ঃ ধরা যাক, $A=mB$, যেখানে m একটি ধ্রুবক।

$\therefore \quad AP=m.BP=$ ধ্রুবক $\times BP$; $\quad\therefore\quad AP\propto BP$.

(8) যদি $A\propto B$ এবং $A\propto C$ হয়, তাহা হইলে $A\propto B-C$.

প্রমাণ ঃ $A\propto B$, $\;\therefore\; A=mB$, যেখানে m একটি ধ্রুবক।

পুনশ্চ, $A\propto C$, $\;\therefore\; A=nC$, " n " "

$$\therefore\quad B-C=\frac{1}{m}A-\frac{1}{n}A=\frac{n-m}{mn}A.$$

$$\therefore\quad A=\frac{mn}{n-m}(B-C)=\text{ধ্রুবক}\times(B-C);\quad\therefore\quad A\propto B-C.$$

(9) যদি $A\propto B$ এবং $C\propto D$ হয়, তাহা হইলে $\frac{A}{C}\propto\frac{B}{D}$.

প্রমাণ ঃ $A\propto B$, $\;\therefore\; A=mB$. অনুরূপে $C=nD$, যেখানে m এবং n একটি ধ্রুবক।

$$\therefore\quad \frac{A}{C}=\frac{m}{n}\cdot\frac{B}{D}=\text{ধ্রুবক}\times\frac{B}{D};\quad\therefore\quad \frac{A}{C}\propto\frac{B}{D}.$$

দ্রষ্টব্য। দুই বা ততোধিক ধ্রুবকের যোগফল, বিয়োগফল, গুণফল, ভাগফল প্রত্যেকেই একটি ধ্রুবক।

উদা. 1. যদি $y\propto x$; এবং যদি $x=12$, যখন $y=5$ তবে $x=18$ হইলে, y-এর মান কত হইবে?

ধরা যাক, $y=mx$, যেখানে m একটি ধ্রুবক।

$\therefore$ $y=5$ এবং $x=12$ বসাইয়া, $5=m.12$; $\therefore$ $m=\frac{5}{12}$;

$\therefore$ $y=\frac{5}{12}x$; $\therefore$ যখন $x=18$, $y=\frac{5}{12}\times 18=\frac{15}{2}=7\frac{1}{2}$.

উদা. 2. যদি $A\propto\frac{1}{B}$, প্রমাণ কর যে, যখন $A=B$, তখনই $(A+B)$-এর মান ক্ষুদ্রতম।

যেহেতু $A\propto\frac{1}{B}$; $\therefore$ $A=\frac{m}{B}$; $\therefore$ $AB=m$ (একটি ধ্রুবক)।

$$(A+B)^2=(A-B)^2+4AB=(A-B)^2+4m.$$

যেহেতু $4m$ ধ্রুবক, অতএব, ইহার মান সর্বদা অপরিবর্তিত থাকিবে এবং $(A-B)^2$-এর মান 0 হইলেই $(A+B)$-এর মান লঘিষ্ঠ হইবে।

$\therefore$ যখন $A-B=0$ হয়, অর্থাৎ $A=B$ হয়, তখনই $A+B$-এর মান লঘিষ্ঠ হইবে।

উদা. 3. যদি $z\propto px+y$, এবং যদি $z=3$, যখন $x=1, y=2$ এবং যদি $z=5$, যখন $x=2$, $y=3$, তাহা হইলে p-এর মান নির্ণয় কর।

ধরা যাক, $z=m(px+y)$, যেখানে m একটি ধ্রুবক।

$\therefore$ $z=3$, $x=1$, $y=2$ বসাইয়া, $3=m(p+2)$ ... (1)

অনুরূপে, $5=m(2p+3)$ ... ... (2)

$\therefore$ (1)-কে (2) দিয়া ভাগ করিলে, $\frac{3}{5}=\frac{p+2}{2p+3}$,

অথবা, $6p+9=5p+10$; $\therefore$ $p=1$.

উদা. 4. y তিনটি পদের যোগফলের সমান, যাহার প্রথম পদ $\propto x^2$, দ্বিতীয় পদ $\propto x$ এবং তৃতীয়টি ধ্রুবক, যদি $y=6, 11, 18$, যখন x ক্রমান্বয়ে $=1, 2, 3$; তাহা হইলে x এবং y-এর সম্পর্ক নির্ণয় কর।

ধরা যাক, $y=mx^2+nx+p$, যেখানে m, n, p ধ্রুবক।

কিন্তু, $y=6$, যখন $x=1$; $\therefore$ $6=m+n+p$. ... (1)

অনুরূপে, $11=4m+2n+p$ ... ... (2)

এবং $18=9m+3n+p$. ... ... (3)

(2) হইতে (1) বিয়োগ করিয়া, $3m+n=5$ ... ... (4)

(3) " (2) " " , $5m+n=7$ ... ... (5)

(5) হইতে (4) বিয়োগ করিয়া, $2m=2$; $\therefore \quad m=1$.
m-এর মান বসাইয়া, (4) হইতে, $n=2$; $\therefore$ (1) হইতে, $p=3$.

$\therefore$ x এবং y-এর সম্পর্ক $y=x^2+2x+3$.

উদা. 5. যদি $a+b \propto a-b$, প্রমাণ কর যে, $a^2+b^2 \propto ab$.

$a+b \propto a-b$ বলিয়া, $a+b=m(a-b)$, যেখানে m একটি ধ্রুবক।

$\therefore \quad a(m-1)=b(m+1)$.

$\therefore \quad a=\dfrac{m+1}{m-1}\cdot b=kb$, যেখানে $k=\dfrac{m+1}{m-1}=$ একটি ধ্রুবক।

$\therefore \quad \dfrac{a^2+b^2}{ab}=\dfrac{k^2b^2+b^2}{kb^2}=\dfrac{k^2+1}{k}=$ ধ্রুবক ; $\therefore \quad a^2+b^2 \propto ab$.

উদা. 6. 5 জন মজুরের 6 সপ্তাহের মজুরি 14 পা. 5 শি. হইলে, 4 জন মজুরের কত সপ্তাহের মজুরি 19 পা. হইবে ?

ধরা যাক, y জন মজুরের z সপ্তাহের মজুরি $=x$ পা. ;

$\therefore \quad x \propto y$, যখন z ধ্রুবক, এবং $x \propto z$, যখন y ধ্রুবক।

$\therefore \quad x \propto yz$, যখন y এবং z উভয়ই পরিবর্তনশীল।

$\therefore \quad x=m.yz$, যেখানে m একটি ধ্রুবক।

কিন্তু, $x=14\frac{1}{4}$, যখন $y=5$ এবং $z=6$.

$\therefore \quad 14\frac{1}{4}=m\times 5\times 6$. ... ... (1)

এখন z_1 যদি নির্ণেয় সপ্তাহ-সংখ্যা হয়, তাহা হইলে,

যেহেতু $x=19$ এবং $y=4$, $19=m\times 4\times z_1$ ... (2)

$\therefore$ (2)-কে (1) দিয়া ভাগ করিয়া,

$$\frac{19}{14\frac{1}{4}}=\frac{4z_1}{5\times 6}. \quad \therefore \quad z_1=\frac{19\times 4}{57}\times\frac{5\times 6}{4}=10.$$

$\therefore$ নির্ণেয় সময় $=10$ সপ্তাহ।

উদা. 7. যদি 5 জন লোক 9 দিনে 10 হেক্টোআর জমি চাষ করিতে পারে, তবে 25 জন লোক 30 হেক্টোআর জমি কতদিনে চাষ করিবে ?

ধরা যাক, x দিনের সংখ্যা, y জমির মাপ (হেক্টোআরে), z লোকের সংখ্যা।

তাহা হইলে, $x \propto y$, যখন z ধ্রুবক থাকে এবং $x \propto \dfrac{1}{z}$, যখন y ধ্রুবক থাকে।

$\therefore \quad x \propto \dfrac{y}{z}$, অর্থাৎ, $x=k\dfrac{y}{z}$, যেখানে k একটি ধ্রুবক।

যখন, $x=9$, তখন $y=10$ এবং $z=5$.

$\therefore\ 9=k.\frac{10}{5}$; $\therefore\ k=\frac{9}{2}$.

পুনশ্চ যখন, $y=30$, $z=25$, তখন x_1 নির্ণেয় দিন-সংখ্যা হইলে,

$x_1=k.\frac{30}{25}=\frac{9}{2}\times\frac{30}{25}=5\frac{2}{5}$ দিন।

উদা. 8. যদি $x+y\propto z$, যখন y ধ্রুবক এবং $x+z\propto y$, যখন z ধ্রুবক। প্রমাণ কর যে, $x+y+z\propto yz$, যখন y এবং z উভয়ই চল (অর্থাৎ, পরিবর্তনশীল)।

$x+y\propto z$, বলিয়া $x+y=kz$, যেখানে k একটি ধ্রুবক।

$\therefore\ x+y+z=kz+z=(k+1)z=$ ধ্রুবক $\times z$.

$\therefore\ x+y+z\propto z$, যখন y ধ্রুবক।

পুনশ্চ, $x+z\propto y$: $\therefore\ x+z=my$, যেখানে m একটি ধ্রুবক।

$\therefore\ x+y+z=my+y=(m+1)y=$ ধ্রুবক $\times y$.

$\therefore\ x+y+z\propto y$, যখন z ধ্রুবক।

$\therefore\ x+y+z\propto yz$, যখন y এবং z উভয়ই চল।

উদা. 9. যদি কার্যের পরিমাণ $\propto$ কর্মিসংখ্যার ঘনমূল [যখন সময় একই অর্থাৎ ধ্রুবক থাকে], $\propto$ সময়ের বর্গমূল [যখন কর্মিসংখ্যা একই থাকে], তবে যে কাজটি 24 জন লোক 25 ঘণ্টায় করিতে পারে, তাহার এক-পঞ্চমাংশ কাজ 3 জন লোকে কত সময়ে করিবে ?

ধরা যাক, z ঘণ্টায় y-সংখ্যক লোক x পরিমাণ কাজ করে।

তাহা হইলে প্রদত্ত শর্তানুসারে,

$x\propto y^{\frac{1}{3}}$ যখন z, সুতরাং $z^{\frac{1}{2}}$ ধ্রুবক,

এবং $x\propto z^{\frac{1}{2}}$ যখন y, সুতরাং, $y^{\frac{1}{3}}$ ধ্রুবক।

সুতরাং, যখন y এবং z উভয়ই, সুতরাং, $y^{\frac{1}{3}}$ এবং $z^{\frac{1}{2}}$ চলরাশি,

$x\propto y^{\frac{1}{3}}z^{\frac{1}{2}}$.

$\therefore\ x=ky^{\frac{1}{3}}z^{\frac{1}{2}}$ (যখন k একটি ধ্রুবক-সংখ্যা).

এখন, প্রদত্ত শর্ত হইতে,

$x=1$, যখন $y=24$, এবং $z=25$.

$\therefore\ 1=k\sqrt[3]{24}.\sqrt{25}$. ... ... (1)

যদি z_1 নির্ণেয় ঘণ্টার সংখ্যা বুঝায়, তাহা হইলে $\frac{1}{5}$ এবং 3 যথাক্রমে কাজের পরিমাণ x এবং লোকের সংখ্যা y সূচিত করিবে ; তাহা হইলে

$\frac{1}{5}=k\sqrt[3]{3}\sqrt{z_1}$. ... ... (2)

সুতরাং, সমীকরণ (1)-কে সমীকরণ (2) দ্বারা ভাগ করিলে,

$$5=\frac{\sqrt[3]{24}\times 5}{\sqrt[3]{3}\times\sqrt{z_1}}=\frac{\sqrt[3]{8}\times 5}{\sqrt{z_1}};$$

$\therefore\quad \sqrt{z_1}=\sqrt[3]{8}=2;\quad \therefore\quad z_1=4.$

অতএব, নির্ণেয় সময় = 4 ঘণ্টা।

উদা. 10. কোন দোলকের দৈর্ঘ্য $\propto \dfrac{1}{\text{প্রতি মিনিটে দোলন-সংখ্যার বর্গ}}$।

4·8 মিটার দীর্ঘ দোলক মিনিটে 27 বার দুলিলে, যে দোলক মিনিটে 24 বার দোলে, তাহার দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

ধরা যাক, দোলকের দৈর্ঘ্য l মিটার, t প্রতি মিনিটে দোলনের সংখ্যা।

তাহা হইলে প্রদত্ত শর্ত হইতে,

$$l\propto\frac{1}{t^2};\quad \therefore\quad l=\frac{k}{t^2}.\quad (\text{যখন } k \text{ একটি ধ্রুবক-সংখ্যা})$$

যেহেতু $l=4{\cdot}8$ মিটার হইলে, দোলনের সংখ্যা 27;

$\therefore\quad 4{\cdot}8=\dfrac{k}{27^2};\quad \therefore\quad k=4{\cdot}8\times 27^2;$

$\therefore\quad l=\dfrac{k}{t^2}$ সমীকরণে k এবং t-এর মান বসাইয়া

$$\text{নির্ণেয় দোলকের দৈর্ঘ্য } l=\frac{4{\cdot}8\times 27^2}{24^2}\text{ মিটার}=\frac{4{\cdot}8\times 27\times 27}{24\times 24}\text{ মিটার}$$

(কাটাকাটি: উপরে ·6, ·3; 9, 9; নিচে 3, 12, 4)

= 6·075 মিটার।

উদা. 11. একটি শূন্যগর্ভ ধাতব গোলকের অন্তস্থ শূন্য স্থান ধাতব গোলকের সহিত এককেন্দ্রীয় এবং গোলকাকৃতি। শূন্যগর্ভ গোলকটির ওজন একই ধাতুর এবং একই ব্যাসার্ধবিশিষ্ট নিরেট গোলকের $\frac{7}{8}$ অংশ। যদি একই ধাতুর গোলকগুলির ওজন $\propto$ (ব্যাসার্ধ)^3, তবে ঐ শূন্যগর্ভ গোলকটির অন্তর্ব্যাসার্ধ ও বহির্ব্যাসার্ধের অনুপাত নির্ণয় কর।

ধরা যাক, গোলকটির বহির্ব্যাসার্ধ R এবং ঐ ধাতুর R ব্যাসার্ধবিশিষ্ট নিরেট গোলকের ওজন W, গোলকটির অন্তর্ব্যাসার্ধ (অর্থাৎ গোলকাকৃতি শূন্য স্থানের ব্যাসার্ধ) r, এবং ঐ ধাতুর r ব্যাসার্ধবিশিষ্ট নিরেট গোলকের ওজন w.

অতএব, প্রদত্ত শর্তানুসারে, $W=kR^3$ এবং $w=kr^3$ (যখন k ধ্রুবক)।

আলোচ্য গোলকটির ওজন $(W-w)$ এবং প্রদত্ত শর্ত হইতে $W-w=\frac{7}{8}W$.

তাহা হইলে, $k(R^3-r^3)=\frac{7}{8}kR^3$, অথবা $\frac{1}{8}R^3=r^3$;

$\therefore \quad R^3=8r^3$, অর্থাৎ, $\frac{r}{R}=\frac{1}{2}$.

উদা. 12. কোন গতিশীল বিন্দুর গতিবেগ বিভিন্ন কিলোমিটারে বিভিন্ন, কিন্তু একই কিলোমিটারের মধ্যে গতিবেগ একই।

যে-কোন কিলোমিটারে গতিবেগ $\propto$

$$\frac{1}{\text{ঐ কিলোমিটার ভ্রমণ আরম্ভের পূর্বে অতিক্রান্ত কিলোমিটারের সংখ্যা}}\text{।}$$

যদি দ্বিতীয় কিলোমিটার 2 ঘণ্টায় যায়, তবে n-তম কিলোমিটার অতিক্রম করিতে ইহার কত সময় লাগিবে ?

স্পষ্টতঃই, যে-কোন কিলোমিটার অতিক্রমের সময় $\propto \frac{1}{\text{সেই কিলোমিটারে গতিবেগ}}$।

সুতরাং, যদি n-তম কিলোমিটারে গতিবেগ v_n এবং n-তম কিলোমিটার অতিক্রমের সময় যদি t_n হয়, তাহা হইলে,

$$t_n=\frac{m}{v_n}, \text{ যখন } m \text{ একটি ধ্রুবক-সংখ্যা।}$$

প্রদত্ত শর্তানুসারে, $v_n=\frac{k}{n-1}$, যখন k ধ্রুবক ; অতএব, $t_n=\frac{m}{k}(n-1)$.

স্পষ্টতঃ, $\frac{m}{k}$ নির্ণীত হইলে, t_n-এর মান পাওয়া যাইবে।

যেহেতু দ্বিতীয় কিলোমিটার অতিক্রম করার সময় = 2 ঘণ্টা,

$\therefore \quad 2=\frac{m}{k}\cdot 1$; $\quad \therefore \quad \frac{m}{k}=2$;

$\therefore \quad t_n=2(n-1)$,

অর্থাৎ, n-তম কিলোমিটার অতিক্রম করিতে $2(n-1)$ ঘণ্টা লাগিবে।

উদা. 13. একখানা রেল-ইঞ্জিন (গাড়ী সংযুক্ত না থাকিলে) ঘণ্টায় 24 কিলোমিটার বেগে যাইতে পারে, ইহার গতিবেগ সেই পরিমাণে হ্রাস পায়, যে পরিমাণ $\propto$ সংযুক্ত গাড়ীর সংখ্যার বর্গমূল। 4 খানা গাড়ীর সহিত ঐ ইঞ্জিনের গতিবেগ ঘণ্টায় 20 কিলোমিটার হইলে, ঊর্ধ্বসংখ্যায় কতগুলি গাড়ী লইয়া ঐ ইঞ্জিনটি চলিতে পারে ?

ধরা যাক, নির্ণেয় গাড়ীর সংখ্যা $= x$. তাহা হইলে x খানা গাড়ী লইয়া ইঞ্জিনটির ঘন্টায় গতিবেগ $= 24 - m. \sqrt{x}$ কিলোমিটার (যখন m ধ্রুবক)।

যখন x (অর্থাৎ গাড়ীর সংখ্যা) $= 4$, তখন ইঞ্জিনের গতিবেগ ঘণ্টায় 20 কিলোমিটার ;

$\therefore \quad 20 = 24 - m\sqrt{4} = 24 - 2m$; অর্থাৎ, $m = 2$.

সুতরাং, x খানা গাড়ীর সহিত ইঞ্জিনের ঘণ্টায় গতিবেগ $= 24 - 2\sqrt{x}$ কিলোমিটার ;

ইহা স্পষ্ট যে, x-এর মান বৃদ্ধির সহিত ইঞ্জিনের গতিবেগ হ্রাসপ্রাপ্ত হয়।

x-এর মান কত হইলে ইঞ্জিনের গতিবেগ শূন্য (0) হয়, তাহাই নির্ণয় করিতে হইবে।

ধরা যাক, x-এর মান x_1 হইলে, ইঞ্জিনের গতিবেগ শূন্য হয়।

সেক্ষেত্রে, $0 = 24 - 2\sqrt{x_1}$; $\therefore \quad \sqrt{x_1} = 12$; $\therefore \quad x_1 = 144$.

কমপক্ষে 144 খানা গাড়ী সংযুক্ত করিলে ইঞ্জিনটির গতিবেগ থাকে না।

সুতরাং, 144 অপেক্ষা 1 খানা গাড়ী কম লইয়া ইঞ্জিনটি চলিতে পারে।

$\therefore$ নির্ণেয় গাড়ী-সংখ্যা 143.

উদা. 14. যদি x, y, z তিনটি চলরাশি হয়, কিন্তু $y + z - x$ ধ্রুবক হয় এবং যদি $(x - y + z)(x + y - z) \propto yz$, প্রমাণ কর যে, $x + y + z \propto yz$.

ধরা যাক, $y + z - x = k$ ... ... (1)

এবং $(x + y - z)(x - y + z) = myz$ ... ... (2)

যেখানে k এবং m ধ্রুবক।

(2) হইতে, $x^2 - (y - z)^2 = myz$;

$\therefore \quad x^2 - (y + z)^2 = (m - 4)yz$, [উভয় পক্ষে $-4yz$ যোগ করিয়া]

বা, $(x + y + z)(x - y - z) = (m - 4)yz$,

বা, $(x + y + z)(-k) = (m - 4)yz$ [(1) হইতে] ;

$\therefore \quad x + y + z = \left(\frac{4 - m}{k}\right)yz =$ ধ্রুবক $\times\, yz$.

$\therefore \quad x + y + z \propto yz$.

প্রশ্নমালা 10

1. যদি $A \propto B$ এবং $\propto C$, দেখাও যে, $A \propto B - C$. [C. U. 1925]

2. যদি $P \propto \frac{1}{Q}$ এবং $Q = 10$, যখন $P = 2$, তাহা হইলে যখন $Q = 8$, তখন P কত হইবে? [C. U. 1919]

3. যদি $P \propto QR$, এবং যদি $P = 6$, যখন $Q = 9$ এবং $R = 10$, তবে $Q = 5$ এবং $R = 3$ হইলে P কত হইবে?

4. যদি $x^2 \propto y^3$ এবং $x = 2$ যখন $y = 3$, তাহা হইলে x এবং y-এর মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় কর।

5. যদি $x \propto y^2$ এবং $x \propto \frac{1}{\sqrt[3]{z}}$, এবং $y = 4$ এবং $z = 8$ হইলে, $x = 2$ হয়, $x = 3$ এবং $z = 27$ হইলে y-এর মান কত হইবে? [C. U. 1917]

6. যদি $x^2 + y^2 \propto x^2 - y^2$, প্রমাণ কর যে, $x \propto y$. [C. U. 1923]

7. যদি $x \propto y$ এবং $y \propto z$ এবং $x = a$, যখন $y = b$, $z = c$; এবং $x = a'$, যখন $y = b'$, $z = c'$, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে,

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{aa' + bb' + cc'} = \frac{aa' + bb' + cc'}{a'^2 + b'^2 + c'^2}.$$ [C. U. 1922]

8. যদি $xy \propto x^2 + y^2$ এবং $y = 4$, যখন $x = 3$, তাহা হইলে x এবং y-এর মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় কর।

9. যদি $x + y \propto x - y$, প্রমাণ কর যে,

(i) $x^2 + y^2 \propto xy$,

(ii) $ax + by \propto px + qy$, যেখানে a, b, p, q ধ্রুবক। [C. U. 1936]

10. (i) যদি $y \propto$ দুইটি পদের যোগফল, যাহার একটি $\propto x$, এবং অন্যটি $\propto \frac{1}{x}$, এবং যদি $y = 4$, যখন $x = 1$ এবং $y = 5$, যখন $x = 2$, তাহা হইলে x এবং y-এর মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় কর।

(ii) যদি y দুইটি পদের যোগফল হয়, যাহার প্রথম পদ $\propto x$ এবং দ্বিতীয় পদ $\propto \frac{1}{x^2}$ এবং যদি $y = 6$, যখন $x = 1$ এবং $y = 5$, যখন $x = 2$, তাহা হইলে x এবং y-এর মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় কর।

11. y যদি তিনটি পদের যোগফল, যাহার প্রথম পদ ধ্রুবক, দ্বিতীয় পদ $\propto x$

এবং তৃতীয় পদ $\propto x^2$, যদি $y=0, -12, -32$, যখন $x=$ যথাক্রমে 3, 5, 7, তাহা হইলে x এবং y-এর মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় কর।

12. যদি $y^2 \propto (a^2-x^2)$ এবং $y=\frac{b^2}{a^2}$, যখন $x=\sqrt{a^2-b^2}$, তাহা হইলে x এবং y-এর মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় কর।

13. যদি $a \propto b$ এবং $b \propto c$, প্রমাণ কর যে, $(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}} \propto c^3$.

14. যদি $x+y \propto x-y$, প্রমাণ কর যে, $x^3+y^3 \propto xy(x \pm y)$.

15. (i) যদি $x+y \propto z+\frac{1}{z}$ এবং $x-y \propto z-\frac{1}{z}$, এবং $z=2$, যখন $x=3$ এবং $y=1$, তাহা হইলে x এবং z-এর মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় কর।

(ii) কোন বস্তুর ভর $(m) \propto$ ইহার ঘনত্ব (ρ), যখন আয়তন (v) ধ্রুবক এবং ভর $\propto$ ইহার আয়তন, যখন ঘনত্ব ধ্রুবক। যদি একক আয়তনের এবং একক ঘনত্বের কোন বস্তুর ভরকে ভরের একক বলা যায়, তাহা হইলে দেখাও যে, $m=\rho v$.

[C. U. 1929]

16. যদি 13 জন লোক প্রত্যহ 8 ঘণ্টা কাজ করিয়া 15 দিনে 7 টাকা আয় করে, তবে 52 জন লোক প্রত্যহ 9 ঘণ্টা কাজ করিয়া $12\frac{1}{2}$ দিনে কত আয় করিবে ?

17. একটি পেণ্ডুলামের দুলিবার সময় $\propto$ উহার দৈর্ঘ্যের বর্গমূল ; যদি 39·2 সে.মি. দীর্ঘ একটি পেণ্ডুলাম এক সেকেণ্ডে একবার দোলে, তাহা হইলে যে পেণ্ডুলাম মিনিটে 56 বার দোলে, তাহার দৈর্ঘ্য কত ?

18. গোলকের ঘনফল $\propto$ (ব্যাসার্ধ)^3 ; প্রমাণ কর যে 3, 4 এবং 5 সে.মি., ব্যাসার্ধের তিনটি গোলক গলাইয়া একটি গোলকে রূপান্তরিত করিলে, উহার ব্যাসার্ধ 6 সে.মি. হইবে ?

19. যদি 10 জন লোক প্রত্যহ 12 ঘণ্টা করিয়া কাজ করিয়া 3 দিনে $7\frac{1}{2}$ হেক্টোআর জমির ঘাস কাটিতে পারে, তবে 8 জন লোক প্রত্যহ 16 ঘণ্টা কাজ করিয়া কতদিনে 9 হেক্টোআর জমির ঘাস কাটিতে পারিবে ?

20. দুইটি স্বর্ণগোলকের ব্যাসার্ধ r এবং r', উহাদিগকে গলাইয়া একটি গোলক প্রস্তুত করা হইল। যদি মনে করা হয় যে, গোলকের আয়তন $\propto$ (ব্যাসার্ধ)^3, তবে এই গোলকটির ব্যাসার্ধ কত হইবে ?

21. যদি x, y এবং z চলরাশি হয়, কিন্তু $x+y+z$ ধ্রুবক হয় এবং যদি $(x-y+z) \times (x+y-z) \propto yz$, প্রমাণ কর যে, $yz \propto (y+z-x)$.

22. যদি $z \propto y$ এবং $y \propto x$, প্রমাণ কর যে,

$$x+y+z \propto (yz)^{\frac{1}{2}}+(zx)^{\frac{1}{2}}+(xy)^{\frac{1}{2}}.$$

23. পিরামিডের আয়তন $\propto$ ইহার উচ্চতা $\times$ ভূমির ক্ষেত্রফল ; যখন কোন পিরামিডের ভূমির ক্ষেত্রফল 60 বর্গমিটার এবং উচ্চতা 14 মিটার, ইহার আয়তন 280 ঘনমিটার। যে পিরামিডের আয়তন 390 ঘনমিটার, উচ্চতা 26 মিটার, উহার ভূমির ক্ষেত্রফল কত ?

24. গোলকের আয়তন $\propto$ (ব্যাসার্ধ$)^3$ এবং গোলকের বক্রতল $\propto$ (ব্যাসার্ধ$)^2$। প্রমাণ কর যে, (গোলকের আয়তনের $)^2 \propto$ (গোলকের বক্রতলের $)^3$।

[C. U. 1924]

25. তরল পদার্থের চাপ (pressure) (P) $\propto$ গভীরতা (depth) (d), যখন ঘনত্ব (density) (D) ধ্রুবক, আবার চাপ (P) $\propto$ ঘনত্ব (D), যখন গভীরতা (d) ধ্রুবক। যে তরল পদার্থের গভীরতা 32, ঘনত্ব 1 হইলে, চাপ 1, ঘনত্ব 16 হইলে, কত গভীরতায় চাপ 2 হইবে ? [C. U. 1921]

26. বৃত্তের ক্ষেত্রফল $\propto$ (ব্যাসার্ধ$)^2$, যে বৃত্তের ব্যাসার্ধ 7 মিটার তাহার ক্ষেত্রফল 154 বর্গমিটার। 10·5 মিটার ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তের ক্ষেত্রফল কত ?

27. কোন খেলার মাঠের দৈর্ঘ্য এবং প্রস্থের অনুপাত 8 : 7 ; দর্শকদের বসিবার জন্য উক্ত মাঠের $\frac{1}{8}$ অংশ সংরক্ষিত। দর্শকদের বসিবার স্থান তিনগুণ বাড়াইতে হইলে, মাঠটির দৈর্ঘ্য কি অনুপাতে বাড়াইতে হইবে, যদি নূতন মাঠের প্রস্থ পূর্ব-প্রস্থের $\frac{8}{9}$ অংশ হয় ? [C. U. 1932]

28. 12 সে.মি. উচ্চ এবং 30 বর্গ-সে.মি. ভূমিবিশিষ্ট কোন শঙ্কুর (cone) আয়তন 120 ঘন-সে.মি.। শঙ্কুর আয়তন $\propto$ ইহার উচ্চতা $\times$ ভূমির ক্ষেত্রফল হইলে, 20 সে.মি. উচ্চ এবং 144 বর্গ-সে.মি. ভূমিবিশিষ্ট অপর একটি শঙ্কুর আয়তন কত ?

29. লম্ব-বৃত্তাকার চোঙের আয়তন $\propto$ (ভূমির ব্যাসার্ধ $)^2$, যখন উচ্চতা একই (constant), $\propto$ উচ্চতা, যখন ভূমি একই। ভূমির ব্যাসার্ধ 2 মিটার এবং উচ্চতা 7 মিটার হইলে, লম্ব-বৃত্তাকার চোঙের আয়তন 88 ঘন-মিটার ; যে লম্ব-বৃত্তাকার চোঙের আয়তন 396 ঘন-মিটার, তাহার ভূমির ব্যাসার্ধ 9 মিটার হইলে, উচ্চতা কত ?

30. 1 সে.মি. পুরু, 6 সে.মি. এবং 8 সে.মি. ব্যাসবিশিষ্ট দুইখানা বৃত্তাকার সোনার পাতকে গলাইয়া 1 সে.মি. পুরু একখানা বৃত্তাকার পাত করা হইল। যদি বৃত্তের ক্ষেত্রফল $\propto$ (বৃত্তের ব্যাসের $)^2$, নূতন পাতখানির ব্যাস কত ?

31. আলোর উৎস-কেন্দ্র হইতে আলোর-ভাস্বরতা $\propto \frac{1}{(\text{দূরত্ব})^2}$; একটি জ্বলন্ত মোমবাতি হইতে 3 সে.মি. দূরে অবস্থিত একখানি পুস্তককে কতদূরে স্থানান্তরিত করিলে, পুস্তকের উপর পূর্ব ভাস্বরতা কমিয়া অর্ধেক হইয়া যাইবে ?

32. এক সে.মি. ব্যাসবিশিষ্ট একটি কাচের নিরেট গোলককে ফুলাইয়া 3 সে.মি. ব্যাসবিশিষ্ট একটি শূন্যগর্ভ গোলকে পরিণত করা হইল। ইহার অন্তস্থ শূন্য স্থান যদি ঐ শূন্যগর্ভ গোলকের সহিত এককেন্দ্রীয় গোলকাকৃতি হয়, তবে শূন্যগর্ভ গোলকটির কাচের বেধ কত ? [গোলকের আয়তন $\propto$ (ব্যাসের $)^3$]

33. কোন-কিছু স্থির অবস্থান হইতে পতিত হইলে, পতন-স্থান হইতে ইহার দূরত্ব $\propto$ (পতন-সময় $)^2$। যদি $402\frac{1}{2}$ ফুট নিচে আসিতে কোন বস্তুর 5 সেকেণ্ড সময় লাগে, তবে 10 সেকেণ্ডে উহা কত নিচে আসিবে এবং দশম সেকেণ্ডে কত নিচে আসিবে ?

34. (গ্রহের আবর্তনের সময় $)^2 \propto$ (সূর্য হইতে ইহার দূরত্ব $)^3$। সূর্য হইতে পৃথিবী ও মঙ্গলের দূরত্ব যথাক্রমে 9·125 কোটি এবং 6·6 কোটি মাইল ধরিয়া লইলে, সূর্যকে একবার প্রদক্ষিণ করিতে মঙ্গলের কত সময় লাগে ?

[মনে কর, P নির্ণেয় দিনসংখ্যা এবং D ·1 কোটি মাইল এককে দূরত্ব; $\therefore\ P^2 = kD^2$, যখন k ধ্রুবক ; ইত্যাদি]

35. রৌপ্যমুদ্রার মান $\propto$ (মুদ্রার ব্যাস $)^2$, যখন বেধ ধ্রুবক ;
$\propto$ (মুদ্রার বেধ), যখন ব্যাস ধ্রুবক।

দুইটি রৌপ্য মুদ্রার ব্যাসের অনুপাত 4 : 3, ইহাদের বেধের অনুপাত কত হইলে, প্রথমটির মান দ্বিতীয়টির 4 গুণ হইবে ? [B. U. P. E. Preper, 1885]

36. হীরকের মূল্য $\propto$ (ইহার ওজন $)^2$, (রুবিমূল্য $)^2 \propto$ (ইহার ওজন $)^3$। a ক্যারাট ওজনের হীরকখণ্ডের মূল্য b ক্যারাট ওজনের রুবির মূল্যের m গুণ এবং উহাদের মোট মূল্য c পাউণ্ড (£) হইলে, n ক্যারেট ওজনের একখণ্ড হীরক ও n ক্যারেট ওজনের একখণ্ড রুবির মূল্য কত ?

37. ইঞ্জিনের কয়লা-খরচ $\propto$ (গতিবেগ $)^2$; যখন ইঞ্জিনের গতিবেগ ঘণ্টায় 16 কিলোমিটার, ঘণ্টায় কয়লা-খরচ 2 টন। প্রতি টন কয়লার মূল্য 10 শি. এবং প্রতি ঘণ্টায় ইঞ্জিন চালাইবার অন্যান্য খরচ 11 শি. 3 পে. হইলে, ইঞ্জিনখানার 100 কিলোমিটার যাইতে কমপক্ষে কত ব্যয় হইবে ?

চতুর্থ অধ্যায়

প্রগতি (Progression) ঃ

সমান্তর-শ্রেণী (Arithmetical Progression)

4·1. সংজ্ঞা ঃ কোন সংখ্যার সহিত একটি নির্দিষ্ট (ধন বা ঋণ) ধ্রুবক (constant)-কে ক্রমশঃ যোগ করিতে থাকিলে যে বিভিন্ন সংখ্যাসমূহ পাওয়া যায়, সেই সংখ্যাসমূহ একটি **সমান্তর-শ্রেণী** (Arithmetic Progression) উৎপন্ন করে। উক্ত নির্দিষ্ট ধ্রুবকটিকে ঐ শ্রেণীর **সাধারণ অন্তর** (common difference), এবং বিভিন্ন সংখ্যাসমূহের প্রত্যেকটিকে ঐ শ্রেণীর এক একটি **পদ** (term) বলে। যথা,

নিম্নলিখিত শ্রেণীসমূহের প্রত্যেকটিই সমান্তর-শ্রেণী ঃ

(i)	2,	5,	8,	11,	14,	ইত্যাদি ;
(ii)	9,	5,	1,	-3,	-7,	" ;
(iii)	a,	$a+b$,	$a+2b$,	$a+3b$,	$a+4b$,	" ;
(iv)	a,	$a-b$,	$a-2b$,	$a-3b$,	$a-4b$,	" ।

প্রথম শ্রেণীতে 2-এর সহিত ক্রমশঃ 3 যোগ করিয়া ঐ শ্রেণীর অন্যান্য সংখ্যাসমূহ ক্রমান্বয়ে পাওয়া গিয়াছে ; অতএব, এক্ষেত্রে 3 ঐ শ্রেণীর সাধারণ অন্তর এবং 2, 5, 8, 11, 14, ইত্যাদি সংখ্যাসমূহ যথাক্রমে ঐ শ্রেণীর প্রথম, দ্বিতীয়, তৃতীয়, চতুর্থ ও পঞ্চম পদ। অনুরূপে, দ্বিতীয় শ্রেণীতে -4 সাধারণ অন্তর এবং 9, 5, 1, -3, -7, ইত্যাদি সংখ্যাসমূহ যথাক্রমে উহার প্রথম, দ্বিতীয় ও তৃতীয় পদ, ইত্যাদি। এইরূপ তৃতীয় শ্রেণীতে b সাধারণ অন্তর এবং a, $a+b$, $a+2b$, $a+3b$, ইত্যাদি সংখ্যাসমূহ যথাক্রমে প্রথম, দ্বিতীয়, তৃতীয় ও চতুর্থ পদ। চতুর্থ শ্রেণীতে সাধারণ অন্তর $-b$ এবং a, $a-b$, $a-2b$, ইত্যাদি সংখ্যাসমূহ যথাক্রমে প্রথম, দ্বিতীয় ও তৃতীয় পদ।

উল্লিখিত দৃষ্টান্তগুলি হইতে স্পষ্টই দেখা যায় যে, কোন সমান্তর-শ্রেণীভুক্ত সংখ্যাসমূহের যে-কোন দুই সন্নিহিত পদের অন্তরফল অপর যে-কোন দুই সন্নিহিত পদের অন্তরফলের সমান। সেইজন্য সেই অন্তরফলকে সাধারণ অন্তর বলে।

4·2. কোন সমান্তর-শ্রেণীর n-তম পদ নির্ণয় (*To find the nth term of an A. P.*) ঃ

কোন সমান্তর-শ্রেণীর প্রথম পদ a এবং সাধারণ অন্তর যেন b, তাহা হইলে স্পষ্টতঃ, উহার

দ্বিতীয় পদ $= a+b = a+(2-1)b = a+($ পদসংখ্যা $-1)b$;

তৃতীয় পদ $= a+2b = a+(3-1)b = a+($ পদসংখ্যা $-1)b$;

চতুর্থ পদ $= a + 3b = a + (4-1)b = a +$ (পদসংখ্যা $- 1)b$;

... ...

দশম পদ $= a + 9b = a + (10-1)b = a +$ (পদসংখ্যা $- 1)b$;

... ...

একবিংশতিতম পদ $= a + 20b = a + (21-1)b = a +$ (পদসংখ্যা $- 1)b$;

... ...

∴ n-তম পদ = a + (পদসংখ্যা − 1)b = a + (n − 1)b.

উদা. 1. 10, 8, 6, 4, ইত্যাদি সমান্তর-শ্রেণীটির উনবিংশতিতম পদটি নির্ণয় কর।

এক্ষেত্রে, প্রথম পদ $= 10$; সাধারণ অন্তর $= 8 - 10 = -2$.

∴ উনবিংশতিতম পদ $= 10 + 18(-2) = 10 - 36 = -26$.

উদা. 2. 5, 7, 9, 11, ইত্যাদি সমান্তর-শ্রেণীর কোন্ পদটির সাংখ্যমান 25 হইবে ?

n-তম পদের সাংখ্যমান যেন 25.

তাহা হইলে, $25 = 5 + (n-1).2 = 5 + 2n - 2 = 2n + 3$; ∴ $n = 11$.

অতএব, একাদশ পদের সাংখ্যমান 25.

4·3. কোন সমান্তর-শ্রেণীর যে-কোন দুই পদ দেওয়া থাকিলে শ্রেণীটিকে নির্ণয় করিবার প্রণালী (*Given any two terms of an A. P., to find it completely*) :

নিম্নলিখিত দৃষ্টান্তগুলি দ্বারা প্রক্রিয়া-পদ্ধতি পরিষ্কাররূপে বুঝানো যাইতেছে।

উদা. 1. কোন সমান্তর-শ্রেণীর সপ্তম ও ত্রয়োদশ পদ-দুইটি যথাক্রমে 34 এবং 64 ; শ্রেণীটি নির্ণয় কর।

নির্ণেয় শ্রেণীর প্রথম পদ a এবং সাধারণ অন্তর যেন b ;

তাহা হইলে, সপ্তম পদ $= a + (7-1)b = a + 6b = 34$, ... (1)

এবং ত্রয়োদশ পদ $= a + (13-1)b = a + 12b = 64$. ... (2)

(2) হইতে (1) বিয়োগ করিয়া,

$6b = 30$; ∴ $b = 5$.

সুতরাং, (1) হইতে, $a + 30 = 34$; ∴ $a = 4$.

কাজেই, নির্ণেয় শ্রেণীর প্রথম পদ ও সাধারণ অন্তর যথাক্রমে 4 ও 5.

অতএব, 4, 9, 14, 19, 24, ...ই নির্ণেয় শ্রেণী।

উদা. 2. কোন সমান্তর-শ্রেণীর p-তম এবং q-তম পদ-দুইটি যথাক্রমে c এবং d ; শ্রেণীটি নির্ণয় কর।

নির্ণেয় শ্রেণীর প্রথম পদ a এবং সাধারণ অন্তর যেন b ;

তাহা হইলে, p-তম পদ $= a + (p-1)b = c$; ... ... (1)

এবং q-তম পদ $= a + (q-1)b = d$. ... ... (2)

এখন, (1) হইতে (2) বিয়োগ করিয়া, $(p-q)b = c - d$; $\therefore\ b = \dfrac{c-d}{p-q}$.

আবার, (1) হইতে, $a = c - (p-1)b = c - (p-1)\dfrac{c-d}{p-q}$

$$= \frac{c(p-q) - (p-1)(c-d)}{p-q}$$

$$= \frac{d(p-1) - c(q-1)}{p-q}.$$

সুতরাং, a ও b-এর মান নির্ণীত হইল বলিয়া নির্ণেয় শ্রেণীটির পদসমূহ লিখিতে পারা যায়।

প্রশ্নমালা 11

1. নিম্নলিখিত শ্রেণীসমূহের অষ্টম, বিংশতিতম এবং $(n-3)$-তম পদগুলি নির্ণয় কর (Find the 8th, 20th and $(n-3)$th terms of the series) :

(i) 2, 4, 6, 8, ...ইত্যাদি ; (ii) 1, 3, 5, 7, ...ইত্যাদি ; (iii) $\frac{13}{3}, \frac{7}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{5}{3}$, ...ইত্যাদি ; (iv) $\frac{9}{7}, \frac{5}{7}, \frac{1}{7}$, ...ইত্যাদি ; (v) 5, 11, 17, ...ইত্যাদি।

2. 9, 11, 13, 15, ...ইত্যাদি শ্রেণীটির কোন্ কোন্ পদ 65, 99 এবং $6n-13$?

3. কোন সমান্তর-শ্রেণীর প্রথম পদ 3 এবং সপ্তম পদ 39 ; উহার সাধারণ অন্তর নির্ণয় কর।

4. 60 পদসমন্বিত কোন সমান্তর-শ্রেণীর প্রথম পদ 8 এবং শেষ পদ 185 ; উহার একত্রিংশ পদটি নির্ণয় কর।

5. কোন সমান্তর-শ্রেণীর তৃতীয় ও ত্রয়োদশ পদদ্বয় যথাক্রমে -40 এবং 0 ; শ্রেণীটি নির্ণয় কর এবং উহার বিংশতিতম পদটি লিখ।

6. কোন সমান্তর-শ্রেণীর পঞ্চম ও একত্রিংশ পদটি যথাক্রমে 1 ও -77 ; উহার প্রথম ও অষ্টাদশ পদ-দুইটি বাহির কর।

7. কোন সমান্তর-শ্রেণীর অষ্টম ও দ্ব্যধিকশততম পদদ্বয় যথাক্রমে 23 ও 305 হইলে, উহার প্রথম পদ ও সাধারণ অন্তর নির্ণয় কর।

8. কোন সমান্তর-শ্রেণীর p-তম পদ c এবং q-তম পদ d হইলে, উহার r-তম পদ কত হইবে তাহা নির্ণয় কর।

9. কোন সমান্তর-শ্রেণীর প্রত্যেকটি পদকে একই সংখ্যা দ্বারা বৃদ্ধি বা হ্রাস করিলে যে নূতন শ্রেণী উৎপন্ন হয়, তাহাও সমান্তর হইবে।

(If every term of an A. P. be increased or diminished by the same quantity, the resulting terms will also be in A. P.)

10. কোন সমান্তর-শ্রেণীর প্রত্যেকটি পদকে একই সংখ্যা দ্বারা গুণ বা ভাগ করিলে যে নূতন শ্রেণী উৎপন্ন হয়, তাহাও সমান্তর হইবে।

(If each term of an A. P. be multiplied or divided by the same quantity, the resulting series will also be in A. P.)

11. কোন সমান্তর-শ্রেণীর প্রথম পদ a এবং শেষ পদ l হইলে, দেখাও যে, প্রথম হইতে গণনায় পঞ্চম পদ + শেষ হইতে গণনায় পঞ্চম পদ $= a + l$.

12. পূর্ববর্তী উদাহরণে দেখাও যে,

প্রথম হইতে গণনায় r-তম পদ + শেষ হইতে গণনায় r-তম পদ $= a + l$.

13. 302 সংখ্যাটি কি 3, 8, 13, 18, ⋯ইত্যাদির কোন পদ হইতে পারে ?

[এক্ষেত্রে সাধারণ অন্তর = 5 এবং প্রথম পদ = 3. মনে কর, উহার r-তম পদ = 302 ; তাহা হইলে, $302 = 3 + (r-1)5 = 5r - 2$; $\therefore\ r = \frac{304}{5}$, একটি ভগ্নাংশ। যেহেতু r একটি পদসংখ্যা, অতএব, r-এর মান ভগ্নাংশ হইতে পারে না। কাজেই, উপরিউক্ত শ্রেণীতে 302 কোন পদ হইতে পারে না।]

14. কোন সমান্তর-শ্রেণীর p-তম পদ q এবং q-তম পদ p. দেখাও যে, উহার m-তম পদ $= p + q - m$.

4·4. কোন সমান্তর-শ্রেণীর প্রথম পদ *a*, সাধারণ অন্তর *b* এবং পদসংখ্যা *n* ; শ্রেণীটির পদসমূহের সমষ্টি নির্ণয় করা (*To find the sum of 'n' terms of an Arithmetic series of which the first term is 'a' and the common difference, 'b'.*) :

নির্ণেয় সমষ্টিকে S দ্বারা এবং শেষ পদ (অর্থাৎ n-তম পদ)-কে l দ্বারা সূচিত করা হইল।

তাহা হইলে, যেহেতু $l = n$-তম পদ $= a + (n-1)b$,

$$S = a + (a+b) + (a+2b) + (a+3b) + \cdots \text{ইত্যাদি} \cdots + \{a + (n-1)b\}.$$

আবার ডানদিকের রাশিমালাকে বিপরীতক্রমে লিখিয়া,

$$S = l + (l-b) + (l-2b) + (l-3b) + \cdots \text{ইত্যাদি} \cdots + \{l - (n-1)b\}.$$

অতএব, যোগ করিয়া, $2S=(a+l)+(a+l)+(a+l)+\cdots n$-সংখ্যক পদ পর্যন্ত $=n(a+l)$.

$$\therefore \quad \mathbf{S=\frac{n}{2}(a+l).} \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$$

অতএব, কোন সমান্তর-শ্রেণীর প্রথম n-সংখ্যক পদের সমষ্টি, উহার প্রথম ও শেষ পদ-দুইটির সমষ্টির অর্ধেকের n গুণ হইবে।

আবার, যেহেতু $l=n$-তম পদ $=a+(n-1)b$,

স্নুতরাং, $S=\frac{n}{2}[a+\{a+(n-1)b\}]=\mathbf{\frac{n}{2}\{2a+(n-1)b\}}.$ $\cdots$ (2)

উদা. 1. $5, 4\frac{1}{3}, 3\frac{2}{3}, \cdots$ ইত্যাদি সমান্তর-শ্রেণীটির প্রথম বিশটি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

এক্ষেত্রে প্রথম পদ $=5$, এবং সাধারণ অন্তর $=\frac{13}{3}-5=-\frac{2}{3}$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমষ্টি $=\frac{20}{2}\{2\times 5+(20-1)\times(-\frac{2}{3})\}$

$=10(10-\frac{19\times 2}{3})=10.(-\frac{8}{3})=-26\frac{2}{3}$.

উদা. 2. নিম্নলিখিত রাশিমালার মান নির্ণয় কর :

$1+2+3+4+\cdots 100$-সংখ্যক পদ পর্যন্ত।

স্পষ্টতঃ, প্রদত্ত রাশিমালার পদসংখ্যা 100 এবং শেষ পদ $=100$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমষ্টি $=\frac{100}{2}(1+100)=50\times 101=5050$.

উদা. 3. কোন স্থত্রের সাহায্য না লইয়া, $1+4+7+10+\cdots+37$-এর সমষ্টি নির্ণয় কর। [C. U. 1919]

এক্ষেত্রে প্রথম পদ $=1$, সাধারণ অন্তর $=3$ এবং পদসংখ্যা $=13$; এখন S, নির্ণেয় সমষ্টি বুঝাইলে, স্পষ্টতঃ,

$$S=1+4+7+\cdots+31+34+37.$$

আবার, বিপরীতক্রমে সাজাইয়া,

$$S=37+34+31+\cdots+7+4+1.$$

অতএব, যোগ করিয়া,

$2S=38+38+38+\cdots 13$-সংখ্যক পদ পর্যন্ত

$=38\times 13.$

$$\therefore \quad S=\frac{38\times 13}{2}=19\times 13=247.$$

উদা 4. কোন সূত্রের সাহায্য না লইয়া, $1+3+5+7+\cdots n$-সংখ্যক পদ পর্যন্ত রাশিমালার মান নির্ণয় কর। [C. U. 1911]

স্পষ্টতঃ, প্রদত্ত শ্রেণীর সাধারণ অন্তর $=2$,

এবং শেষ পদ $= n$-তম পদ $= 1+(n-1)\times 2 = 2n-1$.

এখন, নির্ণেয় সমষ্টিকে S দ্বারা সূচিত করিলে,

$$S=1+3+5+7+\cdots+(2n-3)+(2n-1).$$

আবার, বিপরীতক্রমে লিখিয়া,

$$S=(2n-1)+(2n-3)+(2n-5)+\cdots 3+1\ ;$$

অতএব, যোগ করিয়া,

$2S = 2n+2n+2n+\cdots n$-সংখ্যক পদ পর্যন্ত

$= n.2n$.

$\therefore\ S=n^2$.

প্রশ্নমালা 12

নিম্নলিখিত শ্রেণীসমূহের সমষ্টি নির্ণয় কর (Find the sum of the following series) :

1. $1+2+3+4+\cdots$ 25-সংখ্যক পদ পর্যন্ত।

2. $1+3+5+7+\cdots$ 30- " " " ।

3. $-3, 3, 9, 15, \cdots$ 14- " " " ।

4. $\frac{3}{5}+\frac{5}{5}+\frac{7}{5}+\cdots\cdots$ 20- " " " ।

5. $\frac{7}{11}+\frac{13}{22}+\frac{6}{11}+\cdots$ 30- " " " ।

6. $1\frac{1}{7}+1+\frac{6}{7}+\frac{5}{7}+\cdots$ 16 " " " ।

7. $3+4+8+9+13+14+18+19+\cdots 20$-সংখ্যক পদ পর্যন্ত। [C. U. F. A. 1881]

[প্রদত্ত শ্রেণী $=(3+4)+(8+9)+(13+14)+(18+19)+\cdots 10$-সংখ্যক পদ পর্যন্ত

$=7+17+27+37+\cdots 10$-সংখ্যক পদ পর্যন্ত

$=\frac{\{14+(10-1)\times 10\}}{2}\times 10=520.$]

8. $5+4\frac{3}{4}+4\frac{1}{2}+\cdots$ 21-সংখ্যক পদ পর্যন্ত।

9. $13+12\frac{1}{3}+11\frac{2}{3}+\cdots$ 40- " " " ।

10. $2+7+12+\cdots\cdots$ 101- " " " ।

11. $\frac{n-1}{n}+\frac{n-2}{n}+\frac{n-3}{n}+\cdots\cdots n$-সংখ্যক পদ পর্যন্ত।

12. $\frac{a-b}{a+b}+\frac{3a-2b}{a+b}+\frac{5a-3b}{a+b}+\cdots\cdots n$-সংখ্যক পদ পর্যন্ত।

13. $1+5+3+9+5+13+7+17+\cdots\cdots 30$-সংখ্যক পদ পর্যন্ত।

14. $\left(2-\frac{1}{n}\right)+\left(2-\frac{3}{n}\right)+\left(2-\frac{5}{n}\right)+\cdots\cdots n$-সংখ্যক পদ পর্যন্ত।

15. $(a+b)^2+(a^2+b^2)+(a-b)^2+\cdots\cdots n$-সংখ্যক পদ পর্যন্ত।

কোন সূত্রের সাহায্য না লইয়া নিম্নলিখিত শ্রেণীসমূহের সমষ্টি নির্ণয় কর (Find the sum of the following series without applying any formula):

16. $3+5+7+\cdots\cdots 29$-সংখ্যক পদ পর্যন্ত।

17. $-10-6-2+2+\cdots\cdots 22$-সংখ্যক পদ পর্যন্ত।

18. $(x-y)+(2x-3y)+(3x-5y)+\cdots\cdots n$-সংখ্যক পদ পর্যন্ত।

19. $5+8+11+\cdots\cdots+155.$

20. $8+3-2-7-12-\cdots\cdots n$-সংখ্যক পদ পর্যন্ত।

4·5. পূর্ববর্তী নিয়মে প্রদত্ত (1) এবং (2) দ্বারা সূচিত সূত্রদ্বয়ের প্রয়োগ :

উল্লিখিত সূত্রদ্বয়ের প্রয়োগবিধি বুঝাইবার জন্য নিম্নলিখিত উদাহরণগুলি দৃষ্টান্তস্বরূপ সন্নিবেশিত করা হইল।

উদা. 1. কোন সমান্তর-শ্রেণীর প্রথম পদ 17, শেষ পদ $-12\frac{3}{8}$ এবং পদসমূহের সমষ্টি $25\frac{7}{16}$; উহার সাধারণ অন্তর নির্ণয় কর।

ধরা যাক, প্রদত্ত শ্রেণীর পদসংখ্যা $=n$; তাহা হইলে, প্রদত্ত শর্তানুসারে,

$$25\frac{7}{16}=\frac{n}{2}\left\{17+\left(-12\frac{3}{8}\right)\right\}=\frac{n}{2}\left\{17-12\frac{3}{8}\right\}=\frac{n}{2}\times 4\frac{5}{8};$$

অথবা, $\frac{407}{16}=\frac{37n}{16}$. $\therefore\ n=\frac{407}{37}=11.$

উপরি-উক্ত শ্রেণীর সাধারণ অন্তর b হইলে, প্রদত্ত শর্তানুসারে,

$$-12\tfrac{3}{8}(=\text{একাদশ পদ})=17+10b$$

$\therefore\ 10b=-12\frac{3}{8}-17=-29\frac{3}{8}=-\frac{235}{8};$

$\therefore\ b=-\frac{235}{8\times 10}=-\frac{5\times 47}{5\times 2\times 8}=-\frac{47}{16}.$

উদা. 2. কোন সমান্তর-শ্রেণীর পদসমূহের সমষ্টি 72, প্রথম পদ 17, এবং সাধারণ অন্তর -2 ; উহার পদসংখ্যা নির্ণয় কর এবং দুইটি উত্তরের কারণ ব্যাখ্যা কর।

ধরা যাক, নির্ণেয় পদসংখ্যা $= n$.

তাহা হইলে, $72 = \frac{n}{2}\left\{2 \times 17 + \left(n-1\right)\left(-2\right)\right\} = \frac{n}{2}\left\{34 - 2\left(n-1\right)\right\}$

$$= \frac{n}{2}\left(36 - 2n\right) = 18n - n^2.$$

$\therefore \quad n^2 - 18n + 72 = 0$, অথবা, $(n-6)(n-12) = 0$.

$\therefore \quad n = 6$ অথবা 12.

সুতরাং প্রদত্ত শ্রেণীর ছয়টি পদের সমষ্টি এবং বারটি পদের সমষ্টি উভয়ই এক। ইহার কারণ, শ্রেণীটি সম্পূর্ণরূপে লিখিলেই স্পষ্ট বুঝা যাইবে।

কারণ, শ্রেণীটির প্রথম 6টি পদ যথাক্রমে 17, 15, 13, 11, 9, 7 ; এবং প্রথম 12টি পদ যথাক্রমে 17, 15, 13, 11, 9, 7, 5, 3, 1, -1, -3, -5 ; এবং শেষোক্ত পদসমূহের শেষের ছয়টি পদের যোগফল 0 বলিয়া স্পষ্টতঃ উভয় ক্ষেত্রেই পদসমূহের যোগফল একই হইবে।

উদা. 3. $-8, -6, -4, \cdots\cdots$ ইত্যাদি শ্রেণীর কয়টি পদের সমষ্টি 52 হইবে ?

উক্ত শ্রেণীর n-সংখ্যক পদের সমষ্টি যেন 52.

তাহা হইলে, $52 = \frac{n}{2}\left\{2 \times \left(-8\right) + \left(n-1\right) \times 2\right\}$

$$= \frac{n}{2}\left(2n - 18\right) = n^2 - 9n.$$

$\therefore \quad n^2 - 9n - 52 = 0$; অথবা, $(n-13)(n+4) = 0$.

$\therefore \quad n = 13$ অথবা -4.

যেহেতু পদসংখ্যা অবশ্যই অখণ্ড ধনসংখ্যা হইবে, সেইহেতু, n-এর মান -4 হইতে পারে না ; সুতরাং, n-এর নির্ণেয় মান $= 13$.

উদা. 4. কোন সমান্তর-শ্রেণীর সপ্তম পদ পর্যন্ত সমষ্টি 112 এবং দ্বাদশ পদ পর্যন্ত সমষ্টি 282 ; n-সংখ্যক পদ পর্যন্ত উহার সমষ্টি নির্ণয় কর।

ধরা যাক, প্রথম পদ $= a$; সাধারণ অন্তর $= b$.

$$S_7{}^* = \tfrac{7}{2}\{2a + (7-1)b\} = 112.$$

$$\therefore \quad \frac{7}{2}\left\{2a + 6b\right\} = 112 ;$$

* S এর নিচে পদসংখ্যাটি লিখিলে সেই পদ পর্যন্ত যোগফল বুঝায়। যথা, S_7 = সপ্তম পদ পর্যন্ত যোগফল, S_{12} = দ্বাদশ পদ পর্যন্ত যোগফল ; S_n = n-তম পদ পর্যন্ত যোগফল।

অথবা, $7(a+3b)=112,$ $\cdots (1)$

$$S_{12}=\frac{12}{2}\left\{2a+(12-1)b\right\}=282\ ;$$

$\therefore$ $\frac{12}{2}\left\{2a+11b\right\}=282,$

অথবা, $6(2a+11b)=282$ $\cdots (2)$

সমীকরণ (1) এবং (2) হইতে $a=7$ এবং $b=3$ পাওয়া যায়।

$$\therefore\ S_n=\frac{n}{2}\left\{2.7+(n-1)3\right\}=\frac{n}{2}(3n+11).$$

উদা. 5. কোন সমান্তর-শ্রেণীর 20-তম পদ 61 ; ঐ শ্রেণীর 39-তম পদ পর্যন্ত সমষ্টি নির্ণয় কর।

ধরা যাক, প্রথম পদ $=a$ এবং সাধারণ অন্তর $=b$;

$\therefore$ 20-তম পদ $=a+(20-1)b=a+19b$;

$\therefore$ $a+19b=61.$

39-তম পদ পর্যন্ত যোগফল $=\frac{39}{2}\left\{2a+(39-1)b\right\}$

$$=\frac{39}{2}\{2a+38b\}=39(a+19b)$$

$$=39\times 61=2379.$$

উদা. 6. কোন সমান্তর-শ্রেণীর n-তম পদ $\frac{2+n}{3}$; ঐ শ্রেণীটি এবং 31-সংখ্যক পদ পর্যন্ত উহার সমষ্টি নির্ণয় কর।

পদগুলি যেন $t_1, t_2, t_3, t_4, \ldots$

n-এর মান 1, 2, 3, 4,$\cdots$বসাইয়া পদগুলি পাওয়া যায়,

$t_1=\frac{2+1}{3}=\frac{3}{3}=1,\ t_2=\frac{2+2}{3}=1\frac{1}{3},\ t_3=1\frac{2}{3},\ t_4=2,$ ইত্যাদি।

$\therefore$ শ্রেণীটি $=1,\ 1\frac{1}{3},\ 1\frac{2}{3},\ 2, \cdots$

$$S_{31}=\frac{31}{2}\left\{2.1+(31-1).\frac{1}{3}\right\}=\frac{31}{2}\left\{2+10\right\}=\frac{31}{2}\times 12=186.$$

উদা. 7. কোন সমান্তর-শ্রেণীর p-সংখ্যক পদের সমষ্টি q, এবং q-সংখ্যক পদের সমষ্টি p ; উহার $p+q$-সংখ্যক পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

প্রদত্ত শ্রেণীর প্রথম পদ a এবং সাধারণ অন্তর যেন b ; তাহা হইলে প্রদত্ত শর্তানুসারে,

$$q = \frac{p}{2}\left\{2a + \left(p-1\right)b\right\};\ \text{অথবা},\ 2q = p.2a + p(p-1).b \cdots (1)$$

এবং $$p = \frac{q}{2}\left\{2a + \left(q-1\right)b\right\};\ \text{অথবা},\ 2p = q.2a + q(q-1).b \cdots (2)$$

$\therefore$ (1) হইতে (2) বিয়োগ করিয়া,

$$2(q-p) = (p-q).2a + \{(p^2 - q^2) - (p-q)\}b$$
$$= (p-q).2a + (p-q)(p+q-1)b;$$
$$\therefore\ -2 = 2a + (p+q-1)b.$$

অতএব, $p+q$-সংখ্যক পদের সমষ্টি $= \frac{p+q}{2}\left\{2a + \left(p+q-1\right)b\right\}$

$$= \frac{p+q}{2} \times \left(-2\right) = -\left(p+q\right).$$

প্রশ্নমালা 13

1. কোন সমান্তর-শ্রেণীর প্রথম পদ 5, পদসংখ্যা 30 এবং উহাদের সমষ্টি 1455 ; উহার সাধারণ অন্তর নির্ণয় কর।

2. কোন সমান্তর-শ্রেণীর প্রথম পদ 2 এবং পঞ্চম পদ 7 হইলে, ঐ শ্রেণীর কত-সংখ্যক পদের সমষ্টি 63 হইবে ?

3. কোন সমান্তর-শ্রেণীর প্রথম পদ 1, শেষ পদ 50 এবং সমষ্টি 204 হইলে, উহার সাধারণ অন্তর কত হইবে ?

4. 19, 17, 15,......... ইত্যাদি শ্রেণীটির কত-সংখ্যক পদের সমষ্টি 91 হইবে ?

5. 21, 19, 17,......... ইত্যাদি শ্রেণীর কতক পদের সমষ্টি 120 হইলে, ঐ শ্রেণীর পদসংখ্যা এবং শেষ পদ নির্ণয় কর।

6. 54, 51, 48,......... ইত্যাদি শ্রেণীর কত-সংখ্যক পদের সমষ্টি 513 ? দুইটি উত্তরের কারণ ব্যাখ্যা কর।

7. কোন সমান্তর-শ্রেণীর প্রথম 8 পদের সমষ্টি 64 এবং প্রথম 19 পদের সমষ্টি 361 হইলে, উহার n-সংখ্যক পদের সমষ্টি কত ?

8. কোন সমান্তর-শ্রেণীর 25-তম পদ 49 ; উহার 49-সংখ্যক পদ পর্যন্ত সমষ্টি নির্ণয় কর।

9. প্রমাণ কর যে, 4, 12, 20, 28,...... শ্রেণীর n-সংখ্যক পদ পর্যন্ত সমষ্টি একটি যুগ্মসংখ্যার বর্গ। [C. U. 1939]

10. 750 এবং 1000-এর মধ্যবর্তী 13-এর গুণিতকগুলির সমষ্টি নির্ণয় কর। [C. U. 1935]

11. কোন সমান্তর-শ্রেণীর n-তম পদ $\frac{3+n}{4}$; ঐ শ্রেণী নিরূপণ কর এবং উহার প্রথম 105-সংখ্যক পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

12. কোন সমান্তর-শ্রেণীর r-তম পদ $2r-1$ হইলে, উক্ত শ্রেণী নির্ণয় কর এবং উহার n-সংখ্যক পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

13. কোন সমান্তর-শ্রেণীর n-সংখ্যক পদের সমষ্টি $3n^2-n$; উহার প্রথম পদ নির্ণয় কর।

14. কোন সমান্তর-শ্রেণীর n-সংখ্যক পদের সমষ্টি 40, সাধারণ অন্তর 2 এবং শেষ পদ 13; n-এর সাংখ্যমান নির্ণয় কর।

15. প্রমাণ কর যে, কোন সমান্তর-শ্রেণীর প্রথম $2n$ পদের শেষার্ধের সমষ্টি, ঐ শ্রেণীর $3n$-সংখ্যক পদের সমষ্টির এক-তৃতীয়াংশ।

16. প্রমাণ কর যে, 1, 3, 5, 7, 9,...... ইত্যাদি শ্রেণীর $2n+1$ পদের মধ্যে 1, 5, 9,... ইত্যাদি একান্তর পদসমূহের সমষ্টির সহিত অবশিষ্ট পদসমূহ (যথা, 3, 7, 11,...... ইত্যাদি)-এর সমষ্টির অনুপাত $n+1 : n$-এর সমান হইবে।

17. প্রমাণ কর যে, (i) $b=\frac{l^2-a^2}{2s-(l+a)}$; এবং (ii) $s=\frac{l+a}{2b}(l-a+b)$.

18. কোন সমান্তর-শ্রেণীর m-সংখ্যক পদের সমষ্টি n এবং n-সংখ্যক পদের সমষ্টি m হইলে, দেখাও যে, উহার $m+n$-সংখ্যক পদের সমষ্টি $-(m+n)$. [C. U. 1950]

19. কোন সরল রাস্তার উপর 5 মিটার অন্তর একখানা করিয়া 100 খানা প্রস্তরখণ্ড আছে। প্রথম প্রস্তরখণ্ড হইতে 5 মিটার দূরে রক্ষিত একটি ঝুড়ি হইতে রওনা হইয়া, দৌড়াইয়া একটি একটি করিয়া প্রস্তরখণ্ডগুলিকে কুড়াইয়া ঝুড়িতে রাখিতে কোন লোককে মোট কত কিলোমিটার পথ দৌড়াইতে হইবে?

4·6. সমান্তর-মধ্যক (Arithmetic means)।

সংজ্ঞা 1. তিনটি রাশি সমান্তর-শ্রেণীভুক্ত হইলে মধ্যমটিকে প্রথম ও তৃতীয়টির **সমান্তর-মধ্যক** বলে।

3, 5, 7, এই সমান্তর-শ্রেণীভুক্ত সংখ্যা-তিনটির মধ্যে 5-কে 3 ও 7-এর সমান্তর-মধ্যক বলা হয়।

সংজ্ঞা 2. দুইটি নির্দিষ্ট সংখ্যা, A ও B, যদি অপর কতকগুলি সংখ্যা $x_1, x_2, x_3, \cdots\cdots, x_{n-1}, x_n$-এর সহিত এরূপভাবে সম্বদ্ধ হয় যে, $A, x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x_n, B$ একটি সমান্তর-শ্রেণী, তাহা হইলে $x_1, x_2, x_3, \cdots\cdots, x_{n-1}, x_n$ সংখ্যাগুলিকে A ও B-এর মধ্যবর্তী (n-সংখ্যক) **সমান্তর-মধ্যক** বলে।

উদাহরণস্বরূপ, 3, 4, 5, 6, 7 সংখ্যাগুলি 2 এবং 8-এর সমান্তর-মধ্যক; কারণ, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 একটি সমান্তর-শ্রেণী। তদ্রূপ, $3\frac{1}{2}$, 5, $6\frac{1}{2}$ সংখ্যাগুলি 2 এবং 8-এর সমান্তর-মধ্যক; কারণ, 2, $3\frac{1}{2}$, 5, $6\frac{1}{2}$, 8 একটি সমান্তর-শ্রেণী।

টীকা। উপরিউক্ত সংজ্ঞা হইতে পরিষ্কাররূপে বুঝা যায় যে, দুইটি নির্দিষ্ট সংখ্যার মধ্যে অসংখ্য রকমের সমান্তর-মধ্যক সন্নিবেশিত করা যাইতে পারে।

4·7. দুইটি নির্দিষ্ট সংখ্যার মধ্যে নির্দিষ্ট-সংখ্যক সমান্তর-মধ্যক সন্নিবেশিত করিতে হইবে।

(*To insert a given number of arithmetic means between two given numbers.*)

a এবং c এই সংখ্যাদ্বয়ের মধ্যে যেন n-সংখ্যক সমান্তর-মধ্যক সন্নিবেশিত করিতে হইবে; অর্থাৎ, এরূপ n-সংখ্যক রাশি $x_1, x_2, x_3, x_4, \cdots\cdots, x_{n-1}, x_n$ নির্ণয় করিতে হইবে, যেন $a, x_1, x_2, x_3, \cdots\cdots, x_{n-1}, x_n, c$ এক সমান্তর-শ্রেণী হয়। স্পষ্টতঃ, $a, x_1, x_2, x_3, \cdots\cdots, x_n, c$ সমান্তর-শ্রেণীতে $n+2$-সংখ্যক পদ আছে এবং ইহাদের মধ্যে a প্রথম পদ এবং c শেষ পদ { অর্থাৎ, $(n+2)$-তম পদ }; এখন b উক্ত শ্রেণীর সাধারণ অন্তর হইলে, স্পষ্টতঃ,

$$c = a + (n+1)b \; ; \text{ সুতরাং, } \; b = \frac{c-a}{n+1}.$$

অতএব,
$$x_1 = a + b = a + \frac{c-a}{n+1};$$
$$x_2 = a + 2b = a + \frac{2(c-a)}{n+1};$$
$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$
$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$
$$x_n = a + nb = a + \frac{n(c-a)}{n+1}.$$

উদা. 1. a এবং b-এর সমান্তর-মধ্যক নির্ণয় কর।

নির্ণেয় সমান্তর-মধ্যক যেন x; তাহা হইলে a, x, b সমান্তর-শ্রেণীভুক্ত তিনটি সংখ্যা।

$\therefore \; x - a = b - x$; অতএব, $x = \frac{1}{2}(a+b)$.

উদা. 2. 3 এবং 18-এর মধ্যে চারিটি সমান্তর-মধ্যক সন্নিবেশিত কর।

নির্ণেয় সমান্তর-মধ্যক চারিটিকে x_1, x_2, x_3, x_4 দ্বারা সূচিত করা হইল।

তাহা হইলে $3, x_1, x_2, x_3, x_4, 18$ সমান্তর-শ্রেণী।

অতএব, b উহার সাধারণ অন্তর হইলে,

$$18 = 3 + 5b\ ; \qquad \therefore\ b = 3.$$

সুতরাং, $x_1 = 3 + b = 3 + 3 = 6\ ;$

$x_2 = 3 + 2b = 3 + 2.3 = 9$

$x_3 = 3 + 3b = 3 + 3.3 = 12\ ;$

$x_4 = 3 + 4b = 3 + 4.3 = 15.$

$\therefore$ 6, 9, 12, 15 সংখ্যা-চারিটিই নির্ণেয় সমান্তর-মধ্যক।

উদা. 3. 2 এবং 57-এর মধ্যে n-সংখ্যক সমান্তর-মধ্যক সন্নিবেশিত করিয়া দেখা গেল যে, দ্বিতীয় মধ্যক : $(n-2)$-তম মধ্যক $= 2 : 7$; n-এর মান নির্ণয় কর।

2 এবং 57-এর মধ্যে n-সংখ্যক সমান্তর-মধ্যক থাকিলে, মোট পদসংখ্যা $(n+2)$. ঐ শ্রেণীর প্রথম পদ $= 2$ এবং $(n+2)$-তম পদ $= 57$.

ধরা যাক, সাধারণ অন্তর $= b$;

$\therefore$ $(n+2)$-তম পদ $= 2 + (n+2-1)b = 57$,

অথবা, $(n+1)b = 55.$ ... ... (1)

দ্বিতীয় মধ্যক $= 2 + 2b$ এবং $(n-2)$-তম মধ্যক $= (n-1)$-তম পদ $= 57 - 3b$.

প্রদত্ত শর্ত হইতে

$$\frac{2+2b}{57-3b} = \frac{2}{7};$$

অথবা, $14 + 14b = 114 - 6b$;

অথবা, $20b = 100$; $\therefore\ b = 5.$

b-এর মান সমীকরণ (1)-এ বসাইয়া

$(n+1)5 = 55$;

অথবা, $5n + 5 = 55$; অথবা, $5n = 50$; $\therefore\ n = 10.$

প্রশ্নমালা 14

1. নিম্নলিখিত সংখ্যাদ্বয়ের সমান্তর-মধ্যক নির্ণয় কর (Find the Arithmetic means between) :

(i) 5 ও 8 ; (ii) -5 ও 21 ; (iii) $m-n$ ও $m+n$;

(iv) $(a+x)^2$ ও $(a-x)^2$.

2. নিম্নলিখিত সংখ্যাদ্বয়ের মধ্যে দুইটি সমান্তর-মধ্যক নির্ণয় কর :
(i) 8 ও 12 ; (ii) -6 ও 14.

3. 117 ও 477-এর মধ্যে তিনটি সমান্তর-মধ্যক সন্নিবেশিত কর।

4. 2 ও -18-এর মধ্যে চারিটি সমান্তর-মধ্যক সন্নিবেশিত কর।

5. $3\frac{1}{2}$ ও $-41\frac{1}{2}$-এর মধ্যে 17টি সমান্তর-মধ্যক সন্নিবেশিত কর।

6. 1 ও 31-এর মধ্যে n-সংখ্যক সমান্তর-মধ্যক সন্নিবেশিত করিয়া দেখা গেল যে, সপ্তম মধ্যক : $(n-1)$-তম মধ্যক $=5:9$; n-এর মান নির্ণয় কর।

4·8. স্বাভাবিক সংখ্যা (Natural Numbers) : 1, 2, 3, 4,⋯ ইত্যাদি সংখ্যাগুলিকে **স্বাভাবিক সংখ্যা (Natural Numbers)** বলে।

(i) প্রথম n-সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার সমষ্টি নির্ণয় (*To find the sum of the first n natural numbers*) :

অর্থাৎ, $1+2+3+4+\cdots\cdots+n$-এর মান নির্ণয়।

নির্ণেয় সমষ্টিকে যেন S দ্বারা সূচিত করা হইল।

তাহা হইলে, $S=1+2+3+\cdots\cdots+n=\frac{n}{2}(1+n)=\frac{n(n+1)}{2}$ ⋯ (ক)

(ii) প্রথম n-সংখ্যক অযুগ্ম স্বাভাবিক সংখ্যার সমষ্টি নির্ণয় (*To find the sum of the first n odd natural numbers*) :

নির্ণেয় সমষ্টিকে S দ্বারা সূচিত করিলে,

$$S=1+3+5+7+\cdots\cdots n\text{-সংখ্যক পদ পর্যন্ত}$$

$$=\frac{n}{2}\left\{2+\left(n-1\right)\times 2\right\}=\frac{n}{2}\times 2n=\boldsymbol{n^2}. \quad \cdots \text{ (খ)}$$

(iii) প্রথম n-সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার বর্গসমূহের সমষ্টি নির্ণয় (*To find the sum of the squares of the first n natural numbers*) :

অর্থাৎ, $1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2$-এর মান নির্ণয়।

নির্ণেয় সমষ্টিকে S দ্বারা সূচিত করা হইল। তাহা হইলে,

$$S=1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots\cdots+n^2.$$

স্পষ্টতঃ $n^3-(n-1)^3=3n^2-3n+1$, একটি অভেদ।

উক্ত অভেদে, n-এর পরিবর্তে ক্রমান্বয়ে 1, 2, 3, 4,⋯⋯, n বসাইয়া,

$$1^3-0^3=3.1^2-3.1+1\ ;$$
$$2^3-1^3=3.2^2-3.2+1\ ;$$

$$3^3-2^3=3.3^2-3.3+1\ ;$$
$$4^3-3^3=3.4^2-3.4+1\ ;$$
$$\cdots\qquad\cdots\qquad\cdots$$
$$(n-1)^3-(n-2)^3=3.(n-1)^2-3.(n-1)+1\ ;$$
$$n^3-(n-1)^3=3.n^2-3.n+1.$$

অতএব, যোগ করিয়া,

$$n^3=3(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)-3(1+2+3+\cdots\cdots+n)+n$$
$$=3S-3\frac{n(n+1)}{2}+n.$$
$$\therefore\quad 3S=n^3-n+\frac{3n(n+1)}{2}=n(n+1)\left\{(n-1)+\frac{3}{2}\right\};$$
$$\therefore\quad S=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\qquad\cdots\qquad\cdots\qquad\cdots\ (গ)$$

(iv) প্রথম n-সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার ঘনসমূহের সমষ্টি নির্ণয় (*To find the sum of the cubes of the first n natural numbers*) ঃ

নির্ণেয় সমষ্টিকে S দ্বারা সূচিত করা হইল ; অর্থাৎ

$$S=1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+n^3.$$

স্পষ্টতঃ, $n^4-(n-1)^4=4n^3-6n^2+4n-1$, একটি অভেদ।

উক্ত অভেদে n-এর পরিবর্তে ক্রমান্বয়ে 1, 2, 3, ···, n বসাইলে,

$$1^4-0^4=4.1^3-6.1^2+4.1-1\ ;$$
$$2^4-1^4=4.2^3-6.2^2+4.2-1\ ;$$
$$3^4-2^4=4.3^3-6.3^2+4.3-1\ ;$$
$$\cdots\qquad\cdots\qquad\cdots$$
$$(n-1)^4-(n-2)^4=4.(n-1)^3-6.(n-1)^2+4.(n-1)-1\ ;$$
$$n^4-(n-1)^4=4.n^3-6.n^2+4.n-1.$$

$\therefore$ যোগ করিয়া,

$$n^4=4(1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3)-6(1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2)$$
$$+4(1+2+3+\cdots\cdots+n)-n$$
$$=4S-6.\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+4\cdot\frac{n(n+1)}{2}-n.$$

$$\therefore \quad 4S = n^4 + n + n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1)$$
$$= n(n+1)\{(n^2 - n + 1) + (2n+1) - 2\} = n(n+1)(n^2+n)$$
$$= n(n+1).n(n+1).$$

$$\therefore \quad S = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2. \qquad \cdots \qquad \cdots \quad (ঘ)$$

উপরিলিখিত ফল হইতে দেখা যায় যে,

প্রথম n-সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার ঘন-এর সমষ্টি, ঐ সংখ্যাসমূহের সমষ্টির বর্গের সমান।

উদা. 1. $1.2 + 2.3 + 3.4 + \cdots n$-সংখ্যক পদ পর্যন্ত,—ইহার মান নির্ণয় কর।

স্পষ্টতঃ, উক্ত শ্রেণীর n-তম পদ $= n(n+1) = n^2 + n$.

অতএব, n-এর পরিবর্তে 1 বসাইয়া প্রথম পদ $= 1^2 + 1$;

" " " 2 " দ্বিতীয় পদ $= 2^2 + 2$;

" " " 3 " তৃতীয় পদ $= 3^2 + 3$;

... ...

ইত্যাদি।

সুতরাং, নির্ণেয় মান S দ্বারা সূচিত করিলে,

$$S = (1^2+1) + (2^2+2) + (3^2+3) + (4^2+4) + \cdots n\text{-সংখ্যক পদ পর্যন্ত}$$
$$= (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots n\text{-সংখ্যক পদ পর্যন্ত})$$
$$+ (1 + 2 + 3 + 4 + \cdots n\text{-সংখ্যক পদ পর্যন্ত})$$
$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}\left\{\frac{2n+1}{3} + 1\right\}$$
$$= \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

উদা. 2. নিম্নলিখিত রাশিমালার মান নির্ণয় কর :

$1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + \cdots n$-সংখ্যক পদ পর্যন্ত।

স্পষ্টতঃ উপরিউক্ত রাশিমালার প্রত্যেকটি পদ 1, 3, 5, 7,$\cdots$ শ্রেণীর অনুরূপ পদের বর্গ ; কাজেই, প্রদত্ত রাশিমালার n-তম পদ 1, 3, 5, 7,$\cdots$ শ্রেণীটির n-তম পদের বর্গের সমান। অর্থাৎ,

$$\text{প্রদত্ত রাশিমালার } n\text{-তম পদ} = \{1 + (n-1) \times 2\}^2 = (2n-1)^2$$
$$= 4n^2 - 4n + 1.$$

এখন, n-এর পরিবর্তে 1 বসাইয়া প্রথম পদ $= 4.1^2 - 4.1 + 1$;

" " " 2 " দ্বিতীয় পদ $= 4.2^2 - 4.2 + 1$;

" " " 3 " তৃতীয় পদ $= 4.3^2 - 4.3 + 1$;

... ...

ইত্যাদি।

কাজেই, নির্ণেয় মান S দ্বারা সূচিত করিলে,

$$S = 4.(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots\cdots n\text{-সংখ্যক পদ পর্যন্ত })$$
$$- 4.(1 + 2 + 3 + \cdots\cdots n\text{-সংখ্যক পদ পর্যন্ত }) + n$$
$$= 4.\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 4.\frac{n(n+1)}{2} + n$$
$$= 2n(n+1)\left(\frac{2n+1}{3} - 1\right) + n = \frac{2n(n+1) \times 2(n-1)}{3} + n$$
$$= \frac{n}{3}\{4(n^2-1)+3\} = \frac{n}{3}(4n^2-1).$$

উদা. 3. নিম্নলিখিত রাশিমালার মান নির্ণয় কর :

$$1.3^2 + 2.4^2 + 3.5^2 + \cdots\cdots n\text{-সংখ্যক পদ পর্যন্ত।}$$

স্পষ্টতঃ, প্রদত্ত রাশিমালার n-তম পদ

$$= n(n+2)^2 = n(n^2 + 4n + 4) = n^3 + 4n^2 + 4n.$$

এখন, n-এর পরিবর্তে 1, 2, 3, $\cdots\cdots$, n বসাইয়া,

প্রথম পদ $= 1^3 + 4.1^2 + 4.1$;

দ্বিতীয় পদ $= 2^3 + 4.2^2 + 4.2$;

তৃতীয় পদ $= 3^3 + 4.3^2 + 4.3$;

... ...

... ...

n-তম পদ $= n^3 + 4n^2 + 4n$.

নির্ণেয় মান S দ্বারা সূচিত করিলে,

$$S = (1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3) + 4(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2)$$
$$+ 4(1 + 2 + 3 + \cdots + n)$$
$$= \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2 + 4.\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{4n(n+1)}{2}$$

$$=\frac{n^2(n+1)^2}{4}+\frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}+2n(n+1)$$

$$=n(n+1)\left\{\frac{n(n+1)}{4}+\frac{2(2n+1)}{3}+2\right\}$$

$$=\frac{n}{12}(n+1)(3n^2+19n+32).$$

উদা. 4. নিম্নলিখিত রাশিমালার মান নির্ণয় কর :

$1^2+(1^2+2^2)+(1^2+2^2+3^2)+\cdots$ n-সংখ্যক পদ পর্যন্ত।

স্পষ্টতঃ, প্রদত্ত রাশিমালার n-তম পদ

$$=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{n(2n^2+3n+1)}{6}$$

$$=\tfrac{1}{3}n^3+\tfrac{1}{2}n^2+\tfrac{1}{6}n.$$

$\therefore$ প্রথম পদ $=\frac{1}{3}.1^3+\frac{1}{2}.1^2+\frac{1}{6}.1$;

দ্বিতীয় পদ $=\frac{1}{3}.2^3+\frac{1}{2}.2^2+\frac{1}{6}.2$;

তৃতীয় পদ $=\frac{1}{3}.3^3+\frac{1}{2}.3^2+\frac{1}{6}.3$;

... ...

ইত্যাদি

সুতরাং, নির্ণেয় মান S দ্বারা সূচিত করিলে,

$$S=\tfrac{1}{3}(1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3)+\tfrac{1}{2}(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)+\tfrac{1}{6}(1+2+3+\cdots+n)$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{n^2(n+1)^2}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{n(n+1)}{2}$$

$$=\frac{n(n+1)}{12}\{n(n+1)+(2n+1)+1\}=\frac{n(n+1)}{12}(n^2+3n+2)$$

$$=\frac{n(n+1)^2(n+2)}{12}.$$

প্রশ্নমালা 15

নিম্নলিখিত রাশিমালাসমূহের মান নির্ণয় কর (Sum the series) :

1. $2^2+5^2+8^2+\cdots\cdots$ n-সংখ্যক পদ পর্যন্ত।
2. $1.2^2+2.3^2+3.4^2+\cdots\cdots$ n-সংখ্যক পদ পর্যন্ত।

3. $1.3+3.5+5.7+7.9+\cdots\cdots n$-সংখ্যক পদ পর্যন্ত।

4. $1^3+3^3+5^3+\cdots\cdots n$-সংখ্যক পদ পর্যন্ত।

5. $1+(1+2)+(1+2+3)+\cdots n$-সংখ্যক পদ পর্যন্ত।

6. $1+(1+3)+(1+3+5)+\cdots\cdots n$-সংখ্যক পদ পর্যন্ত।

7. $1.2.3+2.3.4+3.4.5+\cdots\cdots n$-সংখ্যক পদ পর্যন্ত।

8. $2.3.1+3.4.4+4.5.7+\cdots\cdots n$-সংখ্যক পদ পর্যন্ত।

9. $1-2+3-4+5-6+\cdots\cdots n$-সংখ্যক পদ পর্যন্ত।

10. $1^2-2^2+3^2-4^2+5^2-6^2+\cdots\cdots n$-সংখ্যক পদ পর্যন্ত।

11. $1.1+2.3+3.5+4.7+\cdots\cdots n$-সংখ্যক পদ পর্যন্ত।

12. $1+(2+3)+(4+5+6)+\cdots\cdots n$-সংখ্যক পদ পর্যন্ত।

4·9. অঙ্ক কষিবার বিবিধ কৌশল ও বিবিধ প্রশ্নমালা।

উদা. 1. কোন সমান্তর-শ্রেণীর পদসংখ্যা অযুগ্ম হইলে, প্রমাণ করিতে হইবে যে, উহার প্রথম ও শেষ পদদ্বয়ের সমষ্টি মধ্য-পদ (Middle term)-এর দ্বিগুণের সমান।

পদসংখ্যা অযুগ্ম বলিয়া উহাকে $2n+1$ দ্বারা সূচিত করা যাক। তাহা হইলে মধ্য-পদ হইবে সেইটি, যাহার পূর্বে n-সংখ্যক পদ এবং পরেও n-সংখ্যক পদ থাকিবে। কাজেই, উহা প্রথম হইতে গণনায় বা শেষ হইতে গণনায় $(n+1)$-তম পদ হইবে। এখন, প্রথম পদকে a দ্বারা, সাধারণ অন্তরকে b দ্বারা এবং মধ্য-পদটিকে M দ্বারা সূচিত করিলে স্পষ্টতঃ,

$$M=a+(\overline{n+1}-1)b=a+nb.$$

আবার, $$M=l+(\overline{n+1}-1)\times(-b)$$
$$=l-nb.$$

অতএব, যোগ করিয়া, $2M=a+l$.

উদা. 2. প্রমাণ কর যে, কোন সমান্তর-শ্রেণীর অযুগ্ম-সংখ্যক পদের সমষ্টি পদসংখ্যা ও মধ্য-পদের গুণফলের সমান।

ধরা যাক, পদসংখ্যা $=2n+1$, প্রথম পদ $=a$ এবং শেষ পদ $=l$.

তাহা হইলে, পদসমূহের সমষ্টি

$$=\frac{2n+1}{2}(a+l)=\frac{2n+1}{2}\times 2M \quad [\text{ উদা. 1 }]$$
$$=(2n+1)\times M.$$

উদা. 3. যে সমান্তর-শ্রেণীর প্রথম n-সংখ্যক পদের সমষ্টি $= 5n^2 + 3n$, তাহার প্রথম পাঁচটি পদ নির্ণয় কর।

সমান্তর-শ্রেণীর প্রথম, দ্বিতীয়, তৃতীয়, চতুর্থ, $\cdots$, n-তম পদগুলিকে যথাক্রমে $t_1, t_2, t_3, t_4, \cdots\cdots, t_n$ দ্বারা এবং একপদ, দুইপদ, তিনপদ, চারিপদ, $\cdots\cdots$ n-সংখ্যক পদের সমষ্টিগুলি যথাক্রমে $s_1, s_2, s_3, s_4, \cdots\cdots, s_n$ দ্বারা সূচিত করা হইল। তাহা হইলে, $s_1 = t_1$; $s_2 = t_1 + t_2$; $s_3 = t_1 + t_2 + t_3$; ইত্যাদি।

এখন প্রদত্ত শর্তানুসারে, $s_n = 5n^2 + 3n$.

অতএব, n-এর পরিবর্তে ক্রমান্বয়ে 1, 2, 3, 4, 5, $\cdots\cdots$ বসাইয়া,

$s_1 = 5.1^2 + 3.1 = 8 = t_1$; $\quad \therefore \; t_1 = s_1 = 8$;

$s_2 = 5.2^2 + 3.2 = 26 = t_1 + t_2$; $\quad \therefore \; t_2 = s_2 - s_1 = 26 - 8 = 18$;

$s_3 = 5.3^2 + 3.3 = 54 = t_1 + t_2 + t_3$; $\quad \therefore \; t_3 = s_3 - s_2 = 54 - 26 = 28$;

$s_4 = 5.4^2 + 3.4 = 92 = t_1 + t_2 + t_4 + t_4$;

$\therefore \; t_4 = s_4 - s_3 = 92 - 54 = 38$;

$s_5 = 5.5^2 + 3.5 = 140 = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5$;

$\therefore \; t_5 = s_5 - s_4 = 140 - 92 = 48.$

সুতরাং, নির্ণেয় পদ-পাঁচটি যথাক্রমে 8, 18, 28, 38, 48.

উদা. 4. নিম্নলিখিত রাশিমালার মান নির্ণয় কর :

$1 + 5 + 12 + 22 + 35 + \cdots$ n-সংখ্যক পদ পর্যন্ত।

প্রদত্ত রাশিমালার বিশেষত্ব এই যে, উহাতে ক্রমান্বয়ে লব্ধ সন্নিহিত পদদ্বয়ের অন্তরসমূহ এক সমান্তর-শ্রেণী উৎপন্ন করে। এখন, নির্ণেয় মান S দ্বারা এবং n-তম পদ t_n দ্বারা সূচিত করা হইল। তাহা হইলে,

$$S = 1 + 5 + 12 + 22 + 35 + \cdots\cdots + t_{n-1} + t_n$$

এবং $S = 0 + 1 + 5 + 12 + 22 + \cdots\cdots + t_{n-2} + t_{n-1} + t_n.$

বিয়োগ করিয়া, $0 = (1 + 4 + 7 + 10 + 13 + \cdots\cdots$ n-সংখ্যক পদ পর্যন্ত $) - t_n.$

$\therefore \quad t_n = 1 + 4 + 7 + 10 + 13 + \cdots\cdots$ n-সংখ্যক পদ পর্যন্ত

$$= \frac{n}{2}\{2.1 + (n-1) \times 3\} = \frac{n}{2}(3n - 1) = \tfrac{3}{2}n^2 - \tfrac{1}{2}n.$$

$\therefore$ প্রথম পদ $= \frac{3}{2}.1^2 - \frac{1}{2}.1$;

দ্বিতীয় পদ $= \frac{3}{2}.2^2 - \frac{1}{2}.2$;

তৃতীয় পদ $= \frac{3}{2}.3^2 - \frac{1}{2}.3$; $\cdots$ ইত্যাদি।

$\therefore$ যোগ করিয়া, $S=\frac{3}{2}(1^2+2^2+3^2+\cdots n$-সংখ্যক পদ পর্যন্ত)

$-\frac{1}{2}(1+2+3+\cdots n$-সংখ্যক পদ পর্যন্ত)

$$=\frac{3}{2}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{1}{2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}$$

$$=\frac{n(n+1)}{4}\{(2n+1)-1\}=\frac{n(n+1)}{4}\cdot 2n=\frac{n^2(n+1)}{2}.$$

উদা. 5. নিম্নলিখিত রাশিমালার মান নির্ণয় কর :

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\cdots n\text{-সংখ্যক পদ পর্যন্ত।}$$

নির্ণেয় মান S দ্বারা এবং প্রথম, দ্বিতীয়, তৃতীয়, $\cdots$, n-তম পদগুলিকে যথাক্রমে $t_1, t_2, t_3, \cdots\cdots, t_n$ দ্বারা সূচিত করা হইল। তাহা হইলে,

$$t_1=\frac{1}{1.2}=1-\frac{1}{2};$$

$$t_2=\frac{1}{2.3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3};$$

$$t_3=\frac{1}{3.4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4};$$

$\cdots \quad \cdots \quad \cdots$

$$t_n=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}.$$

$$\therefore \quad S=t_1+t_2+t_3+\cdots+t_n=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}.$$

উদা. 6. 15-কে এরূপ তিন সংখ্যায় বিভক্ত কর, যেন উহারা সমান্তর-শ্রেণীভুক্ত হয় এবং উহাদের গুণফল 120 হয়।

নির্ণেয় সংখ্যা-তিনটি যেন যথাক্রমে $\alpha-\beta$, α এবং $\alpha+\beta$; স্পষ্টতঃ ইহারা সমান্তর-শ্রেণীভুক্ত। তাহা হইলে প্রদত্ত শর্তানুসারে,

$(\alpha-\beta)+\alpha+(\alpha+\beta)=15$; অথবা, $3\alpha=15$; $\therefore\ \alpha=5$;

এবং $(\alpha-\beta.)\alpha.(\alpha+\beta)=120$; অথবা, $(\alpha^2-\beta^2).\alpha=120$;

অথবা, $\alpha^2-\beta^2=24.$

$\therefore\ \beta^2=\alpha^2-24=25-24=1.$ $\quad\therefore\ \beta=1$ অথবা $-1.$

সুতরাং, নির্ণেয় সংখ্যাত্রয় $5-1, 5, 5+1$, অর্থাৎ, 4, 5, 6 ;

অথবা, $5+1, 5, 5-1$, অর্থাৎ, 6, 5, 4.

বস্তুতঃ, উভয় সমাধান একই প্রকার সংখ্যাসমূহ জ্ঞাপন করে।

অতএব, 4, 5, 6-ই নির্ণেয় তিনটি সংখ্যা।

উদা. 7. চারিটি সংখ্যা সমান্তর-শ্রেণীভুক্ত। উহাদের অন্ত্যসংখ্যা দুইটির (two extremes) সমষ্টি 10 এবং মধ্যক (means) দুইটির গুণফল 24. সংখ্যাগুলি নির্ণয় কর। [C. U. 1943]

নির্ণেয় সংখ্যা-চারিটি যেন যথাক্রমে $a-3\beta$, $a-\beta$, $a+\beta$ এবং $a+3\beta$; সাধারণ অন্তর 2β.

তাহা হইলে প্রদত্ত শর্তানুসারে,

$$a-3\beta+a+3\beta=10,$$

অথবা, $2a=10$; $\therefore\ a=5$.

$$(a-\beta)(a+\beta)=24;$$

অথবা, $a^2-\beta^2=24$;

অথবা, $-\beta^2=24-a^2=24-25=-1$.

$\therefore\ \beta^2=1$; $\therefore\ \beta=\pm 1$;

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যাগুলি $\beta=+1$ লইয়া, $(5-3)$, $(5-1)$, $(5+1)$ এবং $(5+3)$;

অথবা, $\beta=-1$ লইয়া, $(5+3)$, $(5+1)$, $(5-1)$ এবং $(5-3)$

$=2, 4, 6$ এবং 8 বা $8, 6, 4$ এবং 2.

দ্রষ্টব্য। আলোচ্য পদসংখ্যা অযুগ্ম হইলে, সাধারণতঃ মধ্যপদ a এবং সাধারণ অন্তর β ধরা হয়, আর আলোচ্য পদসংখ্যা যুগ্ম হইলে, মধ্যপদদ্বয় $a-\beta$ এবং $a+\beta$ এবং সাধারণ অন্তর 2β ধরা হয়। উদা. 6 এবং উদা. 7 দেখ।

উদা. 8. a^2, b^2, c^2 এই রাশি-তিনটি সমান্তর-শ্রেণীভুক্ত হইলে, প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}$ রাশি-তিনটি সমান্তর-শ্রেণীভুক্ত হইবে।

প্রদত্ত শর্তানুসারে, $b^2-a^2=c^2-b^2$;

অথবা, $(b-a)(b+a)=(c-b)(c+b)$;

অথবা, $\frac{b-a}{b+c}=\frac{c-b}{b+a}$;

অথবা, $\frac{(b+c)-(c+a)}{(b+c)(c+a)}=\frac{(c+a)-(b+a)}{(b+a)(c+a)}$;

অথবা, $\frac{1}{c+a}-\frac{1}{b+c}=\frac{1}{b+a}-\frac{1}{c+a}$.

$\therefore$ $\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}$ রাশি-তিনটি সমান্তর-শ্রেণীভুক্ত।

উদা. 9. কোন সমান্তর-শ্রেণীর p-তম, q-তম এবং r-তম পদ যথাক্রমে a, b ও c হইলে, প্রমাণ কর যে, $a(q-r)+b(r-p)+c(p-q)=0$.

যে সমান্তর-শ্রেণীর a, b এবং c যথাক্রমে p-তম, q-তম এবং r-তম পদ, তাহার প্রথম পদ α এবং সাধারণ অন্তর যেন β ; তাহা হইলে,

$$a=\alpha+(p-1)\beta \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$$

$$b=\alpha+(q-1)\beta \quad \cdots \quad \cdots \quad (2)$$

$$c=\alpha+(r-1)\beta \quad \cdots \quad \cdots \quad (3)$$

এখন, এই সমীকরণ-তিনটি হইতে α এবং β-কে অপসারণ করিতে হইবে।

(2)-কে (1) হইতে এবং (3)-কে (2) হইতে বিয়োগ করিয়া,

$$a-b=(p-q)\beta,$$

$$b-c=(q-r)\beta.$$

সুতরাং, $(a-b)(q-r)=(b-c)(p-q)$;

অথবা, $a(q-r)+b(r-p)+c(p-q)=0$.

উদা. 10. এক ব্যক্তি তাঁহার বন্ধুকে এই শর্তে 1000 টাকা ধার দিতে রাজি হইলেন যে, তিনি বন্ধুর নিকট কোন সুদ দাবি করিবেন না এবং আসল টাকাও মাসিক কিস্তিতে ক্রমশঃ 2 টাকা কম করিয়া আদায় করিবেন। প্রথম কিস্তির পরিমাণ 64 টাকা হইলে, কত মাসে উক্ত ঋণ শোধ হইয়া যাইবে ? [C. U. 1920]

নির্ণেয় মাসের সংখ্যা যেন n.

মাসিক কিস্তিগুলির পরিমাণ স্পষ্টতঃই সমান্তর-শ্রেণীভুক্ত ; এবং উহার প্রথম পদ $=64$ ও সাধারণ অন্তর $=-2$.

যেহেতু n-সংখ্যক কিস্তির সমষ্টি $=1000$ টাকা, অতএব, এই সমান্তর-শ্রেণীর প্রথম n-সংখ্যক পদের সমষ্টি $=1000$; অর্থাৎ,

$$\frac{n}{2}\{2\times 64+(n-1)(-2)\}=1000\,;$$

অথবা, $(65n-n^2)=1000$; অথবা, $n^2-65n+1000=0$;

অথবা, $(n-25)(n-40)=0$.

সুতরাং, $n=25$ অথবা 40.

কিন্তু n, 40 হইতে পারে না, কারণ, সেক্ষেত্রে

40-তম কিস্তির পরিমাণ = উপরিউক্ত সমান্তর-শ্রেণীর 40-তম পদ

$=64+(-2)(40-1)=-14$, একটি ঋণ-রাশি ;

সুতরাং, ইহা গ্রহণযোগ্য নহে, কারণ, কোন কিস্তির পরিমাণই ঋণাত্মক হইতে পারে না। $\therefore \quad n = 25.$

অতএব, 25 মাসে ঋণ শোধ হইবে।

প্রশ্নমালা 16

1. কোন সমান্তর-শ্রেণীর $(n+1)$-তম পদটি $\dfrac{ma - nb}{a - b}$ হইলে, শ্রেণীটির প্রথম $(2n+1)$-সংখ্যক পদসমূহের সমষ্টি নির্ণয় কর।

2. কোন শ্রেণীর প্রথম n-সংখ্যক পদের সমষ্টি $2n^2 + 7n$ হইলে, উহার প্রথম পাঁচটি পদ নির্ণয় কর।

3. কোন সমান্তর-শ্রেণীর প্রথম n-সংখ্যক পদের সমষ্টি $3n^2 + 10n$; উহার প্রথম পদ ও সাধারণ অন্তর নির্ণয় কর।

4. কোন সমান্তর-শ্রেণীর প্রথম n-সংখ্যক পদের সমষ্টি $n^2 + n$ হইলে, উহার 35-তম পদটি নির্ণয় কর।

নিম্নলিখিত রাশিমালার মান নির্ণয় কর (Sum the following series) :

5. $1 + 3 + 6 + 10 + 15 + \cdots\cdots$ n-সংখ্যক পদ পর্যন্ত।

6. $2 + 5 + 10 + 17 + \cdots\cdots$ n-সংখ্যক পদ পর্যন্ত।

7. $2 + 7 + 14 + 23 + 34 + \cdots\cdots$ n-সংখ্যক পদ পর্যন্ত।

8. $1 + 4 + 8 + 13 + 19 + \cdots\cdots$ n-সংখ্যক পদ পর্যন্ত।

9. (i) $\dfrac{1}{3.5} + \dfrac{1}{5.7} + \dfrac{1}{7.9} + \cdots\cdots$ n-সংখ্যক পদ পর্যন্ত।

(ii) $\dfrac{1}{a(a+b)} + \dfrac{1}{(a+b)(a+2b)} + \dfrac{1}{(a+2b)(a+3b)} + \cdots$ n-সংখ্যক পদ পর্যন্ত।

10. সমান্তর-শ্রেণীভুক্ত এইরূপ চারিটি সংখ্যা নির্ণয় কর, যাহাদের যোগফল 56 এবং যাহাদের বর্গসমূহের যোগফল 864.

[ধর, সংখ্যাগুলি $\alpha - 3\beta, \alpha - \beta, \alpha + \beta$ ও $\alpha + 3\beta$.]

11. সমান্তর-শ্রেণীভুক্ত তিনটি সংখ্যার যোগফল 15, এবং অন্ত্যসংখ্যা-দুইটির (two extremes) বর্গের যোগফল 58. সংখ্যাগুলি কত ?

12. সমান্তর-শ্রেণীভুক্ত চারিটি সংখ্যার মধ্যে অন্ত্যসংখ্যা-দুইটির যোগফল 8, এবং মধ্যক-দুইটির গুণফল 15. সংখ্যা-চারিটি কত ?

13. সমান্তর-শ্রেণীভুক্ত এরূপ ছয়টি সংখ্যা নির্ণয় কর, যেন উহাদের অন্ত্যসংখ্যা-দুইটির যোগফল 16 এবং মধ্যপদদ্বয়ের সাংখ্যমান-দুইটির গুণফল 63 হয়।

[ধর, সংখ্যাগুলি $\alpha-5\beta$, $\alpha-3\beta$, $\alpha-\beta$, $\alpha+\beta$, $\alpha+3\beta$ এবং $\alpha+5\beta$.]

14. a, b এবং c যথাক্রমে কোন সমান্তর-শ্রেণীর p, q এবং r-সংখ্যক পদের সমষ্টি হইলে, প্রমাণ কর যে, $\frac{a}{p}\left(q-r\right)+\frac{b}{q}\left(r-p\right)+\frac{c}{r}\left(p-q\right)=0.$

[D. B. 1943, '45]

15. (i) $(b-c)^2$, $(c-a)^2$, $(a-b)^2$ সমান্তর-শ্রেণীভুক্ত হইলে, দেখাও যে,

$\frac{1}{b-c}$, $\frac{1}{c-a}$ এবং $\frac{1}{a-b}$ও সমান্তর-শ্রেণীভুক্ত হইবে।

(ii) a, b, c সমান্তর-শ্রেণীভুক্ত হইলে, দেখাও যে,

(1) $\frac{1}{bc}$, $\frac{1}{ca}$ এবং $\frac{1}{ab}$ সমান্তর-শ্রেণীভুক্ত হইবে।

(2) $b+c$, $c+a$, $a+b$ সমান্তর-শ্রেণীভুক্ত হইবে।

(3) $a^2(b+c)$, $b^2(c+a)$, $c^2(a+b)$ সমান্তর-শ্রেণীভুক্ত হইবে।

(4) $\frac{1}{a}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$, $\frac{1}{b}\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)$, $\frac{1}{c}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$ সমান্তর-শ্রেণীভুক্ত হইবে।

(5) $a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$, $b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)$, $c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$ সমান্তর-শ্রেণীভুক্ত হইবে।

(6) $(a+2b-c)(2b+c-a)(c+a-b)=4abc.$

16. রাশিমালার মান নির্ণয় কর :

$3\times7+5\times10+7\times13+9\times16\cdots n$-সংখ্যক পদ পর্যন্ত।

17. কোন সমান্তর-শ্রেণীর p-তম পদটি a এবং q-তম পদটি b. দেখাও যে, প্রথম $(p+q)$-সংখ্যক পদগুলির সমষ্টি $\frac{p+q}{2}\left\{a+b+\frac{a-b}{p-q}\right\}$.

[মাদ্রাজ, 1887]

18. 3 এবং 54-এর মধ্যে n-সংখ্যক সমান্তরীয় মধ্যক আছে এবং 8-তম মধ্যক : $(n-2)$-তম মধ্যক $=3:5$; n-এর মান নির্ণয় কর।

19. S_1, S_2, S_3 তিনটি সমান্তর-শ্রেণীর n-সংখ্যক পদের সমষ্টি হইলে এবং প্রত্যেকটির প্রথম পদ 1 এবং সাধারণ অন্তরগুলি যথাক্রমে 1, 2, 3 হইলে, প্রমাণ কর যে, $S_1+S_3=2S_2$.

20. r-সংখ্যক সমান্তর-শ্রেণীর প্রত্যেকটির প্রথম পদ 1 এবং সাধারণ অন্তরগুলি

1, 2, 3,……, r হইলে, দেখাও যে, উহাদের n-তম পদগুলির সমষ্টি $=\frac{1}{2}\{(n-1).r^2+(n+1).r\}$.

21. রাশিমালার মান নির্ণয় কর :

$$n.1+(n-1).2+(n-2).3+(n-3).4+\cdots\cdots 1.n.$$

[r-তম পদ $=\{n-(r-1)\}.r=(n+1)r-r^2$.
সুতরাং, নির্ণেয় মান $=(n+1)\{1+2+3+\cdots+n\}$
$-\{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)=\cdots$]

22. n-সংখ্যক প্রস্তরখণ্ডকে এরূপভাবে সাজানো হইল যে, প্রথম ও দ্বিতীয়টির মধ্যবর্তী দূরত্ব এক মিটার, দ্বিতীয় ও তৃতীয়টির মধ্যবর্তী দূরত্ব তিন মিটার, তৃতীয় ও চতুর্থটির মধ্যবর্তী দূরত্ব পাঁচ মিটার এবং এইরূপ। প্রথম খণ্ডের নিকট স্থাপিত একটি ঝুড়ির মধ্যে প্রস্তরখণ্ডগুলিকে এক একটি করিয়া আনিতে হইলে, এক ব্যক্তির কত পথ চলিতে হইবে ?

23. কোন ক্লাসের ছাত্রগণের বয়স একটি সমান্তর-শ্রেণী গঠন করে এবং উহার সাধারণ অন্তর চারি মাস। কনিষ্ঠ বালকটির বয়স ঠিক 8 বৎসর এবং বালকগণের বয়সের সমষ্টি 168 বৎসর হইলে, ক্লাসের ছাত্রসংখ্যা নির্ণয় কর।

[কলিঃ প্রবেশিকা, 1872]

24. কোন ঋজুরেখক্ষেত্রের অন্তঃকোণগুলি একটি সমান্তর-শ্রেণীভুক্ত হইলে এবং ক্ষুদ্রতম কোণটি 42° এবং সাধারণ অন্তর 33° হইলে, ক্ষেত্রটির বাহুগুলির সংখ্যা নির্ণয় কর।

25. একজন লোক 65 টাকার ঋণ কিস্তিতে শোধ করিবার এরূপ শর্ত করিল যে, প্রথম মাসে 2 টাকা দিবে এবং পরে মাসে মাসে 1 টাকা করিয়া অধিক শোধ করিতে থাকিবে। কয় মাসে তাহার ঋণ শোধ হইয়া যাইবে ?

পঞ্চম অধ্যায়

প্রগতি (Progression) :

গুণোত্তর-শ্রেণী (Geometrical Progression)

5·1. কোন সংখ্যাকে অপর এক নির্দিষ্ট ধ্রুবক (constant) সংখ্যা দ্বারা ক্রমশঃ গুণ করিতে থাকিলে ক্রমান্বয়-লব্ধ গুণফলসমূহ এক গুণোত্তর-শ্রেণী উৎপন্ন করে। উল্লিখিত ধ্রুবক সংখ্যাটিকে উক্ত শ্রেণীর **সাধারণ অনুপাত** (common ratio), এবং বিভিন্ন গুণফলগুলিকে ঐ শ্রেণীর পদ বলে। যথা,

1,	2,	4,	8,	16,······ইত্যাদি ;
1,	$\frac{1}{2}$,	$\frac{1}{4}$,	$\frac{1}{8}$,	$\frac{1}{16}$,······ " ;
1,	$-\frac{1}{3}$,	$\frac{1}{9}$,	$-\frac{1}{27}$,	$\frac{1}{81}$,······ " ;
a	ar,	ar^2,	ar^3,	ar^4,······ " ;

প্রভৃতি শ্রেণীগুলির প্রত্যেকটিই এক গুণোত্তর-শ্রেণী। প্রথমটিতে সাধারণ অনুপাত 2, দ্বিতীয়টিতে সাধারণ অনুপাত $\frac{1}{2}$, তৃতীয়টিতে সাধারণ অনুপাত $-\frac{1}{3}$, এবং চতুর্থটিতে সাধারণ অনুপাত r.

উল্লিখিত দৃষ্টান্তগুলি হইতে স্পষ্টই দেখা যায় যে, তিন বা ততোধিক পদবিশিষ্ট কোন শ্রেণীতে যে-কোন পদের সহিত উহার অব্যবহিত পূর্ববর্তী পদের অনুপাত যদি সকল সময় একই হয়, তাহা হইলে ঐ শ্রেণীটিকে **গুণোত্তর-শ্রেণী** বলে ; এবং উক্ত অনুপাতনির্দিষ্ট সংখ্যাটিকে ঐ শ্রেণীর **সাধারণ অনুপাত** বলা হয়।

কাজেই, **কোন গুণোত্তর-শ্রেণীর সাধারণ অনুপাত নির্ণয় করিতে হইলে উহার যে-কোন পদকে তাহার অব্যবহিত পূর্ব পদ দ্বারা ভাগ করিতে হয়।**

5.2· কোন গুণোত্তর-শ্রেণীর n-তম পদ নির্ণয়।

(To find the nth term of a G. P.)

একটি গুণোত্তর-শ্রেণীর প্রথম পদ a এবং সাধারণ অনুপাত যেন r, তাহা হইলে স্পষ্টতঃ, ঐ শ্রেণীর দ্বিতীয় পদ $=ar$; তৃতীয় পদ $=ar.r=ar^2$; চতুর্থ পদ $=ar^2.r=ar^3$; ······ ; দশম পদ $=ar^9$; একবিংশ পদ $=ar^{20}$; ইত্যাদি।

সুতরাং, **n-তম পদ $=ar^{n-1}$.**

উদাহরণ। 2, 6, 18, 54,……ইত্যাদি শ্রেণীটির ষষ্ঠ পদ নির্ণয় কর।

এক্ষেত্রে প্রথম পদ $a=2$, এবং সাধারণ অনুপাত $=\frac{6}{2}=3$,

$\therefore$ নির্ণেয় ষষ্ঠ পদ $=2\times 3^{6-1}=2\times 3^5=486.$

5·3. কোন গুণোত্তর-শ্রেণীর যে-কোন দুই পদ দেওয়া আছে ; গুণোত্তর-শ্রেণীটিকে সম্পূর্ণরূপে নির্ণয় করিতে হইবে।

(*Given any two terms of a G. P., to find it completely.*)

উদা. 1. কোন গুণোত্তর-শ্রেণীর পঞ্চম পদ 81 এবং অষ্টম পদ 2187 ; শ্রেণীটি নির্ণয় কর।

নির্ণেয় শ্রেণীর প্রথম পদ a এবং সাধারণ অনুপাত যেন r.

তাহা হইলে প্রদত্ত শর্তানুসারে, $ar^4=81$ … … (1)

এবং $ar^7=2187,$ … … (2)

$\therefore$ ভাগ করিয়া, $r^3=\frac{2187}{81}=27$; $\therefore$ $r=3.$

পুনরায়, (1) হইতে, $a=\dfrac{81}{r^4}=\dfrac{81}{3^4}=\dfrac{81}{81}=1.$

সুতরাং, নির্ণেয় শ্রেণী 1, 3, 9, 27, …… ইত্যাদি।

উদা. 2. 2, −6, 18, −54,… ইত্যাদি শ্রেণীর n-তম পদ নির্ণয় কর।

এখানে $a=2$, $b=\dfrac{-6}{2}=-3.$

$\therefore$ n-তম পদ $=a.r^{n-1}=2.(-3)^{n-1}.$

টীকা। এক্ষেত্রে পদটি ঋণাত্মক বা ধনাত্মক তাহা বলা যায় না। n-এর মান অযুগ্ম (odd) হইলে, $(n-1)$-এর মান যুগ্ম (even) হইবে, তাহা হইলে $(-3)^{n-1}$-এর মান ধনাত্মক হইবে এবং পদটি ধনাত্মক। আর n-এর মান যুগ্ম হইলে, $(n-1)$-এর মান অযুগ্ম হইবে এবং $(-3)^{n-1}$-এর মান ঋণাত্মক হইবে এবং পদটি ঋণাত্মক।

উদা. 3. $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8},\cdots$ ইত্যাদি শ্রেণীর সপ্তম পদ নির্ণয় কর।

এখানে $a=1$, $r=\dfrac{-\frac{1}{2}}{1}=-\frac{1}{2}$,

সপ্তম পদ $=a.r^{7-1}=a.r^6=1.(-\frac{1}{2})^6=\dfrac{1}{2^6}=\dfrac{1}{64}.$

উদা. 4. 2, 6, 18, 54, ... ইত্যাদি শ্রেণীটির কোন্ পদ 4374 ?

4374 যেন শ্রেণীটির n-তম পদ।

এখানে $a=2$, $r=\frac{6}{2}=3$.

$\therefore$ n-তম পদ $=a.r^{n-1}=2.3^{n-1}$;

$\therefore$ $2.3^{n-1}=4374$;

অথবা, $3^{n-1}=2187=3^7$;

$\therefore$ $n-1=7$; $\therefore$ $n=8$.

$\therefore$ নির্ণেয় পদটি অষ্টম পদ।

উদা. 5. কোন গুণোত্তর-শ্রেণীর পঞ্চম পদ 48 এবং দ্বাদশ পদ 6144 ; প্রথম পদ ও সাধারণ অনুপাত নির্ণয় কর। [D. B. 1928]

ধরা যাক, প্রথম পদ $=a$, সাধারণ অনুপাত $=r$.

তাহা হইলে, পঞ্চম পদ $=a.r^4$;

দ্বাদশ পদ $=a.r^{11}$;

$\therefore$ $\dfrac{a.r^{11}}{a.r^4}=\dfrac{6144}{48}$;

অথবা, $r^7=128=2^7$;

$\therefore$ $r=2$.

$a.2^4=48$;

$\therefore$ $a=\dfrac{48}{2^4}=3$.

$\therefore$ নির্ণেয় প্রথম পদ $=3$, সাধারণ অনুপাত $=2$.

উদা. 6. কোন গুণোত্তর-শ্রেণীর p-তম ও q-তম পদ-দুইটি যথাক্রমে c ও d ; শ্রেণীটিকে সম্পূর্ণরূপে নির্ণয় করিতে হইবে।

নির্ণেয় শ্রেণীর প্রথম পদ ও সাধারণ অনুপাত যেন যথাক্রমে a এবং r. তাহা হইলে, $c=ar^{p-1}$ ... ... (1)

এবং $d=ar^{q-1}$ ... ... (2)

(1) ও (2) হইতে, ভাগ করিয়া, $r^{q-p}=\dfrac{d}{c}$; $\therefore$ $r=\left(\dfrac{d}{c}\right)^{\frac{1}{q-p}}$.

অতএব, (1) হইতে, $a=\dfrac{c}{r^{p-1}}=\dfrac{c}{\left(\dfrac{d}{c}\right)^{\frac{p-1}{q-p}}}=\dfrac{c.c^{\frac{p-1}{q-p}}}{d^{\frac{p-1}{q-p}}}=\left(\dfrac{c^{q-1}}{d^{p-1}}\right)^{\frac{1}{q-p}}$.

সুতরাং, প্রথম পদ ও সাধারণ অনুপাত নির্ণীত হইল বলিয়া নির্ণেয় শ্রেণীর সকল পদই ক্রমশঃ লিখিয়া যাইতে পারা যায়।

প্রশ্নমালা 17

1. $4, 12, 36, \cdots\cdots$ ইত্যাদি শ্রেণীর অষ্টম পদ নির্ণয় কর।

2. $3\frac{3}{8}, 2\frac{1}{4}, 1\frac{1}{2}, \cdots\cdots$ ইত্যাদি শ্রেণীর ষষ্ঠ পদ নির্ণয় কর।

3. $1, 4, 16, 64, \cdots\cdots$ ইত্যাদি শ্রেণীর নবম পদ নির্ণয় কর।

4. $1, -3, 9, -27, \cdots\cdots$ ইত্যাদি শ্রেণীর ষষ্ঠ পদ নির্ণয় কর।

5. $\frac{3}{2}, -1, \frac{2}{3}, \cdots\cdots$ ইত্যাদি শ্রেণীর পঞ্চম এবং $(n-1)$-তম পদ নির্ণয় কর।

6. $-21, 14, -9\frac{1}{3}, \cdots\cdots$ ইত্যাদি শ্রেণীর সপ্তম পদ নির্ণয় কর।

7. কোন গুণোত্তর-শ্রেণীর প্রথম দুই পদ যথাক্রমে 125 এবং 25 হইলে, উহার ষষ্ঠ এবং সপ্তম পদ-দুইটি কত হইবে ?

8. $\sqrt{3}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\dfrac{1}{3\sqrt{3}}+\cdots\cdots$ ইত্যাদি শ্রেণীটির n-তম পদ নির্ণয় কর।

9. কোন গুণোত্তর-শ্রেণীর প্রথম পদ 2, দশম পদ 1 ; সাধারণ অনুপাত নির্ণয় কর। [C. U. 1925]

10. ছয়টি সংখ্যা গুণোত্তর-শ্রেণীভুক্ত হইলে, প্রমাণ কর যে, প্রথম ও শেষ পদের গুণফল তৃতীয় ও চতুর্থ পদের গুণফলের সমান।

11. কোন গুণোত্তর-শ্রেণীর প্রথম পদ-দুইটি 3 এবং 1. দশম পদটি নির্ণয় কর। [C. U. 1913]

12. কোন গুণোত্তর-শ্রেণীর পঞ্চম পদ 32 এবং দ্বাদশ পদ 4096. প্রথম পদ ও সাধারণ অনুপাত নির্ণয় কর।

13 কোন গুণোত্তর-শ্রেণীর পঞ্চম পদ 81 এবং দ্বিতীয় পদ 24 ; শ্রেণীটি নির্ণয় কর। [W. B. S. E. H. S. 1962]

14. $16, 8, 4, 2, \cdots$ ইত্যাদি শ্রেণীর কোন্ পদ $\frac{1}{16}$?

15. কোন গুণোত্তর-শ্রেণীর নিম্নলিখিত পদদ্বয় দেওয়া আছে; শ্রেণীটি নির্ণয় করিতে হইবে : (i) ষষ্ঠ পদ $=192$ এবং একাদশ পদ $=6144$;

(ii) দ্বিতীয় পদ $=9$ এবং অষ্টম পদ $=\frac{1}{81}$;

(iii) পঞ্চম পদ $=8$ এবং অষ্টম পদ $=-\frac{64}{27}$.

16. কোন গুণোত্তর-শ্রেণীর p-তম ও q-তম পদদ্বয় যথাক্রমে c ও d হইলে, উহার n-তম পদটি নির্ণয় কর।

17. দেখাও যে, কোন গুণোত্তর-শ্রেণীর সকল পদকেই যে-কোন একই সংখ্যা দ্বারা গুণ বা ভাগ করিলে এতল্লব্ধ শ্রেণীটিও গুণোত্তরীয় হইবে।

18. কোন গুণোত্তর-শ্রেণীর $(p+q)$-তম পদ m এবং $(p-q)$-তম পদ n হইলে, উহার p-তম এবং q-তম পদ-দুইটি নির্ণয় কর। [B. U. 1888]

19. দেখাও যে, যে-কোন গুণোত্তর শ্রেণীতে প্রথম ও শেষ পদ হইতে সমদূরবর্তী পদদ্বয়ের গুণফল এক ধ্রুবক সংখ্যা হইবে।

5·4. গুণোত্তর-শ্রেণীর নির্দিষ্ট-সংখ্যক পদসমূহের সমষ্টি নির্ণয়। (*To find the sum of a number of terms in Geometrical Progression.*)

কোন গুণোত্তর-শ্রেণীর প্রথম পদ a, সাধারণ অনুপাত যেন r, এবং প্রথম n-সংখ্যক পদের সমষ্টি যেন s.

তাহা হইলে, $s = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots\cdots + ar^{n-1}$.

$$\therefore \quad s.r = \quad ar + ar^2 + ar^3 + \cdots\cdots + ar^{n-1} + ar^n.$$

অতএব, বিয়োগ করিয়া,

$$s.r - s = ar^n - a; \quad \text{অথবা,} \quad s.(r-1) = a(r^n - 1).$$

$$\therefore \quad s = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$$

$$\text{অথবা,} \quad = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}. \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (2)$$

অনুসি.। উপরিউক্ত শ্রেণীর শেষ (অর্থাৎ, n-তম) পদ l হইলে, স্পষ্টতঃ, $l = ar^{n-1}$; সুতরাং, (1) হইতে, $s = \dfrac{rl - a}{r - 1}$. $\cdots \quad \cdots \quad (3)$

টীকা। r-এর সাংখ্যমান 1 অপেক্ষা বড় না হইলে, (2) দ্বারা সূচিত সূত্রটি ব্যবহার করা সুবিধাজনক।

উদা. 1. $\frac{16}{27} - \frac{8}{9} + \frac{4}{3} - \cdots$সপ্তম পদ পর্যন্ত রাশিমালার মান নির্ণয় কর।

সাধারণ অনুপাত $= -\frac{8}{9} \div \frac{16}{27} = -\frac{8}{9} \times \frac{27}{16} = -\frac{3}{2}$.

$\therefore$ (2) দ্বারা সূচিত সূত্র হইতে,

$$\text{নির্ণেয় সমষ্টি} = \frac{\frac{16}{27}\{1 - (-\frac{3}{2})^7\}}{1 + \frac{3}{2}} = \frac{\frac{16}{27}(1 + \frac{2187}{128})}{\frac{5}{2}}$$

$$= \frac{16}{27} \times \frac{2315}{128} \times \frac{2}{5} = \frac{463}{108} = 4\frac{31}{108}.$$

উদা. 2. $3 + 4\frac{1}{2} + 6\frac{3}{4} + \cdots\cdots$পঞ্চম পদ পর্যন্ত রাশিমালার মান নির্ণয় কর।

সাধারণ অনুপাত $= 4\frac{1}{2} \div 3 = \frac{9}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{3}{2}$.

$\therefore$ (1) দ্বারা সূচিত সূত্র অনুসারে,

নির্ণেয় সমষ্টি $= \dfrac{3\{(\frac{3}{2})^5 - 1\}}{\frac{3}{2} - 1} = \dfrac{3\{\frac{243}{32} - 1\}}{\frac{1}{2}}$

$$= 3 \times \tfrac{211}{32} \times 2 = \tfrac{633}{16} = 39\tfrac{9}{16}.$$

উদা. 3. কোন সূত্রের সাহায্য না লইয়া $1 + \frac{1}{3} + \dfrac{1}{3^2} + \cdots n$-তম পদ পর্যন্ত রাশিমালার মান নির্ণয় কর।

ধরা যাক, $t_1 = 1,\ t_2 = \frac{1}{3},\ t_3 = \dfrac{1}{3^2}$;

$\therefore\ t_n = \dfrac{1}{3^{n-1}}$.

এখন, নির্ণেয় সমষ্টি $= S$ ধরিলে,

$$S = 1 + \tfrac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots\cdots + \frac{1}{3^{n-1}} \qquad \cdots \quad (1)$$

$$\therefore\ \tfrac{1}{3}S = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots\cdots + \frac{1}{3^{n-1}} + \frac{1}{3^n} \qquad \cdots \quad (2)$$

(1) হইতে (2) বিয়োগ করিয়া, $\frac{2}{3}.\ S = 1 - \dfrac{1}{3^n}$;

$$\therefore\ S = \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{3^n}\right) = \frac{1}{2}\left(3 - \frac{1}{3^{n-1}}\right).$$

উদা. 4. 1, 3, 9, 27, ... শ্রেণীর কত পদ লইলে, রাশিমালার সমষ্টি 3080 হইবে?

গুণোত্তর-শ্রেণীটির n-সংখ্যক পদের সমষ্টি যেন 3280.

এক্ষেত্রে প্রথম পদ $= 1$ এবং সাধারণ অনুপাত $= \frac{3}{1} = 3$.

$$\frac{a(r^n - 1)}{r - 1} = S \text{ সূত্র হইতে, } \frac{1(3^n - 1)}{3 - 1} = 3280\ ;$$

অথবা, $3^n - 1 = 6560$;

$\therefore\ 3^n = 6561 = 3^8$; $\therefore\ n = 8$.

$\therefore$ নির্ণেয় পদসংখ্যা $= 8$.

প্রশ্নমালা 18

নিম্নলিখিত রাশিমালাসমূহের মান নির্ণয় কর (Sum the series) :

1. $1 + 3 + 9 + 27 + \cdots$ দ্বাদশ পদ পর্যন্ত।

2. $81 - 27 + 9 - \cdots$ অষ্টম পদ পর্যন্ত।

3. $2-4+8-\cdots$দশম পদ পর্যন্ত।

4. $\frac{4}{9}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\cdots$পঞ্চম পদ পর্যন্ত।

5. $2-4+8-\cdots 2r$-তম পদ পর্যন্ত।

6. $2\frac{1}{2}-1+\frac{2}{5}-\cdots n$-তম পদ পর্যন্ত।

7. কোন সূত্রের সাহায্য ব্যতীত, $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots$শ্রেণীর n-তম পদ পর্যন্ত রাশিমালার মান নির্ণয় কর। [C. U. 1938]

8. $(a-x)+(a^2-x^2)+(a^3-x^3)+\cdots+(a^n-x^n)$ রাশিমালার মান নির্ণয় কর। [C. U. 1930]

9. 4, 8, 16, 32, ⋯শ্রেণীর কত পদের সমষ্টি 1020 হইবে ?

10. দেখাও যে, কোন গুণোত্তর-শ্রেণীর p-তম পদ হইতে আরম্ভ করিয়া n-সংখ্যক পদের সমষ্টি ঐ শ্রেণীর q-তম পদ হইতে আরম্ভ করিয়া n-সংখ্যক পদের সমষ্টির r^{p-q} গুণ।

11. কোন গুণোত্তর-শ্রেণীর প্রথম পদ 5, শেষ পদ 320 এবং সমষ্টি 635 ; চতুর্থ পদটি নির্ণয় কর।

[ইঙ্গিত : সূত্র $S=\dfrac{rl-a}{r-1}$ প্রয়োগ কর।]

5·5. গুণোত্তর-মধ্যক (Geometric means)।

সংজ্ঞা 1. তিনটি সংখ্যা গুণোত্তর-শ্রেণীভুক্ত হইলে, মধ্যমটিকে প্রথম ও তৃতীয়ের **গুণোত্তর-মধ্যক** বলে।

সংজ্ঞা 2. $x_1, x_2, x_3, \cdots\cdots, x_n$ সংখ্যাগুলি যদি দুইটি নির্দিষ্ট সংখ্যা a ও b-এর সহিত এরূপভাবে সম্বন্ধ হয় যে, $a, x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, b$ শ্রেণীটি গুণোত্তরীয়, তাহা হইলে $x_1, x_2, x_3, \cdots\cdots, x_n$ সংখ্যাগুলিকে a ও b-এর অন্তর্বর্তী **গুণোত্তর-মধ্যক** বলে।

(i) দুইটি নির্দিষ্ট সংখ্যার গুণোত্তর-মধ্যক নির্ণয় করিতে হইবে।

(*To find the Geometric mean between two given quantities.*)

a ও b দুইটি নির্দিষ্ট সংখ্যা এবং G যেন উহাদের গুণোত্তর-মধ্যক।

তাহা হইলে a, G, b গুণোত্তর-শ্রেণীভুক্ত বলিয়া,

$\frac{G}{a}=\frac{b}{G}$; [প্রত্যেকটিই গুণোত্তর-শ্রেণীর সাধারণ অনুপাতের সমান।]

$\therefore \quad G^2=ab \; ; \qquad \therefore \quad G=\sqrt{ab}.$

(ii) দুইটি নির্দিষ্ট সংখ্যার মধ্যে কোন নির্দিষ্ট-সংখ্যক গুণোত্তর-মধ্যক সন্নিবেশিত করিতে হইবে। (*To insert a given number of Geometric means between two given quantities.*)

a ও b দুইটি নির্দিষ্ট সংখ্যা এবং $x_1, x_2, x_3, \cdots\cdots, x_n$ সংখ্যাগুলি যেন a ও b-এর অন্তর্বর্তী n-সংখ্যক গুণোত্তর-মধ্যক।

তাহা হইলে $a, x_1, x_2, x_3, \cdots\cdots, x_n, b$ এক গুণোত্তর-শ্রেণী, ইহার সাধারণ অনুপাতকে r দ্বারা সূচিত করিলে স্পষ্টতঃ,

$b =$ উক্ত শ্রেণীর $(n+2)$-তম পদ $= ar^{n+1}$;

$\therefore\ r^{n+1} = \frac{b}{a}$; অতএব, $r = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}$;

$\therefore\ x_1 = a.\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}$; $x_2 = a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{n+1}}$;

$x_3 = a.\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{3}{n+1}}$; ...... ইত্যাদি।

উদা. 1. (i) 16 এবং 256 ; (ii) a^5b^2 এবং ab^4-এর মধ্যে গুণোত্তর-মধ্যক সন্নিবেশিত কর।

(i) নির্ণেয় গুণোত্তর-মধ্যক $= \sqrt{16 \times 256} = \sqrt{16 \times 16 \times 4 \times 4} = 64.$

(ii) " " " $= \sqrt{a^5b^2 \times ab^4} = \sqrt{a^3.a^3.b^3.b^3} = a^3b^3.$

উদা. 2. 2 এবং 162-এর মধ্যে তিনটি গুণোত্তর-মধ্যক সন্নিবেশিত কর।

[C. U. 1949]

ধরা যাক, সাধারণ অনুপাত $= r$.

প্রদত্ত শর্ত হইতে শ্রেণীর পঞ্চম পদ $= 162$.

*$t_5 = ar^4 = 2.r^4$;

$\therefore\ 2.r^4 = 162$; $\therefore\ r^4 = 81$; $\therefore\ r = \pm 3.$

$\therefore$ প্রথম মধ্যক $= t_2 = ar = 2 \times (\pm 3) = 6$ বা -6,

দ্বিতীয় মধ্যক $= t_3 = ar^2 = 2 \times (\pm 3)^2 = 18$ বা 18,

তৃতীয় মধ্যক $= t_4 = ar^3 = 2 \times (\pm 3)^3 = 54$ বা -54 ;

$\therefore$ নির্ণেয় মধ্যকত্রয় যথাক্রমে 6, 18, 54 বা $-6, 18, -54$.

---

* t-এর নীচে পদসংখ্যা লিখিলে, সেইসংখ্যক পদটিকে বুঝায়। সুতরাং t_5 পঞ্চম পদ বুঝাইতেছে।

উদা. 3. $\frac{1}{2}$ এবং 128-এর মধ্যে তিনটি গুণোত্তর-মধ্যক সন্নিবেশিত কর।

নির্ণেয় গুণোত্তর-মধ্যক তিনটি x_1, x_2, x_3 দ্বারা সূচিত হইল।

তাহা হইলে $\frac{1}{2}$, x_1, x_2, x_3, 128 এক গুণোত্তর-শ্রেণী হইবে। r এই শ্রেণীর সাধারণ অনুপাত হইলে স্পষ্টতঃ,

$128 =$ উক্ত শ্রেণীর পঞ্চম পদ $= \frac{1}{2}.r^4$;

$\therefore \; r^4 = 256$; $\quad \therefore \; r = 4.$

অতএব, $x_1 = \frac{1}{2}.4 = 2$; $\;\; x_2 = \frac{1}{2}.4^2 = 8$; $\;\; x_3 = \frac{1}{2}.4^3 = 32.$

উদা. 4. দুইটি সংখ্যার সমান্তর- ও গুণোত্তর-মধ্যক যথাক্রমে 10 ও 8. সংখ্যা-দুইটি নির্ণয় কর।

সংখ্যা-দুইটি যেন a এবং b.

তাহা হইলে, প্রদত্ত শর্ত হইতে,

$$\text{সমান্তর-মধ্যকটি} = \frac{a+b}{2} = 10 \; ; \quad \therefore \; a+b = 20. \qquad \cdots \text{(i)}$$

$$\text{গুণোত্তর-মধ্যকটি} = \pm\sqrt{ab} = 8 \; ; \quad \therefore \; ab = 64. \qquad \cdots \text{(ii)}$$

(i) হইতে, $a = 20 - b$;

সমীকরণ (ii)-এ (i) হইতে প্রাপ্ত a-এর মান বসাইয়া $(20-b)b = 64$;

অথবা, $\;20b - b^2 = 64$;

অথবা, $\;b^2 - 20b + 64 = 0$; অথবা $(b-4)(b-16) = 0.$

$\therefore \quad b = 4$ বা 16.

b-এর মান সমীকরণ (i) বা (ii)-এ বসাইয়া $a = 16, 4.$

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যাদ্বয় 4, 16 বা 16, 4.

5·6. দুইটি নির্দিষ্ট ধনাত্মক সংখ্যার সমান্তর-মধ্যক উহাদের গুণোত্তর-মধ্যক অপেক্ষা বৃহত্তর। (*The Arithmetic mean of any two given positive quantities is greater than their Geometric mean.*)

a ও b যেন দুইটি নির্দিষ্ট ধন-সংখ্যা।

তাহা হইলে উহাদের সমান্তর-মধ্যক $= \frac{1}{2}(a+b)$;

এবং গুণোত্তর-মধ্যক $= \sqrt{ab}.$

এখন, $\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{1}{2}[a - 2\sqrt{a}.\sqrt{b} + b]$

$= \frac{1}{2}(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 =$ এক ধন-রাশি।

$\therefore \; \frac{a+b}{2} > \sqrt{ab},$

অর্থাৎ, সমান্তর-মধ্যক $>$ গুণোত্তর-মধ্যক।

প্রশ্নমালা 19

1. (i) 6 এবং 24 ; (ii) 8 এবং $\frac{1}{2}$; (iii) x^2 এবং $\frac{1}{x^2}$; (iv) a^2b^3c এবং bc^3-এর গুণোত্তর-মধ্যক নির্ণয় কর।

2. 3 এবং 24-এর মধ্যে দুইটি গুণোত্তর-মধ্যক সন্নিবেশিত কর।

3. $2\frac{1}{4}$ এবং $\frac{4}{9}$-এর মধ্যে তিনটি গুণোত্তর-মধ্যক সন্নিবেশিত কর।

4. $\frac{2}{3}$ এবং $-5\frac{1}{16}$-এর মধ্যে চারিটি গুণোত্তর-মধ্যক সন্নিবেশিত কর।

5. $3\frac{5}{9}$ এবং $40\frac{1}{2}$-এর মধ্যে পাঁচটি গুণোত্তর-মধ্যক সন্নিবেশিত কর।

6. দুইটি সংখ্যার মধ্যে সমান্তর-মধ্যক 15 এবং গুণোত্তর-মধ্যক 9 ; সংখ্যা-দুইটি নির্ণয় কর। [C. U. 1926]

7. a, b ও c তিনটি গুণোত্তর-শ্রেণীভুক্ত সংখ্যা, এবং x ও y যথাক্রমে a ও b এবং b ও c-এর সমান্তর-মধ্যক হইলে, প্রমাণ কর যে,

$$\frac{a}{x}+\frac{c}{y}=2 \text{ এবং } \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{b}.$$ [P. U. 1892]

8. a ও b-এর সমান্তর- ও গুণোত্তর-মধ্যকদ্বয়ের অনুপাত m ও n-এর অনুপাতের সমান হইলে, প্রমাণ কর যে,

$$a : b = m+\sqrt{m^2-n^2} : m-\sqrt{m^2-n^2}.$$ [A. U. 1889]

9. দুইটি সংখ্যার সমান্তর- ও গুণোত্তর-মধ্যকদ্বয় যথাক্রমে A ও B হইলে, প্রমাণ কর যে, সংখ্যা-দুইটি $A+\sqrt{A^2-B^2}$ এবং $A-\sqrt{A^2-B^2}$ হইবে।

[সংখ্যা-দুইটি a এবং b. ধরা যাক, $a > b$;

$$a+b=2A \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$$

এবং $\sqrt{ab}=B$.

এখন, $(a-b)^2=(a+b)^2-4ab=4(A^2-B^2)$;

অথবা, $a-b=2\sqrt{A^2-B^2}$. $\cdots$ (2)

(ধনাত্মক মূল লইয়া, কেননা $a > b$, অর্থাৎ $a-b$ ধনাত্মক।)

(1) ও (2) যোগ করিয়া, $2a=2A+2\sqrt{A^2-B^2}$; অথবা, $a=A+\sqrt{A^2-B^2}$.

পুনরায় (1) হইতে (2) বিয়োগ করিয়া, $b=A-\sqrt{A^2-B^2}$.]

10. দুইটি অসমান ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা p এবং q-এর সমান্তর-মধ্যক A এবং গুণোত্তর-মধ্যক G. দেখাও যে,

$$A > G > \frac{G^2}{A}.$$ [G. U. 1950]

11. দেখাও যে, দুইটি ঋণাত্মক সংখ্যার সমান্তর-মধ্যক সর্বদা উহাদের গুণোত্তর-মধ্যক অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

5·7. বিবিধ শ্রেণী-ঘটিত রাশিমালা ও উহাদের মান নির্ণয় করিবার কৌশল।

উদা. 1. কোন রাশিমালার r-তম পদ $2^r + \frac{1}{2}r$; উহার অষ্টম পদ পর্যন্ত মান নির্ণয় কর।

এখানে, $t_r = 2^r + \frac{1}{2}r$;

অতএব, $r = 1, 2, 3, \cdots, 8$ বসাইয়া,

$$t_1 = 2^1 + \tfrac{1}{2}.1$$
$$t_2 = 2^2 + \tfrac{1}{2}.2$$
$$t_3 = 2^3 + \tfrac{1}{2}.3$$
$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots$$
$$t_8 = 2^8 + \tfrac{1}{2}.8$$

$$S\text{ (সমষ্টি)} = (2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^8) + \tfrac{1}{2}(1 + 2 + 3 + \cdots + 8)$$
$$= \frac{2(2^8 - 1)}{2 - 1} + \tfrac{1}{2}.\tfrac{8}{2}(1 + 8) = 2 \times 255 + 2 \times 9 = 510 + 18 = 528.$$

উদা. 2. $5 + 55 + 555 + \cdots\cdots\cdots$ ইত্যাদি n-সংখ্যক পদ পর্যন্ত রাশিমালার মান নির্ণয় কর।

নির্ণেয় মান S দ্বারা সূচিত হইল। তাহা হইলে,

$$S = 5 + 55 + 555 + \cdots\cdots n\text{-সংখ্যক পদ পর্যন্ত}$$
$$= 5(1 + 11 + 111 + \cdots\cdots n\text{-সংখ্যক পদ পর্যন্ত})$$
$$= \tfrac{5}{9} \times 9(1 + 11 + 111 + \cdots n\text{-সংখ্যক পদ পর্যন্ত})$$
$$= \tfrac{5}{9}(9 + 99 + 999 + \cdots n\text{-সংখ্যক পদ পর্যন্ত})$$
$$= \tfrac{5}{9}\{(10 - 1) + (10^2 - 1) + (10^3 - 1) + \cdots n\text{-সংখ্যক পদ পর্যন্ত}\}$$
$$= \tfrac{5}{9}\{(10 + 10^2 + 10^3 + \cdots\cdots n\text{-সংখ্যক পদ পর্যন্ত}) - n\}$$
$$= \frac{5}{9}\left\{\frac{10(10^n - 1)}{10 - 1} - n\right\} = \frac{50}{81}(10^n - 1) - \frac{5n}{9}.$$

উদা. 3. $1 + 5 + 13 + 29 + \cdots\cdots\cdots$ ইত্যাদি রাশিমালার প্রথম n-সংখ্যক পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

$1, 5, 13, 29, \cdots$ ইত্যাদি শ্রেণীটির n-তম পদ t_n দ্বারা এবং নির্ণেয় সমষ্টি S দ্বারা সূচিত হইল। তাহা হইলে,

$$S = 1 + 5 + 13 + 29 + \cdots + t_n$$

এবং $$S = 0 + 1 + 5 + 13 + \cdots + t_{n-1} + t_n.$$

অতএব, বিয়োগ করিয়া,

$$0=(1+4+8+16+\cdots n\text{-সংখ্যক পদ পর্যন্ত})-t_n.$$

$$\therefore \quad t_n=1+\{4+8+16+\cdots(n-1)\text{-সংখ্যক পদ পর্যন্ত}\}$$

$$=1+\frac{4(2^{n-1}-1)}{2-1}=1+2^2(2^{n-1}-1)$$

$$=1+2^{n+1}-2^2=2^{n+1}-3.$$

$\therefore$ প্রথম পদ $=t_1=2^2-3$;

দ্বিতীয় পদ $=t_2=2^3-3$;

তৃতীয় পদ $=t_3=2^4-3$;

চতুর্থ পদ $=t_4=2^5-3$;

ইত্যাদি।

$$\therefore \quad S=(2^2-3)+(2^3-3)+(2^4-3)+\cdots+(2^{n+1}-3)$$

$$=(2^2+2^3+2^4+\cdots+2^{n+1})-3n$$

$$=\frac{2^2(2^n-1)}{2-1}-3n=4(2^n-1)-3n.$$

উদা. 4. $(1)+(1+3)+(1+3+3^2)+(1+3+3^2+3^3)+\cdots\cdots$ ইত্যাদি রাশিমালার প্রথম n-সংখ্যক পদের সমষ্টি নির্ণয় কর। [C. U. 1931]

প্রদত্ত শ্রেণীর n-তম পদ $=(1+3+3^2+3^3+\cdots\cdots n\text{-সংখ্যক পদ পর্যন্ত})$

$$\therefore \quad t_n=\frac{1(3^n-1)}{3-1}=\tfrac{1}{2}(3^n-1)=\tfrac{1}{2}.3^n-\tfrac{1}{2}.$$

এখন, n-এর মান $1, 2, 3, \cdots\cdots, n$ বসাইয়া

$$t_1=\tfrac{1}{2}.3^1-\tfrac{1}{2}$$

$$t_2=\tfrac{1}{2}.3^2-\tfrac{1}{2}$$

$$t_3=\tfrac{1}{2}.3^3-\tfrac{1}{2}$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

$$t_n=\tfrac{1}{2}.3^n-\tfrac{1}{2}$$

যোগ করিয়া, $S=\tfrac{1}{2}(3+3^2+3^3+\cdots+3^n)-\tfrac{1}{2}n=\tfrac{1}{2}\cdot\frac{3(3^n-1)}{3-1}-\tfrac{1}{2}n$

$$=\frac{3}{4}(3^n-1)-\frac{n}{2}=\frac{3^{n+1}}{4}-\frac{3}{4}-\frac{n}{2}=\frac{1}{4}(3^{n+1}-3-2n).$$

উদা. 5. 12 এবং 32-এর মধ্যে এরূপ দুইটি সংখ্যা বসাও যেন প্রথম তিনটি সমান্তর-শ্রেণীভুক্ত এবং শেষের তিনটি গুণোত্তর-শ্রেণীভুক্ত হয়।

নির্ণেয় সংখ্যাদ্বয় যেন x এবং y.

অতএব, প্রদত্ত শর্তানুসারে 12, x, y সমান্তর-শ্রেণী ··· ··· (ক)

এবং x, y, 32 গুণোত্তর-শ্রেণী ; ··· ··· (খ)

(ক) হইতে, $2x = 12 + y$; ··· ··· (গ)

(খ) হইতে, $y^2 = 32x = 16.2x = 16(12 + y)$ [$2x$-এর মান বসাইয়া]

অথবা, $y^2 - 16y - 192 = 0$;

অথবা, $(y - 24)(y + 8) = 0$;

$\therefore$ $y = 24$ বা -8.

$y = 24$ হইলে, (গ) হইতে $x = 18$;

$y = -8$ হইলে, (গ) হইতে $x = 2$.

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যাদ্বয় 18 এবং 24, অথবা 2, -8.

উদা. 6. a, b, c, d এক গুণোত্তর-শ্রেণীভুক্ত চারিটি সংখ্যা হইলে, দেখাও যে,

$$(a - d)^2 = (b - c)^2 + (c - a)^2 + (d - b)^2.$$

প্রদত্ত শর্তানুসারে স্পষ্টতঃ, $\frac{b}{a} = \frac{c}{b} = \frac{d}{c}$; কারণ, প্রত্যেকটিই উক্ত গুণোত্তর-শ্রেণীর সাধারণ অনুপাতের সমান।

$\therefore$ $b^2 = ac$; $c^2 = bd$ এবং $bc = ad$ ··· ··· (a)

অতএব, $(b - c)^2 + (c - a)^2 + (d - b)^2$

$$= (b^2 + c^2 - 2bc) + (c^2 + a^2 - 2ca) + (d^2 + b^2 - 2db)$$
$$= 2(b^2 - ac) + 2(c^2 - bd) + a^2 + d^2 - 2bc$$
$$= 2 \times 0 + 2 \times 0 + a^2 + d^2 - 2ad \quad \text{[(a)-নির্দিষ্ট সম্বন্ধ দ্বারা]}$$
$$= (a - d)^2.$$

উদা. 7. a, b, c, d এক গুণোত্তর-শ্রেণীভুক্ত চারিটি সংখ্যা হইলে, দেখাও যে, $a^2 - b^2$, $b^2 - c^2$, $c^2 - d^2$ রাশি-তিনটিও গুণোত্তর-শ্রেণীভুক্ত হইবে।

এখন, a, b, c, d সংখ্যা-চারিটি গুণোত্তরীয় বলিয়া,

$$\frac{b}{a} = \frac{c}{b} = \frac{d}{c}.$$

$\therefore$ $ac = b^2$, $bd = c^2$ এবং $ad = bc$.

$\therefore$ $(a^2 - b^2)(c^2 - d^2) = a^2c^2 - b^2c^2 - a^2d^2 + b^2d^2$

$$= b^4 - b^2c^2 - b^2c^2 + c^4$$

$$=b^4-2b^2c^2+c^4$$
$$=(b^2-c^2)^2.$$
$$\therefore\quad \frac{b^2-c^2}{a^2-b^2}=\frac{c^2-d^2}{b^2-c^2}.$$

অতএব, a^2-b^2, b^2-c^2 ও c^2-d^2 রাশি-তিনটি গুণোত্তরীয়।

উদা. 8. তিনটি গুণোত্তর-শ্রেণীভুক্ত সংখ্যার ধারাবাহিক গুণফল 216 এবং উহাদের দুইটি দুইটি করিয়া লইয়া গুণ করিলে, এতল্লব্ধ গুণফলত্রয়ের সমষ্টি 156 ; সংখ্যা-তিনটি নির্ণয় কর।

নির্ণেয় গুণোত্তর-শ্রেণীভুক্ত সংখ্যা-তিনটি $\frac{a}{r}$, a এবং ar দ্বারা সূচিত হইল। তাহা হইলে প্রদত্ত শর্তানুসারে,

$$\frac{a}{r}\cdot a.ar=216\text{ ; অথবা, } a^3=216=6^3\text{ ; }\therefore\quad a=6.$$

এবং $$\frac{a}{r}\cdot a+\frac{a}{r}\cdot ar+a.ar=156\text{ ;}$$

$$\text{অথবা, } a^2\left(\frac{1}{r}+1+r\right)=156\text{ ;}$$

$$\text{অথবা, } 36\left(\frac{1}{r}+1+r\right)=156\text{ ;}$$

$$\therefore\quad r+\frac{1}{r}+1=\tfrac{156}{36}=\tfrac{13}{3}\text{ ;}$$

$$\therefore\quad r+\frac{1}{r}=\tfrac{13}{3}-1=\tfrac{10}{3}\text{ ;}$$

$$\therefore\quad 3(r^2+1)=10r\text{ ;}$$

$$\text{অথবা, } 3r^2-10r+3=0\text{ ; অথবা, } (3r-1)(r-3)=0.$$

$$\therefore\quad r=3\text{ অথবা, }\tfrac{1}{3}.$$

সুতরাং, নির্ণেয় সংখ্যা-তিনটি যথাক্রমে 2, 6, 18.

প্রশ্নমালা 20

1. $a+2a^2+3a^3+4a^4+\cdots\cdots n$-সংখ্যক পদ পর্যন্ত রাশিমালার মান নির্ণয় কর।

2. $1+\frac{2}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{4}{2^3}+\cdots\cdots n$-সংখ্যক পদ পর্যন্ত রাশিমালার মান নির্ণয় কর।

3. নিম্নলিখিত শ্রেণীর n-তম পদ এবং প্রথম n-সংখ্যক পদের সমষ্টি নির্ণয় কর :
1.1, 2.3, 4.5, 8.7,……ইত্যাদি।

নিম্নলিখিত রাশিমালাসমূহের প্রথম n-সংখ্যক পদের সমষ্টি নির্ণয় কর :

4. $1+\frac{2}{5}+\frac{3}{5^2}+\frac{4}{5^3}+\cdots$ ইত্যাদি।

5. $4+44+444+\cdots$ ইত্যাদি।

6. $\cdot9+\cdot99+\cdot999+\cdots$ ইত্যাদি।

7. $1+3+7+15+\cdots$ ইত্যাদি।

8. $-6-4+0+8+24+\cdots$ ইত্যাদি।

9. $6+9+21+69+261+\cdots$ ইত্যাদি।

10. $1+\frac{3}{2}+\frac{7}{4}+\frac{15}{8}+\cdots$ ইত্যাদি।

11. a, b, c, d সংখ্যা-চারিটি গুণোত্তরীয় হইলে, প্রমাণ কর যে,

$$(a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2+d^2)=(ab+bc+cd)^2.$$

[এখন, $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}=$ (মনে কর) k ; তাহা হইলে,

$a=bk,\ b=ck,\ c=dk.$

$\therefore\ a^2+b^2+c^2=k^2(b^2+c^2+d^2),$

আবার, $a^2+b^2+c^2=k(ab+bc+cd)$. অতএব, ইত্যাদি, ইত্যাদি।]

12. a, b, c, d গুণোত্তর-শ্রেণীভুক্ত হইলে, দেখাও যে, a^2+b^2, b^2+c^2 এবং c^2+d^2-ও গুণোত্তর-শ্রেণীভুক্ত হইবে। [C. U. 1919]

13. a, b, c গুণোত্তর-শ্রেণীভুক্ত হইলে, প্রমাণ কর যে,

$\frac{1}{a+b}, \frac{1}{2b}, \frac{1}{b+c}$ সমান্তর-শ্রেণীভুক্ত হইবে।

14. গুণোত্তর-শ্রেণীভুক্ত তিনটি সংখ্যার ধারাবাহিক গুণফল 1000 এবং উহাদের দুইটি দুইটি করিয়া লইয়া গুণ করিলে, এতল্লব্ধ গুণফলত্রয়ের সমষ্টি 390 ; সংখ্যা-তিনটি নির্ণয় কর।

15. a, b, c, d সংখ্যা-চারিটি গুণোত্তরীয় হইলে, দেখাও যে,

(i) $(b+c)(b+d)=(c+a)(c+d).$

(ii) $(a+d)(b+c)-(a+c)(b+d)=(b-c)^2.$

16. তিনটি সমান্তর-শ্রেণীভুক্ত সংখ্যার যোগফল 15 ; এবং উক্ত সংখ্যা-তিনটির সহিত যথাক্রমে 1, 4 এবং 19 যোগ করিলে, যোগফল-তিনটি গুণোত্তরীয় হয়। সংখ্যা-তিনটি নির্ণয় কর।

[মনে কর, নির্ণেয় সংখ্যা-তিনটি $a-\beta$, a এবং $a+\beta$.]

17. তিনটি গুণোত্তর-শ্রেণীভুক্ত সংখ্যার গুণফল 512 ; এবং প্রথমটির সহিত 8 এবং দ্বিতীয়টির সহিত 6 যোগ করিলে, এতল্লব্ধ সমষ্টিদ্বয় ও তৃতীয়টি এক সমান্তর-শ্রেণী উৎপন্ন করে। সংখ্যা-তিনটি নির্ণয় কর।

18. তিনটি গুণোত্তরীয় সংখ্যার যোগফল $24\frac{4}{9}$ এবং উহাদের গুণফল 64 ; সংখ্যা-তিনটি নির্ণয় কর।

19. a, b, c একটি গুণোত্তর-শ্রেণীর যথাক্রমে p-তম, q-তম এবং r-তম পদ হইলে, প্রমাণ কর যে, $a^{q-r}b^{r-p}c^{p-q}=1.$

20. a, b, c সমান্তর-শ্রেণীভুক্ত এবং x, y, z গুণোত্তর-শ্রেণীভুক্ত হইলে, প্রমাণ কর যে, $x^{b-c}y^{c-a}z^{a-b}=1.$

21. একটি গুণোত্তর-শ্রেণীর n-সংখ্যক পদসমূহের সমষ্টি S, গুণফল P, এবং অন্যোন্যকগুলির সমষ্টি R হইলে, প্রমাণ কর যে, $P^2=\left(\frac{S}{R}\right)^n.$

22. কোন গুণোত্তর-শ্রেণীর r-তম পদটি $(2r+1)2^r$ হইলে, n-সংখ্যক পদসমূহের সমষ্টি নির্ণয় কর।

23. n-সংখ্যক পদসমূহ গুণোত্তর-শ্রেণীভুক্ত হইলে, প্রমাণ কর যে, উহাদের গুণফলের n-তম মূল এবং প্রথম ও শেষ পদের গুণফলের বর্গমূল সমান হইবে।

24. দুইটি নির্দিষ্ট সংখ্যা a ও c-এর মধ্যে n-সংখ্যক গুণোত্তর-মধ্যক সন্নিবেশিত করিলে, প্রমাণ কর যে, উক্ত মধ্যকসমূহের গুণফল $(ac)^{\frac{n}{2}}$ হইবে।

25. a, b, c, d গুণোত্তর-শ্রেণীভুক্ত হইলে, দেখাও যে, $a^2-b^2, b^2-c^2, c^2-d^2$-এর অন্যোন্যকগুলিও গুণোত্তর-শ্রেণীভুক্ত হইবে।

26. a, b, c সমান্তর-শ্রেণীভুক্ত হইলে, প্রমাণ কর যে, কোন গুণোত্তর-শ্রেণীর a-তম, b-তম এবং c-তম পদ একটি গুণোত্তর-শ্রেণী গঠন করে।

ষষ্ঠ অধ্যায়

জটিল রাশি

(Complex Numbers)

6·1. কাল্পনিক রাশি : $(5)^2 = 25$, $(-5)^2 = 25$. $\therefore \sqrt{25} = 5$ অথবা -5 ; অতএব দেখা যাইতেছে যে, ধনাত্মক বা ঋণাত্মক যে-কোন রাশির বর্গ ধনাত্মক। সুতরাং ধনাত্মক রাশির বর্গমূল বাস্তব রাশি (real number) হইবে। কিন্তু কোন বাস্তব রাশির বর্গ ঋণাত্মক হয় না, সুতরাং, কোন ঋণাত্মক রাশির বর্গমূল বাস্তব হইতে পারে না। ঋণাত্মক রাশির বর্গমূলকে **কাল্পনিক** (Imaginary) **রাশি** বলা হয়। যথা, $\sqrt{-25} = \sqrt{(-1) \times 25} = \sqrt{-1} \times \sqrt{25} = \sqrt{-1}.5$. ঋণাত্মক রাশির বর্গমূলকে $\sqrt{-1} \times$ ধনাত্মক রাশির বর্গমূল, এইরূপে লেখা যায়। **$\sqrt{-1}$-কে সাধারণতঃ প্রতীক i (Imaginary শব্দটির প্রথম অক্ষর) দ্বারা প্রকাশ করা হয়।**

$\therefore$ এই সংজ্ঞানুসারে $i^2 = \sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = -1$.

আবার, যেহেতু $(\sqrt{a}.\sqrt{-1})^2 = (\sqrt{a}.\sqrt{-1}) \times (\sqrt{a}.\sqrt{-1})$

$$= (\sqrt{-1})^2.(\sqrt{a})^2 = -a ;$$

$$\therefore \quad \sqrt{-a} = \sqrt{-1}.\sqrt{a} = i\sqrt{a} ;$$

$$\sqrt{-a} + \sqrt{-b} = i\sqrt{a} + i\sqrt{b} = i(\sqrt{a} + \sqrt{b}) ;$$

$$\sqrt{-a} - \sqrt{-b} = i\sqrt{a} - i\sqrt{b} = i(\sqrt{a} - \sqrt{b}) ;$$

$$\sqrt{-a} \times \sqrt{-b} = i\sqrt{a} \times i\sqrt{b} = i^2\sqrt{ab} = -\sqrt{ab} ;$$

$$\frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}} = \frac{i\sqrt{a}}{i\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

6·2. ***i*-এর ঘাত।**

(i) ধনাত্মক ঘাত :

$$i = \sqrt{-1} ;$$

$$i^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1 ;$$

$$i^3 = i^2 \times i = (-1) \times i = -i ;$$

$$i^4 = i^2 \times i^2 = (-1) \times (-1) = +1 ;$$

$$i^5 = i^4 \times i = (+1) \times i = +i ;$$

ইত্যাদি।

অতএব, m একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হইলে,

$$i^{4m}=(i^4)^m=(+1)^m=+1\,;$$
$$i^{4m+1}=i^{4m}\,i=+i\,;$$
$$i^{4m+2}=i^{4m}\times i^2=-1\,;$$
$$i^{4m+3}=i^{4m}\times i^3=-i.$$

(ii) ঋণাত্মক ঘাত ঃ

$$i^{-1}=\frac{1}{i}=\frac{i}{i^2}=\frac{i}{-1}=-i\,;$$
$$i^{-2}=\frac{1}{i^2}=\frac{1}{-1}=-1\,;$$
$$i^{-3}=\frac{1}{i^3}=\frac{1}{-i}=\frac{i}{-i^2}=\frac{i}{-(-1)}=\frac{i}{+1}=i\,;$$
$$i^{-4}=\frac{1}{i^4}=\frac{1}{+1}=1\,;$$
$$i^{-5}=\frac{1}{i^5}=\frac{1}{i}=\frac{i}{i^2}=\frac{i}{(-1)}=-i\,;$$
$$i^{-6}=\frac{1}{i^6}=\frac{1}{i^4.i^2}=\frac{1}{1\times(-1)}=-1\,;$$

ইত্যাদি।

অতএব, m একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হইলে,

$$i^{-4m}=\frac{1}{i^{4m}}=\frac{1}{+1}=+1\,;$$
$$i^{-(4m+1)}=\frac{1}{i^{4m+1}}=\frac{1}{i}=\frac{i}{i^2}=-i\,;$$
$$i^{-(4m+2)}=\frac{1}{i^{4m+2}}=\frac{1}{i^2}=\frac{1}{-1}=-1\,;$$
$$i^{-(4m+3)}=\frac{1}{i^{4m+3}}=\frac{1}{i^3}=\frac{1}{i^2 i}=\frac{1}{-i}=\frac{i}{-i^2}=\frac{i}{+1}=+i\,;$$

ইত্যাদি।

প্রশ্নমালা 21

সরল কর (Simplify) :

1. i^{25}.	**2.** i^{38}.	**3.** i^{77}.	**4.** i^{88}.
5. i^{58}.	**6.** i^{15}.	**7.** i^{105}.	**8.** i^{203}.
9. i^{27}.	**10.** i^{34}.	**11.** i^{-55}.	**12.** i^{-19}.

13. i^{-79}. **14.** i^{-705}. **15.** i^{-999}. **16.** $i+\frac{1}{i}$.

17. $i^2+\frac{1}{i^2}$. **18.** $i^{37}+\frac{1}{i^{97}}$. **19.** $6\sqrt{-1}+13\sqrt{-1}$.

20. $\sqrt{-16}+\sqrt{-25}$. **21.** $\sqrt{-72}-\sqrt{-50}$.

22. $\sqrt{-108}-2\sqrt{-27}$. **23.** $2\sqrt{-245}-3\sqrt{-45}$.

24. প্রমাণ কর যে, (i) $\sqrt{i}=\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ এবং (ii) $\sqrt{-i}=\frac{1-i}{\sqrt{2}}$.

25. প্রমাণ কর যে, $(1+i)^4\left(1+\frac{1}{i}\right)^4=16$.

6·3. জটিল রাশি (Complex Number)।

a এবং b মূলদ বা অমূলদ বাস্তব রাশি হইলে, $a+ib$-কে **জটিল রাশি** (Complex number) বলে। $5+i2$, $5+i\sqrt{2}$, $\sqrt{5}+i.2$, $\sqrt{5}+i\sqrt{2}$ ইহারা প্রত্যেকেই একটি জটিল রাশি।

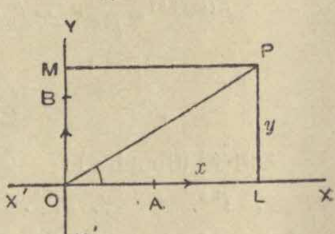
যদি $a=0$ হয়, তাহা হইলে কেবল ib থাকে; তখন ইহা সম্পূর্ণ কাল্পনিক (completely imaginary) রাশি, এবং $b=0$ হইলে কেবল a থাকিয়া যায়, তখন ইহা সম্পূর্ণ বাস্তব (completely real) রাশি।

6·4. জ্যামিতিক চিত্র দ্বারা জটিল রাশির প্রকাশ (Geometrical representation of a Complex number)।

(a) কোন বাস্তব সংখ্যা x-কে নিম্নলিখিত প্রকারে জ্যামিতিক বিন্দু দ্বারা সূচিত করা হয়।

$X'OX$ [x-অক্ষ বা বাস্তব অক্ষ (x-axis বা real axis) বলিয়া অভিহিত] একটি সরল রেখা লইয়া উহার উপর O একটি নির্দিষ্ট বিন্দু লওয়া হইল। উহাকে বলা হইল মূলবিন্দু এবং এই বিন্দু 0 (শূন্য) সংখ্যা প্রকাশ করে।

যদি $X'OX$-এর উপর A এবং L এইরূপ দুইটি বিন্দু লওয়া হয়, যে $OA=1$, এবং $\frac{OL}{OA}=x$, তাহা হইলে L বিন্দু দ্বারা x এই বাস্তব সংখ্যা সূচিত হইবে। যদি x ঋণাত্মক হয়, তবে L বিন্দুটি OX'-এর উপর লইতে হইবে।



(b) কোন সম্পূর্ণ কাল্পনিক সংখ্যা iy-কে (যেখানে y বাস্তব) নিম্নলিখিত উপায়ে জ্যামিতিক বিন্দু দ্বারা সূচিত করা হয়।

উপরি-উক্ত $X'OX$-এর উপর $Y'OY$ [y-অক্ষ বা অবাস্তব অক্ষ (y-axis বা imaginary axis) বলিয়া অভিহিত] সরল রেখা লম্বভাবে অঙ্কিত করা হইল। এখন ইহার উপর B ও M দুইটি বিন্দু লওয়া হইল, যেন $OB=OA=1$ এবং $\frac{OM}{OB}=y$ হয়। তাহা হইলে M বিন্দুটি দ্বারা iy সূচিত হইবে।

যদি M', OY'-এর উপর এইরূপ লওয়া হয়, যেন $OM'=OM$, তাহা হইলে M' বিন্দুটি দ্বারা $-iy$ সূচিত হইবে।

(c) পরিশেষে, $x+iy$ এই জটিল রাশিটি নিম্নপ্রকারে জ্যামিতিক বিন্দু দ্বারা সূচিত করা হয়।

উপরি-উক্ত L এবং M বিন্দুর মধ্য দিয়া যথাক্রমে OX এবং OY-এর উপর অঙ্কিত লম্ব P বিন্দুতে ছেদ করিলে P বিন্দু দ্বারা $x+iy$ এই জটিল রাশিটি সূচিত হইবে। অর্থাৎ $X'OX$ এবং $Y'OY$ অক্ষদ্বয়গামী সমতলের উপর কোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y) হইলে, ঐ বিন্দু দ্বারাই $x+iy$ এই জটিল রাশিটি সূচিত হইবে।

অনুসিদ্ধান্ত। মূলবিন্দু $0+i0$-কে সূচিত করিবে।

সংজ্ঞা ঃ উপরিউক্ত সমতলকে **জটিল সমতল** (Complex plane) বলা হয়।

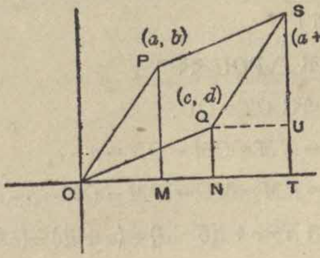
$OP=\sqrt{x^2+y^2}$-কে $x+iy$-এর **মডিউল্যাস** (Modulus) বা **জটিল রাশিটির বিশুদ্ধ মান** (absolute value) বলা হয়।

6·5. দুইটি জটিল রাশির যোগফলের জ্যামিতিক প্রকাশ (Geometrical representation of the sum of two Complex quantities)।

মনে কর, নিম্নস্থ চিত্রে P ও Q বিন্দু দ্বারা যথাক্রমে $a+ib$ এবং $c+id$ সূচিত করা হইল।

OP এবং OQ-কে সন্নিহিত বাহু ধরিয়া সামান্তরিক $OPSQ$ অঙ্কিত হইল।

S বি দ্বারা $a+ib$ এবং $c+id$-এর যোগফল সূচিত হইবে।



PM, QN, ST সরল রেখাত্রয় OX-এর উপর এবং QU সরল রেখা ST-এর উপর লম্ব টানা হইল।

$\triangle POM, \triangle SQU$ সর্বসম। $\therefore\ OM = QU = NT$ এবং $SU = PM$;

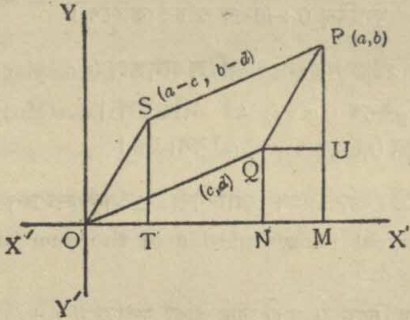
$\therefore\ OT = ON + NT = ON + OM = a + c,$

এবং $ST = SU + UT = PM + QN = b + d.$

$\therefore\ S$ বিন্দু দ্বারা $(a+c) + i(b+d)$ সূচিত হইল।

6·6. দুইটি জটিল রাশির বিয়োগফলের জ্যামিতিক প্রকাশ (Geometrical representation of the difference of two complex quantities)।

মনে কর, নিম্নস্থ চিত্রে P ও Q বিন্দু দ্বারা যথাক্রমে $a+ib$ ও $c+id$ সূচিত করা হইল।



OQ এবং PQ-কে সন্নিহিত বাহু ধরিয়া সামান্তরিক $OQPS$ অঙ্কিত হইল।

S বিন্দু দ্বারা $a+ib$ এবং $c+id$-এর বিয়োগফল সূচিত হইবে।

প্রমাণ: PM, QN, ST সরল রেখাত্রয় OX-এর উপর এবং QU সরল রেখা PM-এর উপর লম্ব টানা হইল।

$\triangle SOT$ এবং $\triangle PQU$ সর্বসম;

$\therefore\ ST = PU$ এবং $OT = QU.$

$\therefore\ OT = QU = NM = OM - ON = a - c,$

এবং $ST = PU = PM - MU = PM - QN = b - d.$

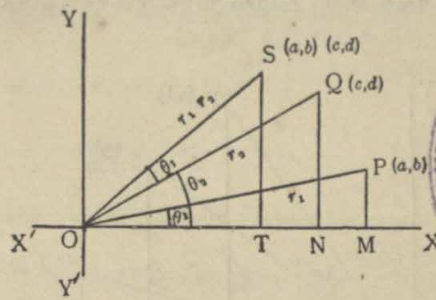
$\therefore\ S$ বিন্দু দ্বারা $a - c + i(b-d) = (a+ib) - (c+id)$ সূচিত হইল।

6·7. দুইটি জটিল রাশির গুণফলের জ্যামিতিক প্রকাশ (Geometrical representation of the product of two complex quantities)।

মনে কর, নিচের চিত্রে P ও Q বিন্দু দ্বারা যথাক্রমে $a+ib$ এবং $c+id$ সূচিত করা হইল।

মনে কর, $OP=r_1$, $OQ=r_2$, $\angle POX=\theta_1$, $\angle QOX=\theta_2$.

এখন, θ_1-এর সমান করিয়া $\angle QOS$ অঙ্কিত হইল, যেন $OS=r_1r_2$ হয়।



S বিন্দু দ্বারা $(a+ib)(c+id)$ সূচিত হইবে।

প্রমাণ : PM, QN, ST সরল রেখাত্রয় OX-এর উপর লম্ব টানা হইল।

$$a=OM=r_1\cos\theta_1,\ c=ON=r_2\cos\theta_2,$$

$$b=PM=r_1\sin\theta_1,\ d=QN=r_2\sin\theta_2,$$

$$OT=OS\cos(\theta_1+\theta_2) \qquad [\because\ \angle SOT=\theta_1+\theta_2]$$

$$=r_1r_2\cos(\theta_1+\theta_2);$$

$$ST=r_1r_2\sin(\theta_1+\theta_2).$$

$\therefore$ S বিন্দু দ্বারা $r_1r_2\cos(\theta_1+\theta_2)+ir_1r_2\sin(\theta_1+\theta_2)$ জটিল রাশিটি সূচিত হইল।

কিন্তু, $(a+ib)(c+id)$

$$=(r_1\cos\theta_1+ir_1\sin\theta_1)(r_2\cos\theta_2+ir_2\sin\theta_2)$$

$$=r_1r_2(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$$

$$=r_1r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2)$$
$$+i(\sin\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_1\sin\theta_2)]$$

$$=r_1r_2\cos(\theta_1+\theta_2)+ir_1r_2\sin(\theta_1+\theta_2);$$

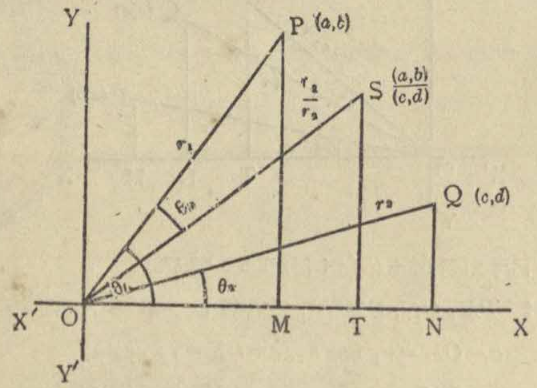
$\therefore$ S বিন্দু দ্বারা $(a+ib)(c+id)$ সূচিত হইল।

6·8. দুইটি জটিল রাশির ভাগফলের জ্যামিতিক প্রকাশ (Geometrical representation of the quotient of two complex quantities) ।

মনে কর, নিচের চিত্রে P এবং Q বিন্দু দ্বারা যথাক্রমে $a+ib$ এবং $c+id$ সূচিত করা হইল।

মনে কর, $OP=r_1$, $OQ=r_2$, $\angle POX=\theta_1$, $\angle QOX=\theta_2$.

এখন, θ_2-এর সমান করিয়া $\angle POS$ অঙ্কিত করা হইল, যেন $OS=\frac{r_1}{r_2}$ হয়।



S বিন্দু দ্বারা $\dfrac{a+ib}{c+id}$ সূচিত হইবে।

প্রমাণ : PM, QN, ST সরল রেখাত্রয় OX-এর উপর লম্ব টানা হইল।

$a=OM=r_1\cos\theta_1$, $c=ON=r_2\cos\theta_2$;

$b=PM=r_1\sin\theta_1$, $d=QN=r_2\sin\theta_2$;

$OT=\frac{r_1}{r_2}\cos(\theta_1-\theta_2)$. $\qquad [\because \angle SOT=\theta_1-\theta_2]$

$ST=\frac{r_1}{r_2}\sin(\theta_1-\theta_2)$;

$\therefore$ S বিন্দু দ্বারা $\frac{r_1}{r_2}\cos(\theta_1-\theta_2)+i\frac{r_1}{r_2}\sin(\theta_1-\theta_2)$ জটিল রাশিটি সূচিত হইল।

কিন্তু, $\frac{a+ib}{c+id}$

$$=\frac{r_1\cos\theta_1+ir_1\sin\theta_1}{r_2\cos\theta_2+ir_2\sin\theta_2}$$

$$=\frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{\cos\theta_1+i\sin\theta_1}{\cos\theta_2+i\sin\theta_2}$$

$$=\frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)(\cos\theta_2-i\sin\theta_2)}{(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)(\cos\theta_2-i\sin\theta_2)}$$

$$=\frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{\cos\theta_1\cos\theta_2+\sin\theta_1\sin\theta_2+i(\sin\theta\cos\theta_2-\cos\theta_1\sin\theta_2)}{\cos^2\theta_2+\sin^2\theta_2}$$

$$=\frac{r_1}{r_2}\cdot[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)]$$

$$=\frac{r_1}{r_2}\cdot\cos(\theta_1-\theta_2)+i\frac{r_1}{r_2}\sin(\theta_1-\theta_2);$$

$\therefore$ S বিন্দু দ্বারা $\frac{a+ib}{c+id}$ সূচিত হইল।

6·9. জটিল রাশি-সম্বন্ধীয় বিবিধ উপপাদ্য।

(i) যদি a+ib=0 হয়, তবে a=0 এবং b=0 হইবে।

প্রমাণ : $a+ib=0$,

$\therefore\ ib=-a;\quad \therefore\ (ib)^2=(-a)^2;$

$\therefore\ -b^2=a^2;\quad a^2+b^2=0.$

কিন্তু a^2 এবং b^2 পূর্ণবর্গ বলিয়া ইহাদের কোনটিই ঋণাত্মক নয় ;

$\therefore$ a এবং b-এর প্রত্যেকটি $=0$,

না হইলে, তাহাদের যোগফল $=0$ হইতে পারে না ;

অর্থাৎ $a=0$ এবং $b=0$.

(ii) যদি a+ib=c+id হয়, তবে a=c এবং b=d হইবে।

প্রমাণ : $a+ib=c+id.$

$\therefore\ a-c+i(b-d)=0.$

$\therefore$ (i) হইতে দেখা যায় যে, $a-c=0$ এবং $b-d=0$; অর্থাৎ $a=c$ এবং $b=d$ হইবে।

অতএব, যদি দুইটি জটিল রাশি পরস্পর সমান হয়, তাহা হইলে একটির বাস্তব অংশ অপরটির বাস্তব অংশের সমান হইবে এবং একটির অবাস্তব (বা কাল্পনিক) অংশ অপরটির অবাস্তব (বা কাল্পনিক) অংশের সমান হইবে।

(iii) বিভিন্ন জটিল রাশির সংযোগফল (algebraic sum) জটিল রাশি হইবে।

$$(a+ib)-(c+id)+(e-if)+\cdots\cdots$$
$$=(a-c+e+\cdots)+i(b-d-f+\cdots)$$
= একটি জটিল রাশি।

(iv) বিভিন্ন জটিল রাশির গুণফলও জটিল রাশি হইবে।

প্রমাণ : $(a+ib)(c+id)(e+if)$
$$=(ac+iad+ibc+i^2bd)(e+if)$$
$$=[(ac-bd)+i(ad+bc)](e+if)$$
$$=[(ac-bd)e+i(ac-bd)f+i(ad+bc)e+i^2(ad+bc)f]$$
$$=(ace-bde-adf-bcf)+i(acf-bdf+ade+bce)$$
= একটি জটিল রাশি।

(v) জটিল রাশির ভাগফলও জটিল রাশি হইবে।

প্রমাণ : $\frac{a+ib}{c+id}=\frac{(a+ib)(c-id)}{(c+id)(c-id)}$
$$=\frac{(ac+bd)+i(bc-ad)}{c^2-i^2d^2}$$
$$=\frac{(ac+bd)+i(bc-ad)}{c^2+d^2} \qquad [\because \ i^2=-1]$$
$$=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+i\frac{bc-ad}{c^2+d^2}$$
= একটি জটিল রাশি।

(vi) জটিল রাশির যে-কোন ঘাতও জটিল রাশি হইবে।

প্রমাণ : $(a+ib)^n=(a+ib)(a+ib)\cdots\cdots\cdots\cdots$ n-তম উৎপাদক
= জটিল রাশি [(iv) অনুসারে]

(vii) জটিল রাশির যে-কোন মূলও জটিল রাশি হইবে।

প্রমাণ :

মনে কর, $(a+ib)^{\frac{1}{n}}=x$,

$\therefore \quad a+ib=x^n$.

যদি x বাস্তব হয়, তবে x^nও বাস্তব হইবে। তাহা হইলে $a=x^n$, কারণ

বাস্তব অংশ সমান। অতএব, $b=0$ হইয়া যায়। কিন্তু ইহা কল্পনাবিরুদ্ধ, কারণ তাহা হইলে প্রদত্ত রাশি জটিল থাকে না, সম্পূর্ণ বাস্তব হইয়া যায়। সুতরাং, x নিশ্চয়ই জটিল রাশি হইবে।

6·10. a+ib এই জটিল রাশির বর্গমূল নির্ণয় কর।

মনে কর, $\sqrt{a+ib}=x+iy$, (x এবং y বাস্তব)

$\therefore\ a+ib=(x+iy)^2=x^2-y^2+2xy.i$;

$\therefore$ বাস্তব এবং কাল্পনিক অংশ সমান করিলে,

$$x^2-y^2=a \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \quad (1)$$

এবং
$$2xy=b. \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \quad (2)$$

$$\therefore\ (x^2+y^2)^2=(x^2-y^2)^2+4x^2y^2=a^2+b^2\ ;$$

$$\therefore\ x^2+y^2=+\sqrt{a^2+b^2}. \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \quad (3)$$

[x^2, y^2 উভয়ই ধনাত্মক বলিয়া বাম পক্ষ ধনাত্মক]

$$\therefore\ x^2=\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2},\ y^2=\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}.$$

[(1) এবং (3) যোগ ও বিয়োগ করিয়া]

$$\therefore\ x=\pm\left\{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}\right\}^{\frac{1}{2}},\quad y=\pm\left\{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

বিশেষ দ্রষ্টব্য। $\because\ 2xy=b$, $\therefore\ b$ ধনাত্মক হইলে, x এবং y উভয়ই ধনাত্মক বা উভয়ই ঋণাত্মক হইবে এবং b ঋণাত্মক হইলে, x এবং y-এর একটি ধনাত্মক এবং অপরটি ঋণাত্মক হইবে।

অনুসিদ্ধান্ত। $a=0$ এবং $b=\pm1$ ধরিলে,

$$\sqrt{+i}=\pm\frac{1+i}{\sqrt{2}},\quad \sqrt{-i}=\pm\frac{1-i}{\sqrt{2}}.$$

বিকল্প প্রমাণঃ

$$i=\tfrac{1}{2}(1+2i-1)=\tfrac{1}{2}(1+2i+i^2)=\tfrac{1}{2}(1+i)^2.$$

$$\therefore\ \sqrt{i}=\pm\frac{1+i}{\sqrt{2}}.$$

আবার,
$$-i=\tfrac{1}{2}(1-2i-1)$$
$$=\tfrac{1}{2}(1-2i+i^2)$$
$$=\tfrac{1}{2}(1-i)^2.$$

$$\therefore\ \sqrt{-i}=\pm\frac{1-i}{\sqrt{2}}.$$

6·11. প্রতিযোগী জটিল রাশি (Conjugate complex quantities)।

দুইটি জটিল রাশির কেবলমাত্র কাল্পনিক অংশ বিপরীত চিহ্নযুক্ত হইলে তাহাদিগকে **প্রতিযোগী** বলা হয়। যথা, $a+ib$ এবং $a-ib$ প্রতিযোগী জটিল রাশিদ্বয়।

ইহাদের যোগফল $=(a+ib)+(a-ib)=2a=$ বাস্তব।

এবং গুণফল $=(a+ib)(a-ib)$

$$=a^2-i^2b^2=a^2-(-1)b^2$$

$$=a^2+b^2$$

$=$ বাস্তব।

$\therefore$ দুইটি প্রতিযোগী জটিল রাশির যোগফল এবং গুণফল সম্পূর্ণ বাস্তব।

6·12. মডিউল্যাস-সম্পর্কিত উপপাদ্য।

(i) দুইটি জটিল রাশির মডিউল্যাস-এর গুণফল, উহাদের গুণফলের মডিউল্যাস-এর সমান।

মনে কর, জটিল রাশিদ্বয় $a+ib$ এবং $c+id$,

তাহাদের মডিউল্যাস যথাক্রমে $m_1=\sqrt{a^2+b^2}$ এবং $m_2=\sqrt{c^2+d^2}$.

রাশিদ্বয়ের গুণফল $=(ac-bd)+i(ad+bc)$.

$\therefore$ ইহাদের মডিউল্যাস $=\sqrt{(ac-bd)^2+(ad+bc)^2}$

$$=\sqrt{a^2c^2+b^2d^2+a^2d^2+b^2c^2}$$

$$=\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}$$

$$=\sqrt{a^2+b^2}\times\sqrt{c^2+d^2}$$

$$=m_1\times m_2.$$

(ii) দুইটি জটিল রাশির ভাগফলের মডিউল্যাস উহাদের মডিউল্যাস-এর ভাগফলের সমান।

মনে কর, জটিল রাশিদ্বয় $a+ib$ এবং $c+id$, এবং উহাদের মডিউল্যাস যথাক্রমে $m_1=\sqrt{a^2+b^2}$ এবং $m_2=\sqrt{c^2+d^2}$.

রাশিদ্বয়ের ভাগফল $=\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}+i\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}$. [অনু. 6·9 (v) দ্রষ্টব্য]

ইহার মডিউল্যাস $=\sqrt{\left(\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}\right)^2+\left(\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)^2}$

$$= \sqrt{\frac{a^2c^2+b^2d^2+b^2c^2+a^2d^2}{(c^2+d^2)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}{(c^2+d^2)^2}} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{c^2+d^2}} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{c^2+d^2}} = \frac{m_1}{m_2}.$$

(iii) দুইটি প্রতিযোগী জটিল রাশির একই মডিউল্যাস।

মনে কর, রাশিদ্বয় $a+ib$ এবং $a-ib$.

প্রথমটির মডিউল্যাস $= \sqrt{a^2+b^2}$,

দ্বিতীয়টির মডিউল্যাস $= \sqrt{a^2+(-b)^2} = \sqrt{a^2+b^2}$.

$\therefore$ উপপাদ্যটি প্রমাণিত হইল।

6·13. 1 (এক)-এর ঘনমূল।

মনে কর, $x = \sqrt[3]{1}$. $\therefore$ $x^3 = 1$, বা $x^3 - 1 = 0$.

অর্থাৎ $(x-1)(x^2+x+1) = 0$.

$\therefore$ হয়, $x - 1 = 0$ ... ... (1)

অথবা, $x^2 + x + 1 = 0$ ... ... (2)

(1) হইতে, $x = 1$;

(2) হইতে, $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \dfrac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$.

$\therefore$ 1-এর ঘনমূল যথাক্রমে 1, $\dfrac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, $\dfrac{-1-\sqrt{-3}}{2}$; শেষোক্ত মূলদ্বয় জটিল।

ইহাদের প্রথমটির বর্গ

$$= \left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)^2 = \frac{1+(-3)-2\sqrt{-3}}{3} = \frac{-2-2\sqrt{-3}}{4}$$

$$= \frac{-1-\sqrt{-3}}{2} = \text{দ্বিতীয়টি} ;$$

এবং দ্বিতীয়টির বর্গ

$$= \left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)^2 = \frac{1+(-3)+2\sqrt{-3}}{4} = \frac{-2+2\sqrt{-3}}{4}$$

$$= \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} = \text{প্রথমটি।}$$

$\therefore$ জটিল মূলদ্বয়ের একটিকে ω বলিলে অন্যটি ω^2 হইবে। অর্থাৎ 1-এর তিনটি ঘনমূল যথাক্রমে $1, \omega, \omega^2$.

অনুসি. 1. $1+\omega+\omega^2$

$$=1+\left(\frac{-1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)=0,$$

অর্থাৎ 1-এর তিনটি ঘনমূলের যোগফল = 0.

অনুসি. 2. জটিল মূলদ্বয়ের গুণফল = 1.

ω, $x^3=1$-এর একটি বীজ ; $\therefore\ \omega^3=1$.

$\therefore$ জটিল মূলদ্বয়ের গুণফল $=\omega.\omega^2=\omega^3=1$.

অনুসি. 3. ω-এর যে-কোন ধনাত্মক ঘাত = 1, বা ω, বা ω^2 ;

$\omega^1=\omega$, $(\omega)^2=\omega^2$, $\omega^3=1$, $\omega^4=\omega^3.\omega=\omega$, $\omega^5=\omega^3.\omega^2=\omega^2$,

$\omega^6=\omega^3.\omega^3=1$; $\omega^7=(\omega^3)^2.\omega=1^2\,\omega=\omega$; ইত্যাদি।

$\therefore$ n যদি একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হয়, তাহা হইলে

$$\omega^{3n}=(\omega^3)^n=(1)^n=1,$$

$$\omega^{3n+1}=\omega^{3n}\times\omega=\omega\ ;\ \omega^{3n+2}=\omega^{3n}\times\omega^2=\omega^2.$$

উদা. 1. প্রমাণ কর যে,

$(4\sqrt{-3}+6\sqrt{-2})(12\sqrt{-3}-15\sqrt{-2})$ একটি বাস্তব সংখ্যা।

উপরিউক্ত গুণফল $=(4i\sqrt{3}+6i\sqrt{2})(12i\sqrt{3}-15i\sqrt{2})$

$$=i(4\sqrt{3}+6\sqrt{2})\times i(12\sqrt{3}-15\sqrt{2})$$

$$=i^2(48\times3-60\sqrt{6}+72\sqrt{6}-90\times2)$$

$$=-(144-60\sqrt{6}+72\sqrt{6}-180)$$

$$=-(-36+12\sqrt{6})=36-12\sqrt{6}$$

= সম্পূর্ণ বাস্তব।

উদা. 2. (a) মূলদ হরবিশিষ্ট করিয়া প্রকাশ কর :

(i) $\dfrac{1}{3+\sqrt{-2}}$; (ii) $\dfrac{c+id}{c-id}-\dfrac{c-id}{c+id}$.

(i) $\dfrac{1}{3+\sqrt{-2}}=\dfrac{1}{3+i\sqrt{2}}=\dfrac{3-i\sqrt{2}}{(3+i\sqrt{2})(3-i\sqrt{2})}$

$$=\frac{3-i\sqrt{2}}{3^2-i^2(\sqrt{2})^2}=\frac{3-i\sqrt{2}}{9+2}=\frac{3}{11}-i\frac{\sqrt{2}}{11}.$$

(ii) $\dfrac{c+id}{c-id}-\dfrac{c-id}{c+id}=\dfrac{(c+id)^2-(c-id)^2}{c^2+d^2}$

$$=\frac{4.c.(id)}{c^2+d^2}=\frac{4cd}{c^2+d^2}\,i.$$

(b) $\frac{3-i5}{2+i3}$-কে $A+iB$-এর আকারে প্রকাশ কর।

$$\frac{3-i5}{2+i3}=\frac{(3-5i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)}=\frac{6-9i-10i-15}{4+9}$$

$$=-\frac{9}{13}-\frac{19}{13}i=-\frac{9}{13}+i\left(-\frac{19}{13}\right).$$

উদা. 3. (a) $3+4i$-এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

মনে কর, $\sqrt{3+4i}=x+iy$;

$\therefore\ (3+4i)=(x+iy)^2=x^2-y^2+2ixy$;

$\therefore\ x^2-y^2=3$ এবং $xy=2$.

$\therefore\ (x^2+y^2)^2=(x^2-y^2)^2+4x^2y^2=9+16=25,$

$\therefore\ x^2+y^2=5.\quad \therefore\ x^2=4,\ y^2=1.$

$\therefore\ x=\pm 2$ এবং $y=\pm 1.$

কিন্তু xy ধনাত্মক, $\therefore\ x=2,\ y=1,$ অথবা, $x=-2,\ y=-1.$

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $=\pm(2+i).$

(b) $\frac{1}{2}(-1+i\sqrt{3})$-এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

$$\tfrac{1}{2}(-1+i\sqrt{3})=\frac{-2+2i\sqrt{3}}{4}=\frac{-3+1+2i\sqrt{3}}{4}$$

$$=\frac{(i\sqrt{3}+1)^2}{4}.$$

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $=\pm\frac{1}{2}(i\sqrt{3}+1).$

(c) $x+i\sqrt{1-x^2}$-এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

$$x+i\sqrt{1-x^2}=\frac{2x+2i\sqrt{1-x^2}}{2}$$

$$=\frac{(1+x)-(1-x)+2i\sqrt{(1+x)(1-x)}}{2}$$

$$=\frac{(\sqrt{1+x}+i\sqrt{1-x})^2}{2}.$$

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{1+x}+i\sqrt{1-x}).$

উদা. 4. $x=3+2i$ হইলে, প্রমাণ কর যে,

$$x^4-4x^3+4x^2+8x+39=0.$$

$x-3=2i.$

$\therefore\ (x-3)^2 = 4i^2 = -4.$

$\therefore\ x^2 - 6x + 13 = 0.$

$\therefore\ x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 8x + 39$

$= x^2(x^2 - 6x + 13) + 2x(x^2 - 6x + 13) + 3(x^2 - 6x + 13)$

$= x^2 \times 0 + 2x \times 0 + 3 \times 0 = 0.$

উদা. 5. $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)(e^2 + f^2)$-কে দুইটি বর্গের সমষ্টিরূপে প্রকাশ কর।

$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (a + ib)(a - ib)(c + id)(c - id)$

$= \{(a + ib)(c + id)\}\{(a - ib)(c - id)\}$

$= \{(ac - bd) + i(ad + bc)\}\{(ac - bd) - i(ad + bc)\}$

$= (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2 = A^2 + B^2$, (মনে কর)।

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $= (A^2 + B^2)(e^2 + f^2)$

$= (Ae - Bf)^2 + (Af + Be)^2$ [উপরিপ্রদত্ত প্রমাণানুসারে]

$= \{(ac - bd)e - (ad + bc)f\}^2$

$+ \{(ac - bd)f + (ad + bc)e\}^2.$

উদা. 6. $\sqrt{a + ib} = x + iy$ হইলে, প্রমাণ কর যে,

$\sqrt{a - ib} = x - iy.$

বর্গ করিয়া, $a + ib = x^2 - y^2 + 2ixy$;

$\therefore\ a = x^2 - y^2,\ ib = 2ixy.$

$\therefore\ a - ib = x^2 - y^2 - 2ixy$

$= x^2 + (iy)^2 - 2ixy$

$= (x - iy)^2$;

$\sqrt{a - ib} = x - iy.$

উদা. 7. $(1 + x)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ হইলে, প্রমাণ কর যে,

$(a_0 - a_2 + a_4 - \cdots)^2 + (a_1 - a_3 + a_5 - \cdots)^2$

$= a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$

$(1 + x)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n.$

$\therefore\ (1 + i)^n = (a_0 - a_2 + a_4 - \cdots) + i(a_1 - a_3 + a_5 - \cdots)$ ... (1)

$(1 - i)^n = (a_0 - a_2 + a_4 - \cdots) - i(a_1 - a_3 + a_5 - \cdots)$ ... (2)

এবং $(1 + 1)^n = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ ... ... (3)

$\therefore$ (1) এবং (2) গুণ করিয়া,

$$(a_0 - a_2 + a_4 - \cdots)^2 + (a_1 - a_3 + a_5 - \cdots)^2$$
$$= \{(1+i)(1-i)\}^n = (1+1)^n = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n \text{ (3) হইতে।}$$

উদা. 8. দেখাও যে, x-এর বাস্তব মান $\frac{1-ix}{1+ix} = a - ib$-কে সিদ্ধ করে; যদি a এবং b বাস্তব হয়, এবং $a^2 + b^2 = 1$.

$$1 - ix = (1+ix)(a-ib)$$
$$= a + bx + i(ax - b)$$
$$= a + bx - i(b - ax).$$

$\therefore$ $a + bx = 1$ ... ... (1)

এবং $b - ax = x.$ ... ... (2)

(1) হইতে, $x = \frac{1-a}{b}$ এবং (2) হইতে, $x = \frac{b}{1+a}$;

$\therefore$ $\frac{1-a}{b} = \frac{b}{1+a}$. $\therefore$ $1 - a^2 = b^2$;

$\therefore$ $a^2 + b^2 = 1.$

উদা. 9. $\sqrt[3]{a+ib} = x + iy$ হইলে, প্রমাণ কর যে,

$$4(x^2 - y^2) = \frac{a}{x} + \frac{b}{y}.$$

$$a + ib = (x+iy)^3 = x^3 + 3x^2.iy + 3x.(iy)^2 + (iy)^3$$
$$= (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - y^3);$$

$\therefore$ $a = x^3 - 3xy^2,\ b = 3x^2y - y^3.$

$\therefore$ $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} = x^2 - 3y^2 + 3x^2 - y^2 = 4(x^2 - y^2).$

উদা. 10. প্রমাণ কর যে,

(i) $(\omega m + \omega^2 n)(\omega^2 m + \omega n) = m^2 - mn + n^2.$

(ii) $(x + \omega y + \omega^2 z)(x + \omega^2 y + \omega z) = x^2 + y^2 + z^2 - yz - zx - xy.$

(i) $(\omega m + \omega^2 n)(\omega^2 m + \omega n) = \omega^3 m^2 + mn(\omega^4 + \omega^2) + \omega^3 n^2$

$$= m^2 - mn + n^2.$$

$$[\because\ \omega^4 + \omega^2 = \omega^3.\omega + \omega^2 = \omega + \omega^2 = -1]$$

(ii) বাম পক্ষ $= x^2 + \omega^3 y^2 + \omega^3 z^2 + yz(\omega^2 + \omega^4) + zx(\omega^2 + \omega)$
$+ xy(\omega + \omega^2)$

$$= x^2 + y^2 + z^2 - yz - zx - xy.$$

$$[\because \quad \omega + \omega^2 = -1,\ \omega^4 + \omega^2 = \omega + \omega^2 = -1.]$$

উদা. 11. $a^2 + b^2 + c^2 - bc - ca - ab$-এর দুইটি উৎপাদক নির্ণয় কর।

$$a^2 + b^2 + c^2 - bc - ca - ab$$
$$= a^2 - (b+c)a + b^2 + c^2 - bc$$
$$= a^2 - (b+c)a + \left(\frac{b+c}{2}\right)^2 + b^2 + c^2 - bc - \left(\frac{b+c}{2}\right)$$
$$= \left(a - \frac{b+c}{2}\right)^2 + \frac{3b^2 + 3c^2 - 6bc}{4}$$
$$= \left(a - \frac{b+c}{2}\right)^2 + \left\{\frac{\sqrt{3}}{2}(b-c)\right\}^2$$
$$= \left\{a - \frac{b+c}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}(b-c)\right\}\left\{a - \frac{b+c}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}(b-c)\right\}$$
$$= a + \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)b + c\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\Bigg\}$$
$$\times \left\{a + \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)b + c\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\}$$
$$= (a + \omega b + \omega^2 c)(a + \omega^2 b + \omega c).$$

$$\left[\because \quad \omega = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{-3}}{2}\right.$$
$$\left. \text{এবং } \omega^2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{-3}}{2}.\right]$$

উদা. 12. প্রমাণ কর যে,

$$(1-\omega)(1-\omega^2)(1-\omega^4)(1-\omega^8) = 9. \qquad \text{[P. U. 1939, '46]}$$

প্রদত্ত রাশি $= (1-\omega)(1-\omega^2)(1-\omega)(1-\omega^2).$

$$= (1-\omega)^2(1-\omega^2)^2 = \{(1-\omega)(1-\omega^2)\}^2$$
$$= (1 - \omega - \omega^2 + \omega^3)^2$$
$$= \{2 - (\omega + \omega^2)\}^2 = (2+1)^2 = 9.$$

উদা. 13. $x = a + b,\ y = a + b\omega,\ z = a + b\omega^2$ হইলে, প্রমাণ কর যে,

$$x^3 + y^3 + z^3 = 3(a^3 + b^3). \qquad \text{[P. U. 1943]}$$

$$x+y\omega+z\omega^2=a+b+a\omega+b\omega^2+a\omega^2+b\omega^4$$
$$=a(1+\omega+\omega^2)+b(1+\omega+\omega^2)=0\quad[\because\quad \omega^4=\omega].$$
$$\therefore\quad x^3+(y\omega)^3+(z\omega^2)^3=3x(y\omega)(z\omega)^2,$$
বা, $x^3+y^3+z^3=3xyz=3(a+b)(a+b\omega)(a+b\omega^2)$
$$=3(a+b)\{a^2+b^2+(\omega+\omega^2)ab\}$$
$$=3(a+b)(a^2+b^2-ab)$$
$$=3(a^3+b^3).$$

উদা. 14. $(a^3+b^3+c^3-3abc)(x^3+y^3+z^3-3xyz)$-কে $A^3+B^3+C^3-3ABC$-এর আকারে প্রকাশ কর।

প্রদত্ত গুণফল $=\{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)\}$
$$\times\{(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy)\}$$
$$=\{(a+b+c)(x+y+z)\}\{(a+\omega b+\omega^2c)(x+\omega^2y+\omega z)\}$$
$$\times\{(a+\omega^2b+\omega c)(x+\omega y+\omega^2z)\}.$$

$ax+by+cz=A,\ az+bx+cy=B,\ ay+bz+cx=C$ ধরিলে,
$$(a+b+c)(x+y+z)=A+B+C.$$
$$(a+\omega b+\omega^2c)(x+\omega^2y+\omega^2z)=A+\omega B+\omega^2C$$
এবং $(a+\omega^2b+\omega c)(x+\omega y+\omega^2z)=A+\omega^2B+\omega C$;

$\therefore$ প্রদত্ত গুণফল $=A^3+C^3+B^3-3ABC.$

উদা. 15. প্রমাণ কর যে,
$$\sqrt{-1\sqrt{-1-\sqrt{-1}}}\cdots\text{অসীম পর্যন্ত}=\omega \text{ বা } \omega^2.$$

মনে কর, বাম পক্ষ $=x$;

$\therefore\quad x=\sqrt{-1-x}.$

$\therefore\quad x^2+x+1=0$; $\therefore\quad x=\omega$ বা ω^2.

প্রশ্নমালা 22

সরল কর (Simplify) :

1. $(3+7\sqrt{-3})(5-4\sqrt{-3})$. 2. $3\sqrt{-5}\times2\sqrt{-3}$.

3. $(3\sqrt{-7}+5\sqrt{-3})(2\sqrt{-7}-7\sqrt{-3})$.

$A+iB$-এর আকারে প্রকাশ কর (Express in the form $A+iB$) :

4. $\dfrac{(2+i)^3}{3+2i}$. 5. $\dfrac{a+ib}{c+id}$.

6. $x-\dfrac{1+\sqrt{-3}}{2}$-কে $x-\dfrac{1-\sqrt{-3}}{2}$ দ্বারা গুণ কর।

7. প্রমাণ কর যে, $\dfrac{3+2i}{2-5i}+\dfrac{3-2i}{2+5i}=-\dfrac{8}{29}$.

বর্গমূল নির্ণয় কর (Find the square root of) :

8. $1+4\sqrt{-3}$. 9. $7-30\sqrt{-2}$. 10. $4\sqrt{-5}-1$.

11. $-3-4i$. 12. $2i$.

13. $\sqrt{9+40i}+\sqrt{9-40i}$-এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

14. $(4+3\sqrt{-20})^{\frac{1}{2}}+(4-3\sqrt{-20})^{\frac{1}{2}}$-এর মান নির্ণয় কর।

15. $x+i\sqrt{x^4+x^2+1}$-এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

16. (i) $\sqrt[3]{-1}$-এর মান নির্ণয় কর।

(ii) 1-এর চতুর্থ মূল নির্ণয় কর।

17. প্রমাণ কর যে, $\left(\dfrac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)^{26}+\left(\dfrac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)^{26}=-1$.

18. প্রমাণ কর যে, $\left(\dfrac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)^{21}+\left(\dfrac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)^{21}=2$.

19. $m=\dfrac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ হইলে, $(1-m)^2(m-m^2)^2.(1-m^2)^2$-এর মান যত দূর সম্ভব সরল আকারে নির্ণয় কর।

1-এর ঘনমূল 1, ω, ω^2 হইলে, প্রমাণ কর :

20. $(1+\omega)^3-(1+\omega^2)^3=0$. 21. $\omega^4+2\omega^6+\omega^8=1$.

22. $(1-\omega+\omega^2)^3=(1+\omega-\omega^2)^3=-8$.

23. $x^3+y^3=(x+y)(\omega x+\omega^2 y)(\omega^2 x+\omega y)$.

24. $x^3-y^3=(x-y)(\omega x-\omega^2 y)(\omega^2 x-\omega y)$.

25. $(a+b+c)(a+\omega b+\omega^2 c)(a+\omega^2 b+\omega c)=a^2+b^3+c^3-3abc$.

26. $(x+y)^2+(x\omega+y\omega^2)^2+(x\omega^2+y\omega)^2=6xy$.

27. প্রমাণ কর যে, $(x^2+a^2)^3=(x^3-3xa^2)^2+(3x^2a-a^3)^2$.

28. প্রমাণ কর যে, $(x^2+a^2)^4=(x^4-6x^2a^2+a^4)^2+(4x^3a-4xa^3)^2$.

29. প্রমাণ কর যে, $(x^2+a^2)^5 = (x^5 - 10x^3a^2 + 5xa^4)^2$
$+ (5x^4a - 10x^2a^3 + a^5)^2$.

30. প্রমাণ কর যে, $(x^2+a^2)^7 = (x^7 - 21x^5a^2 + 35x^3a^4 - 7xa^6)^2$
$+ (7x^6a - 35x^4a^3 + 21x^2a^5 - a^7)^2$.

31. $X = ax + cy + bz$, $Y = cx + by + az$, $Z = bx + ay + cz$ হইলে, প্রমাণ কর যে,

(i) $X^2 + Y^2 + Z^2 - YZ - ZX - XY$
$= (a^2 + b^2 + c^2 - bc - ca - ab)(x^2 + y^2 + z^2 - yz - zx - xy)$.

(ii) $X^3 + Y^3 + Z^3 - 3XYZ$
$= (x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc)$.

32. $x = \sqrt{-2} - 1$ হইলে, প্রমাণ কর যে,

$$x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 9 = 12.$$ [C. U. 1886]

33. $x = 3 + 4i$ হইলে, প্রমাণ কর যে,

$$x^3 - 9x^2 + 43x - 75 = 0$$

এবং $$x^4 - 12x^3 + 70x^2 - 204x + 225 = 0.$$

34. নিম্নলিখিত জটিল রাশিগুলির মডিউল্যাস নির্ণয় কর :

(1) $(3+5i)(5+3i)$. (2) $(1+2i)(1+3i)(3+4i)$.

(3) $\dfrac{7-5i}{3+i}$. (4) $\dfrac{(2+3i)(1+i)}{(2-i)(3-2i)}$.

35. প্রমাণ কর যে,

(i) $(x + \omega y + \omega^2 z)^2 + (y + \omega z + \omega^2 x)^2 + (z + \omega x + \omega^2 y)^2 = 0$.

(ii) $(1 - \omega + \omega^2)(1 - \omega^2 + \omega^4)(1 - \omega^4 + \omega^8)\cdots\cdots$ to $2n$ উৎপাদক পর্যন্ত $= 2^{2n}$.

সপ্তম অধ্যায়

দ্বিঘাত-সমীকরণের তত্ত্ব

7·1. $ax^2+bx+c=0$ হইল দ্বিঘাত-সমীকরণের সাধারণ আকার। উৎপাদক-বিশ্লেষণ করিয়া এইরূপ সমীকরণের সমাধান-প্রণালী মাধ্যমিক স্তরেই আলোচিত হইয়াছে। ইহা ছাড়া একটি সাধারণ নিয়মে সকল দ্বিঘাত-সমীকরণেরই সমাধান করা চলে। পরবর্তী অনুচ্ছেদে সেই নিয়মে দেখান হইতেছে যে, প্রত্যেক দ্বিঘাত-সমীকরণের দুইটি বীজ থাকে এবং কখনই উহার দুইয়ের অধিক বীজ থাকিতে পারে না।

7·2. কোন দ্বিঘাত-সমীকরণের দুইটির বেশী বীজ থাকিতে পারে না :

$ax^2+bx+c=0$, যেন x-সম্বলিত একটি দ্বিঘাত-সমীকরণ।

প্রমাণ করিতে হইবে যে, এই সমীকরণের দুইটি মাত্র বীজ থাকিবে এবং কোনক্রমেই উহার দুইটির বেশী বীজ থাকিতে পারে না।

$$ax^2+bx+c=0 \text{ বলিয়া,}$$

$$a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=0, \text{ অথবা, } x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0,$$

অথবা, $$x^2+2x\cdot\frac{b}{2a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2,$$

অথবা, $$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2},$$

অথবা, $$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a};$$

$$\therefore \quad \mathbf{x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}.$$

ইহা হইতে দেখা যায় যে $ax^2+bx+c=0$ এই আকারের যে-কোন দ্বিঘাত-সমীকরণের দুইটি বীজ হয়, $\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ও $\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, এই আকারের। বীজ-দুইটিকে যথাক্রমে α ও β দ্বারা সূচিত করা হইল। এখন, আলোচ্য সাধারণ

দ্বিঘাত-সমীকরণটির তৃতীয় আরেকটি বীজ থাকা যদি সম্ভব হয়, তবে তাহা যেন γ; সেক্ষেত্রে সমীকরণটি α, β ও γ প্রত্যেকটি দ্বারা সিদ্ধ হইবে। অর্থাৎ

$$a\alpha^2+b\alpha+c=0 \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$$

$$a\beta^2+b\beta+c=0 \quad \cdots \quad \cdots \quad (2)$$

$$a\gamma^2+b\gamma+c=0 \quad \cdots \quad \cdots \quad (3)$$

(1) হইতে (2) বিয়োগ করিলে দেখা যায় যে,

$a(\alpha^2-\beta^2)+b(\alpha-\beta)=0$, অথবা $(\alpha-\beta)\{a(\alpha+\beta)+b\}=0$.

এখন, α ও β এক ও অভিন্ন নয় বলিয়া $\alpha-\beta\neq 0$, এবং সেই কারণে, অবশ্যই,

$$a(\alpha+\beta)+b=0 \quad \cdots \quad \cdots \quad (4)$$

অনুরূপে (1) ও (3) দেখা যায় যে,

$$a(\alpha+\gamma)+b=0 \quad \cdots \quad \cdots \quad (5)$$

এইবার, (4) হইতে (5) বিয়োগ করিলে দেখা যায় যে,

$$a(\beta-\gamma)=0 \quad \cdots \quad \cdots \quad (6)$$

অর্থাৎ হয়, $a=0$, নয়তো $\beta-\gamma=0$.

কিন্তু $a\neq 0$, কেননা a শূন্য হইলে $ax^2+bx+c=0$, সমীকরণটি $bx+c=0$-তে পরিণত হয় এবং তাহা আর দ্বিঘাত-সমীকরণ থাকে না। অতএব ধরিতে হয় যে, $\beta-\gamma=0$, বা $\beta=\gamma$; কিন্তু ইহা কল্পনাবিরুদ্ধ, কেননা কল্পনা অনুসারে β ও γ এক ও অভিন্ন নহে।

অতএব যে কল্পনা হইতে উহার বিরুদ্ধ সিদ্ধান্ত উৎপন্ন হয় সেই কল্পনা অবশ্যই ভ্রমাত্মক হইবে। অর্থাৎ আলোচ্য দ্বিঘাত-সমীকরণটির α ও β এই দুইটিই বীজ থাকিবে, উহার γ-জাতীয় তৃতীয় কোন বীজ থাকিতে পারে না। সুতরাং সাধারণভাবে বলা যায় যে-কোন দ্বিঘাত-সমীকরণের দুইটির বেশী বীজ থাকিতে পারে না।

অনুসিদ্ধান্ত। অজ্ঞাত রাশিটির তিনটি বিভিন্ন মান দ্বারা কোন দ্বিঘাত-সমীকরণ সিদ্ধ হইলে সমীকরণটি একটি অভেদ (identity) হইবে (অর্থাৎ সমীকরণটি উহার অজ্ঞাত রাশির সকল সসীম মান দ্বারাই সিদ্ধ হইবে)।

এস্থলে, উপরের (6) হইতে, $\beta-\gamma$ শূন্য নয় বলিয়া, $a=0$. আবার (4) অথবা (5) হইতে, $a=0$ বলিয়া, $b=0$, এবং (1), (2) বা (3) হইতে, $a=0$, $b=0$ বলিয়া, $c=0$. অতএব, এক্ষেত্রে সমীকরণটি

$$0.x^2+0.x+0=0$$

রূপ প্রাপ্ত হয়। স্পষ্টই, ইহা x-এর যে-কোন সসীম মান দ্বারাই সিদ্ধ।

উদা. 1. $2\{(x-a)(x-b)+(a-x)(a-b)+(b-x)(b-a)\}$
$=(a-b)^2+(x-a)^2+(x-b)^2$ কি সমীকরণ, না অভেদ ?

সমান চিহ্নযুক্ত বাম ও দক্ষিণ পক্ষস্থিত দ্বিঘাত-রাশিমালা দুইটিতে x-এর পরিবর্তে তিনটি বিভিন্ন মান a, b ও 0 বসাইলে, বাম পক্ষ দক্ষিণ পক্ষের সমান হয় বলিয়া, উহা x-এর সকল সসীম মান দ্বারাই সিদ্ধ হইবে। অতএব, উহা একটি অভেদ।

উদা. 2. যদি $(p-a)^3+(p-b)^3=2(p-c)^3$,
$(q-a)^3+(q-b)^3=2(q-c)^3$,
$(r-a)^3+(r-b)^3=2(r-c)^3$,
প্রমাণ কর যে, $(s-a)^3+(s-b)^3=2(s-c)^3$.

$(x-a)^3+(x-b)^3=2(x-c)^3$ সমীকরণটি বিবেচনা করা যাক।

সরল করিলে দেখা যায় যে, সমীকরণটি একটি দ্বিঘাত-সমীকরণ, এবং প্রদত্ত শর্ত-তিনটি হইতে বুঝা যাইতেছে যে, সমীকরণটি দ্বিঘাত হইলেও উহা p, q, r তিনটি মান দ্বারা সিদ্ধ ; অতএব, সমীকরণটি একটি অভেদ, অর্থাৎ উহা x-এর যে-কোন মান দ্বারাই সিদ্ধ হইবে। অতএব, সমীকরণটিতে $x=s$ বসাইয়া,

$$(s-a)^3+(s-b)^3=2(s-c)^3.$$

7·3. দ্বিঘাত-সমীকরণের বীজদ্বয়ের প্রকৃতি : নিরূপক (Nature of the roots of a quadratic : Discriminant) : বাস্তব এবং মূলদ সহগযুক্ত সাধারণ আকারের দ্বিঘাত-সমীকরণ $ax^2+bx+c=0$-এর বীজ-দুইটি হইতেছে

$$\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{ এবং } \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

অতএব,

(1) b^2-4ac ধনাত্মক হইলে, বীজ-দুইটি বাস্তব এবং অসমান হইবে ;

(2) b^2-4ac পূর্ণবর্গ হইলে, বীজ-দুইটি মূলদ এবং অসমান হইবে ; আর ধনাত্মক কিন্তু পূর্ণবর্গ না হইলে, বীজ-দুইটি অমূলদ এবং অসমান হইবে ;

(3) b^2-4ac শূন্য হইলে, বীজ-দুইটি বাস্তব এবং সমান হইবে ;

(4) b^2-4ac ঋণাত্মক হইলে, বীজ-দুইটি কাল্পনিক এবং অসমান হইবে।

সমাধান না করিয়া কেবলমাত্র b^2-4ac রাশিটির মান নির্ণয় করিয়াই দ্বিঘাত-সমীকরণের বীজের প্রকৃতি নির্ণয় করা যায় বলিয়া, b^2-4ac-কে দ্বিঘাত-সমীকরণটির **নিরূপক** (discriminant) বলা হয়।

উদা. 1. $2x^2+7x-4=0$ সমীকরণটির বীজ-দুইটির প্রকৃতি নির্ণয় কর।

এক্ষেত্রে নিরূপক $=7^2-4.2(-4)=49+32=81$.

81 একটি পূর্ণবর্গ বলিয়া, বীজ-দুইটি বাস্তব এবং অসমান।

উদা. 2. $2x^2-9x+8=0$ সমীকরণটির বীজদ্বয়ের প্রকৃতি নির্ণয় কর।

এক্ষেত্রে নিরূপক $=(-9)^2-4.2.8=81-64=17$.

17 পূর্ণবর্গ নহে বলিয়া, বীজ দুইটি বাস্তব, অমূলদ এবং অসমান।

উদা 3. $3x^2+4x+2=0$ সমীকরণটির বীজদ্বয়ের প্রকৃতি নির্ণয় কর।

এক্ষেত্রে নিরূপক $=4^2-4.3.2=16-24=-8$.

-8-এর বর্গমূল কাল্পনিক (imaginary) বলিয়া, বীজ-দুইটি কাল্পনিক এবং অসমান।

উদা. 4. m-এর মান কত হইলে, $x^2-2(5+2m)x+3(7+10m)=0$ সমীকরণটির বীজদ্বয় সমান হইবে? [Calcutta, 1936]

বীজ-দুইটি সমান বলিয়া নিরূপকের মান শূন্য হইবে।

এখন, নিরূপক $=\{-2(5+2m)\}^2-4.3(7+10m)$

$$=4(5+2m)^2-4.3(7+10m)=4(4m^2-10m+4)$$

$$=8(2m^2-5m+2)=8(2m-1)(m-2).$$

$\therefore$ বীজ-দুইটি সমান বলিয়া,

$$8(2m-1)(m-2)=0; \quad \therefore \; m=\mathbf{2} \text{ বা } \tfrac{1}{2}.$$

প্রশ্নমালা 23

[অন্যরূপ উল্লেখ না থাকিলে নিম্নলিখিত প্রশ্নসমূহে a, b, c প্রভৃতি অক্ষরগুলির প্রত্যেকটিকে বাস্তব ধরিতে হইবে।]

1. নিম্নলিখিত সমীকরণসমূহের বীজগুলির প্রকৃতি নির্ণয় কর:

(1) $3x^2+20x-19=0$. (2) $3x^2-8x+9=0$.

(3) $x^2+5x+4=0$. (4) $4x^2-12x+9=0$.

(5) $-3x^2-2x+6=0$. (6) $-4x^2+5x-8=0$.

(7) $x^2-2\sqrt{7}x-2=0$. [G. U. 1948]

(8) $99x^2+100x=101$. [A. U. 1921]

2. প্রমাণ কর যে, x-এর যে-কোন বাস্তব মানের জন্য $3x^2+7x+8=0$ সমীকরণটি সিদ্ধ হয় না।

3. $4x^2 - px + 9 = 0$-এর বীজদ্বয় সমান হইলে p-এর মান কত ?

4. m-এর মান কত হইলে, $2x^2 + 8x + m = 0$ সমীকরণটির বীজদ্বয় সমান হইবে ?

5. যদি $(1+m)x^2 - 2(1+3m)x + (1+8m) = 0$ সমীকরণটির বীজদ্বয় সমান হয়, তবে m-এর মান নির্ণয় কর।

6. প্রমাণ কর যে, $(a-b+c)x^2 + 4(a-b)x + (a-b-c) = 0$ সমীকরণটির বীজদ্বয় বাস্তব।

7. (a) দেখাও যে, $(a^2+c^2)x^2 + 2(ab+cd)x + (b^2+d^2) = 0$ সমীকরণটির বীজদ্বয় সমান, যখন $ad = bc$.

(b) যদি $(a^2+b^2)x^2 + 2(bc+ad)x + (c^2+d^2) = 0$ সমীকরণটির বীজদ্বয় বাস্তব হয়, তবে প্রমাণ কর যে, তাহারা সমান। [Punjab, 1937]

8. প্রমাণ কর যে, $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণটির বীজদ্বয় মূলদ, যখন a, b, c মূলদ সংখ্যা এবং $a+b+c=0$.

9. প্রমাণ কর যে, $(a-b)x^2 + 2(a+b)x - (a-b) = 0$ সমীকরণটির বীজদ্বয় বাস্তব।

10. প্রমাণ কর যে, $(b-2c-a)x^2 + (c+2a+b)x - (a+2b-c) = 0$ সমীকরণটির বীজদ্বয় মূলদ, যখন a, b, c মূলদ সংখ্যা।

11. প্রমাণ কর যে, $(b+c-a)x^2 + (c+a-b)x + (a+b-c) = 0$ সমীকরণটির বীজদ্বয় মূলদ, যখন a, b, c মূলদ সংখ্যা এবং $a+b+c=0$.

12. যদি $c=0$, অথবা $a^3+b^3+c^3 = 3abc$ হয়, প্রমাণ কর যে, $(b^2-ca)x^2 - 2(c^2-ab)x + (a^2-bc) = 0$ সমীকরণটির বীজদ্বয় সমান।

13. প্রমাণ কর যে, $ax^2 + 2bx + a = 0$ এবং $bx^2 + 4ax + b = 0$ সমীকরণদ্বয়ের একটির বীজদ্বয় বাস্তব হইলে, অপরটির বীজদ্বয় কাল্পনিক হইবে; সমীকরণদ্বয়ের চারিটি বীজই বাস্তব বা কাল্পনিক হইতে পারে না।

14. প্রমাণ কর যে, $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণটির বীজদ্বয় বাস্তব বা কাল্পনিক হইলে, তদনুসারে $cx^2 - 2(b-c)x + (4a-2b+c) = 0$ সমীকরণটির বীজদ্বয়ও বাস্তব বা কাল্পনিক হইবে।

15. প্রমাণ কর যে, $x^2 + px + q = 0$ সমীকরণটির বীজদ্বয় মূলদ, যদি $p = k + \frac{q}{k}$, যখন p, q, k মূলদ সংখ্যা।

16. প্রমাণ কর যে, নিম্নলিখিত রাশিমালাসমূহের প্রত্যেকটি একটি অভেদ :

(1) $\frac{a^2(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^2(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}=x^2.$

(2) $\frac{(a+x)^2}{(a-b)(a-c)}+\frac{(b+x)^2}{(b-c)(b-a)}+\frac{(c+x)^2}{(c-a)(c-b)}=1.$

(3) $\frac{a(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{b(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+\frac{c(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}=x.$

7·4. দ্বিঘাত-সমীকরণের সহগ ও বীজদ্বয়ের সম্বন্ধ :

$f(x)=ax^2+bx+c=0$ হইলে, সমীকরণটির বীজদ্বয়ের সমষ্টি ও গুণফল কি হইবে, নির্ণয় কর।

[If $f(x)=ax^2+bx+c=0$, find the sum and product of the roots.]

সাধারণ আকারের দ্বিঘাত-সমীকরণ $ax^2+bx+c=0$-এর বীজদ্বয় হইল,

$$\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{ এবং } \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

$$\alpha=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{ এবং } \beta=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \text{ ধরিলে,}$$

$$\alpha+\beta=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-2b}{2a}=-\frac{b}{a};$$

এবং $$\alpha\beta=\frac{(-b+\sqrt{b^2-4ac})(-b-\sqrt{b^2-4ac})}{4a^2}$$

$$=\frac{(-b)^2-(b^2-4ac)}{4a^2}=\frac{4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}.$$

অতএব, দেখা গেল যে,

(1) বীজদ্বয়ের সমষ্টি $=-\frac{b}{a}=-\frac{x\text{-এর সহগ}}{x^2\text{-এর সহগ}}$;

এবং **(2) বীজদ্বয়ের গুণফল** $=\frac{c}{a}=\frac{\text{পরম রাশি}}{x^2\text{-এর সহগ}}$।

অনুসিদ্ধান্ত। $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণটিকে $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$ আকারেও লেখা যায় বলিয়া, উপরের সিদ্ধান্ত-দুইটি হইতে অনায়াসেই এই সিদ্ধান্ত করা যায় যে, x^2-এর সহগ একক (unity) এবং একই পক্ষে লিখিত পদবিশিষ্ট $\boldsymbol{x^2+px+q=0}$ **আকারের দ্বিঘাত-সমীকরণে,**

(1) বীজদ্বয়ের সমষ্টি = পরিবর্তিত চিহ্নযুক্ত x-এর সহগ ;

এবং **(2) বীজদ্বয়ের গুণফল = সমীকরণটির পরম (অর্থাৎ x-মুক্ত) রাশি।**

7·5. প্রতিযোগী বীজ-বিষয়ক দুইটি প্রয়োজনীয় উপপাদ্য ঃ

(1) মূলদ সহগ-বিশিষ্ট দ্বিঘাত-সমীকরণের একটি বীজ অমূলদ হইলে, অপরটি উহার প্রতিযোগী অমূলদ রাশি হইবে।

ধরা যাক, দ্বিঘাত-সমীকরণ $ax^2+bx+c=0$-এর a, b ও c বাস্তব, এবং একটি বীজ $=m+\sqrt{n}$, যাহার m একটি মূলদ রাশি এবং $\sqrt{n}$ অমূলদ, এবং অপর বীজটি $=\beta$.

সুতরাং, $\beta+m+\sqrt{n}=-\dfrac{b}{a}$, ... (1)

এবং $\beta(m+\sqrt{n})=\dfrac{c}{a}$, ... (2)

(1) হইতে, $\beta=-\dfrac{b}{a}-m-\sqrt{n}=k-\sqrt{n}$ ... (3)

$\left[\text{এখানে } k=-\dfrac{b}{a}-m= \text{একটি মূলদ রাশি}\right]$

$\therefore$ (2)-তে β-এর এই মান বসাইলে,

$(k-\sqrt{n})(m+\sqrt{n})=\dfrac{c}{a}$, অর্থাৎ, একটি মূলদ রাশি ;

অথবা, $km-n+(k-m)\sqrt{n}=$একটি মূলদ রাশি ; ইহা অসম্ভব, যদি না অমূলদ অংশ $(k-m)\sqrt{n}=0$ হয়।

$\therefore$ $(k-m)\sqrt{n}=0$; অতএব, $k=m$.

$\therefore$ (3) হইতে, $\beta=m-\sqrt{n}$, অর্থাৎ $(m+\sqrt{n})$-এর প্রতিযোগী অমূলদ রাশি।

(2) বাস্তব সহগ-বিশিষ্ট দ্বিঘাত-সমীকরণের একটি বীজ জটিল রাশি হইলে, অপরটি উহার প্রতিযোগী জটিল রাশি হইবে।

মনে কর, $ax^2+bx+c=0$ দ্বিঘাত-সমীকরণটির a, b, c বাস্তব, এবং ইহার একটি বীজ $=m+in$, এস্থলে m এবং n বাস্তব, এবং $i=\sqrt{-1}$; এবং অপর বীজটি $=\beta$.

অতএব, $\beta+(m+in)=-\dfrac{b}{a}$, ... (1)

এবং $\beta(m+in)=\dfrac{c}{a}$. ... ... (2)

(1) হইতে, $\beta = -\dfrac{b}{a} - m - in = k - in$ ... (3)

[এখানে, $k = -\dfrac{b}{a} - m =$ একটি বাস্তব রাশি,

$\because$ a, b, m প্রত্যেকেই বাস্তব।]

সুতরাং, β-এর মান (2)-তে বসাইলে,

$(k - in)(m + in) = \dfrac{c}{a}$, অর্থাৎ একটি বাস্তব রাশি ;

অতএব, $km + n^2 + (k - m)in =$ একটি বাস্তব রাশি ; ইহা অসম্ভব, যদি না কাল্পনিক অংশ $= 0$ হয়।

$\therefore$ $(k - m)in = 0$; বা, $k = m$.

অতএব, (3) হইতে, $\beta = \mathbf{m - in}$, অর্থাৎ $(m + in)$-এর প্রতিযোগী জটিল রাশি।

7·6. দ্বিঘাত-সমীকরণের বীজদ্বয়-সম্বলিত প্রতিসম রাশিমালা (Symmetrical functions of the roots) :

কোন দ্বিঘাত-সমীকরণের বীজদ্বয়-সম্বলিত রাশিমালায় বীজদ্বয়ের স্থান পরস্পর পরিবর্তন করিয়া লিখিলেও রাশিমালাটির মান অক্ষুণ্ণ অর্থাৎ পূর্ববৎ থাকিলে, রাশিমালাটিকে বীজদ্বয়ের প্রতিসম (symmetrical) রাশিমালা বলা হয়।

এইরূপ প্রতিসম রাশিমালাকে বীজদ্বয়ের সমষ্টি ও গুণফল-সম্বলিত রাশিমালায় পরিবর্তিত করা যায়। বীজদ্বয়ের সমষ্টি ও গুণফলকে সমীকরণটির সহগ দ্বারা প্রকাশ করা যায় বলিয়া, স্পষ্টই এইরূপ রাশিমালার মান সমীকরণটির সহগ দ্বারা প্রকাশিত হইবে।

নিম্নলিখিত উদাহরণসমূহ হইতে বিষয়টি সুস্পষ্ট হইবে :

উদা. 1. $x^2 - px + q = 0$ সমীকরণটির বীজদ্বয় α এবং β হইলে, নিম্নলিখিত প্রতিসম রাশিমালাসমূহের মান নির্ণয় কর :

(i) $\dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta}$; (ii) $\alpha^2 + \beta^2$; (iii) $\alpha^3 + \beta^3$; (iv) $\alpha - \beta$;

(v) $\alpha^2 - \beta^2$; (vi) $\alpha^3 - \beta^3$.

এস্থলে, $\alpha + \beta = p$ এবং $\alpha\beta = q$;

$\therefore$ (i) $\dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta} = \dfrac{\beta + \alpha}{\alpha\beta} = \dfrac{p}{q}$;

(ii) $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = p^2 - 2q$;

(iii) $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = p^3 - 3qp = p^3 - 3pq$;

(iv) $(\alpha-\beta)=\pm\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}=\pm\sqrt{p^2-4q}$;

$\alpha>\beta$ হইলে, $\alpha-\beta=\sqrt{p^2-4q}$, এবং

$\sigma<\beta$ হইলে, $\alpha-\beta=-\sqrt{p^2-4q}$;

(v) $\alpha^2-\beta^2=(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=p\sqrt{p^2-4q}$; $(\alpha>\beta)$

(vi) $\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)=(\alpha-\beta)\{(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta\}$

$$=\sqrt{p^2-4q}\,(p^2-q)=(p^2-q)\sqrt{p^2-4q}.$$

উদা. 2. $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণটির বীজদ্বয় α এবং β হইলে, নিম্নলিখিত প্রতিসম রাশিমালাসমূহের মান নির্ণয় কর :

(i) $\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}$; (ii) $(m\alpha+n\beta)(n\alpha+m\beta)$; (iii) $\left(\frac{\alpha}{\beta}-\frac{\beta}{\alpha}\right)^2$;

(iv) $\frac{1}{(a\alpha+b)^3}+\frac{1}{(a\beta+b)^3}$ [C. U. 1943]

এস্থলে, $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$, এবং $\alpha\beta=\frac{c}{a}$;

(i) $$\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2\beta^2}=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{(\alpha\beta)^2}=\frac{\left(-\frac{b}{a}\right)^2-2\frac{c}{a}}{\left(\frac{c}{a}\right)^2}$$

$$=\frac{\frac{b^2}{a^2}-\frac{2c}{a}}{\frac{c^2}{a^2}}=\frac{\frac{b^2-2ac}{a^2}}{\frac{c^2}{a^2}}=\frac{b^2-2ac}{c^2};$$

(ii) $$(m\alpha+n\beta)(n\alpha+m\beta)=mn\alpha^2+(m^2+n^2)\alpha\beta+mn\beta^2$$
$$=mn(\alpha^2+\beta^2)+(m^2+n^2)\alpha\beta$$
$$=mn\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}+(m^2+n^2)\alpha\beta$$
$$=mn(\alpha+\beta)^2+(m-n)^2\alpha\beta$$
$$=mn\frac{b^2}{a^2}+(m-n)^2\frac{c}{a}$$
$$=\frac{mnb^2+(m-n)^2ac}{a^2};$$

(ii) $$\left(\frac{\alpha}{\beta}-\frac{\beta}{\alpha}\right)^2=\frac{(\alpha^2-\beta^2)^2}{(\alpha\beta)^2}=\frac{(\alpha+\beta)^2(\alpha-\beta)^2}{(\alpha\beta)^2}$$

$$=\frac{(\alpha+\beta)^2\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\}}{(\alpha\beta)^2}=\frac{\frac{b^2}{a^2}\left(\frac{b^2}{a^2}-\frac{4c}{a}\right)}{\frac{c^2}{a^2}}=\frac{b^2(b^2-4ac)}{a^2c^2}.$$

(iv) $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণটির α একটি বীজ ;

$$\therefore \quad a\alpha^2+b\alpha+c=0, \text{ বা, } \alpha(a\alpha+b)=-c, \text{ বা, } a\alpha+b=-\frac{c}{\alpha};$$

আবার β-ও ঐ সমীকরণটির একটি বীজ ;

$$\therefore \quad a\beta^2+b\beta+c=0, \text{ বা, } \beta(a\beta+b)=-c, \text{ বা, } a\beta+b=-\frac{c}{\beta}.$$

$$\therefore \quad \frac{1}{(a\alpha+b)^3}+\frac{1}{(a\beta+b)^3}=\frac{1}{\left(-\frac{c}{\alpha}\right)^3}+\frac{1}{\left(-\frac{c}{\beta}\right)^3}$$

$$=\frac{-\alpha^3}{c^3}+\frac{-\beta^3}{c^3}=-\frac{(\alpha^3+\beta^3)}{c^3}=-\frac{(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)}{c^3}$$

$$=-\frac{\left(-\frac{b}{a}\right)^3-3\frac{c}{a}\left(-\frac{b}{a}\right)}{c^3}=-\frac{-\frac{b^3}{a^3}+\frac{3bc}{a^2}}{c^3}=\frac{b^3-3abc}{a^3c^3}.$$

উদা. 3. $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণটির বীজদ্বয়ের অনুপাত $=r$ হইলে, প্রমাণ কর যে, $(r+1)^2/r=b^2/ac$.

মনে কর, সমীকরণটির বীজদ্বয় α ও $r\alpha$,

$$\therefore \quad \alpha+r\alpha=-\frac{b}{a} \text{ এবং } \alpha.r\alpha=\frac{c}{a},$$

অর্থাৎ $(r+1)\alpha=-\dfrac{b}{a}$ এবং $r\alpha^2=\dfrac{c}{a}$.

$$\therefore \quad \frac{(r+1)^2\alpha^2}{r\alpha^2}=\frac{\left(-\frac{b}{a}\right)^2}{\frac{c}{a}} \text{ বা, } \frac{(r+1)^2}{r}=\frac{b^2}{a^2}\times\frac{a}{c}=\frac{b^2}{ac}.$$

উদা. 4. কোন শর্ত সিদ্ধ হইলে, $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণটির বীজদ্বয় (1) সমান কিন্তু বিপরীত চিহ্নবিশিষ্ট, (2) একে অপরের অন্যোন্যক হইবে ?

(1) এক্ষেত্রে সমীকরণটির একটি বীজ α হইলে, অপরটি $-\alpha$ হইবে ;

$\therefore$ বীজ-দুইটির সমষ্টি $=\alpha+(-\alpha)=0$,

বা, $-\dfrac{b}{a}=0$; $\therefore$ $b=0$, নির্ণেয় শর্ত।

(2) এক্ষেত্রে একটি বীজ α হইলে, অন্যটি $\dfrac{1}{\alpha}$ হইবে ;

$\therefore$ বীজদ্বয়ের গুণফল $=\alpha\cdot\dfrac{1}{\alpha}=1$,

বা, $\dfrac{c}{a}=1$; $\therefore$ $c=a$, নির্ণেয় শর্ত।

উদা. 5. কোন্ শর্ত সিদ্ধ হইলে, $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণটির (1) একটি বীজ শূন্য (0) হইবে, (2) উভয় বীজই শূন্য হইবে ?

(1) সমীকরণটির একটি বীজ শূন্য হইলে, বীজদ্বয়ের গুণফল $=0$;

বা, $\frac{c}{a}=0$; $\therefore$ $c=0$, নির্ণেয় শর্ত।

(2) সমীকরণটির দুইটি বীজই শূন্য হইলে, বীজদ্বয়ের সমষ্টি এবং গুণফল উভয়ই শূন্য হইবে ;

$\therefore$ $-\frac{b}{a}=0$ এবং $\frac{c}{a}=0$,

বা, $b=0$ এবং $c=0$; $\therefore$ $b=c=0$, নির্ণেয় শর্ত।

উদা. 6. কোন্ শর্ত সিদ্ধ হইলে, $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণটির বীজদ্বয় (1) উভয়ই ধনাত্মক, (2) উভয়ই ঋণাত্মক এবং (3) একটি ধনাত্মক ও অপরটি ঋণাত্মক হইবে ?

(1) বীজ-দুইটি উভয়ই ধনাত্মক ; অতএব, উহাদের সমষ্টি ও গুণফল উভয়ই ধনাত্মক, অর্থাৎ, $-b/a$ এবং c/a উভয়ই ধনাত্মক।

$-\frac{b}{a}$ ধনাত্মক হইলে, $\frac{b}{a}$ ঋণাত্মক হইবে ;

$\therefore$ b ও a বিপরীত চিহ্নযুক্ত হইবে। ... ... (i)

আবার, c/a ধনাত্মক হইলে, c ও a একই চিহ্নযুক্ত হইবে। ... (ii)

(i) এবং (ii) হইতে, a ও c-এর চিহ্ন একই হইবে এবং ইহা b-এর চিহ্নের বিপরীত হইবে। ইহাই নির্ণেয় শর্ত।

(2) বীজ দুইটি উভয়ই ঋণাত্মক হইলে, উহাদের সমষ্টি ঋণাত্মক, কিন্তু গুণফল ধনাত্মক হইবে।

$\therefore$ এক্ষেত্রে, $-\frac{b}{a}$ ঋণাত্মক এবং $\frac{c}{a}$ ধনাত্মক।

$-\frac{b}{a}$ ঋণাত্মক হইলে, $\frac{b}{a}$ ধনাত্মক হইবে ; a ও b একই চিহ্নযুক্ত হইবে। (i)

আবার, $\frac{c}{a}$ ধনাত্মক হইলে, a ও c একই চিহ্নযুক্ত হইবে। ... (ii)

(i) ও (ii) হইতে দেখা যাইতেছে যে, এক্ষেত্রে, a, b ও c একই চিহ্নযুক্ত হইবে। ইহাই নির্ণেয় শর্ত।

(3) বীজ-দুইটির একটি ধনাত্মক ও একটি ঋণাত্মক হইলে, উহাদের গুণফল

ঋণাত্মক হইবে, অর্থাৎ c/a ঋণাত্মক হইবে। অতএব, a ও c বিপরীত চিহ্নযুক্ত হইবে। ইহাই নির্ণেয় শর্ত।

অধিকন্তু বৃহত্তর সাংখ্যমানবিশিষ্ট বীজটি ধনাত্মক হইলে, বীজ-দুইটির সমষ্টি, অর্থাৎ $-b/a$ ধনাত্মক হইবে, অর্থাৎ b/a ঋণাত্মক হইবে, আর ইহা ধনাত্মক হইলে বৃহত্তর সাংখ্যমানবিশিষ্ট বীজটি ঋণাত্মক হইবে।

অতএব, বৃহত্তর সাংখ্যমানবিশিষ্ট বীজটি ধনাত্মক হইলে, b ও c একই চিহ্নযুক্ত হইবে এবং এই চিহ্ন a-এর চিহ্নের বিপরীত হইবে ; আর বৃহত্তর সাংখ্যমানবিশিষ্ট বীজটি ঋণাত্মক হইলে, a ও b একই চিহ্নযুক্ত হইবে এবং এই চিহ্ন c-এর চিহ্নের বিপরীত হইবে।

উদা. 7. $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণটির একটি বীজ অপরটির চতুর্গুণ হইলে, প্রমাণ কর যে, $4b^2=25ac$. [Calcutta, 1940]

সমীকরণটির একটি বীজ α হইলে, অপরটি 4α হইবে ;

$$\therefore \quad \alpha+4\alpha=-\frac{b}{a} \quad \text{বা,} \quad 5\alpha=-\frac{b}{a}; \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$$

$$\text{এবং} \quad \alpha.4\alpha=\frac{c}{a}, \quad \text{বা,} \quad 4\alpha^2=\frac{c}{a}. \quad \cdots \quad \cdots \quad (2)$$

(1) হইতে, $\alpha=-\dfrac{b}{5a}$; α-এর এই মান (2)-এ বসাইয়া,

$$4\left(-\frac{b}{5a}\right)^2=\frac{c}{a}, \quad \text{বা,} \quad \frac{4b^2}{25a^2}=\frac{c}{a},$$

$$\text{বা,} \quad 4b^2=\frac{c}{a}\cdot 25a^2=25ac.$$

প্রশ্নমালা 24

1. $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণটির বীজদ্বয় α ও β হইলে, সমীকরণের সহগের মাধ্যমে নিম্নলিখিত রাশিমালাসমূহের মান নির্ণয় কর :

(i) $\alpha^4+\beta^4$; (ii) $\alpha^4-\beta^4$; (iii) $\alpha^5+\beta^5$;
(iv) $\alpha^5-\beta^5$; (v) $\alpha^6+\beta^6$; (vi) $\alpha^6-\beta^6$;
(vii) $\alpha^2\beta+\beta^2\alpha$; (viii) $\alpha^3\beta+\beta^3\alpha$; (ix) $\alpha^4\beta+\beta^4\alpha$;
(x) $\alpha^5\beta+\beta^5\alpha$; (xi) $\alpha^4\beta^7+\beta^4\alpha^7$; (xii) $\dfrac{\alpha^3}{\beta}+\dfrac{\beta^3}{\alpha}$;
(xiii) $\alpha^4\beta^{-2}+\beta^4\alpha^{-2}$; (xiv) $\alpha^3\beta^{-3}+\beta^3\alpha^{-3}$;

(xv) $\frac{1}{a\alpha-b}+\frac{1}{a\beta-b}$; (xvi) $\frac{\alpha^2}{\beta^2}+\frac{\beta^2}{\alpha^2}$; (xvii) $\frac{\alpha^2}{\beta}+\frac{\beta^2}{\alpha}$;

(xviii) $\frac{\alpha}{\beta^3}-\frac{\beta}{\alpha^3}$; (xix) $\frac{\alpha^2}{\beta^4}-\frac{\beta^2}{\alpha^4}$;

(xx) $\alpha^{p+1}\beta^q+\alpha^q\beta^{p+1}$.

2. $x^2-2(5+2m)x+3(7+10m)=0$ সমীকরণটির বীজদ্বয়ের একটি অপরটির অন্যোন্যক হইলে, m-এর মান কত ? [Calcutta, 1936]

3. $x^2+px+q=0$ সমীকরণটির বীজদ্বয় α এবং β হইলে, নিম্নলিখিত রাশিমালার মান p ও q-এর মাধ্যমে নির্ণয় কর :

(i) $\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2$; (ii) $\alpha^3+\alpha\beta+\beta^3$; (iii) $\alpha^4+\alpha^2\beta^2+\beta^4$;

(iv) $\alpha^{-3}+\beta^{-3}$; (v) $(1+\alpha+\alpha^2)(1+\beta+\beta^2)$;

(vi) $\alpha^2(\alpha+p)^{-1}+\beta^2(\beta+p)^{-1}$;

(vii) $\alpha^2(\alpha^2\beta^{-1}-\beta)+\beta^2(\beta^2\alpha^{-1}-\alpha)$. [Calcutta, 1941]

4. (a) $x^2+px+q=0$ সমীকরণটির বীজদ্বয় α ও β হইলে, নিম্নলিখিত প্রতিসম রাশিমালার মান নির্ণয় কর :

(i) $\alpha^{-3}+\beta^{-3}$ [Calcutta, 1946]; (ii) $\alpha^2\beta^{-2}+\beta^2\alpha^{-2}$;

(iii) $(\alpha+p)^{-4}+(\beta+p)^{-4}$.

(b) $3x^2-6x+4=0$ সমীকরণটির বীজদ্বয় α ও β হইলে, $\left(\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\right)+2\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)+3\alpha\beta$-এর মান নির্ণয় কর। [Calcutta, 1943]

5. $x^2-(1+k^2)x+\frac{1}{2}(1+k^2+k^4)=0$ সমীকরণটির বীজদ্বয় α ও β হইলে, প্রমাণ কর যে, $\alpha^2+\beta^2=k^2$. [Calcutta, 1909]

6. $ax^2-2bx+c=0$ সমীকরণটির বীজদ্বয় α ও β হইলে,

$$\frac{b}{a\alpha^2+c}+\frac{b}{a\beta^2+c}$$-এর মান নির্ণয় কর।

7. যদি $x^2+mx+m^2+n^2=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় x_1 ও x_2 হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $x_1^4+x_1^2x_2^2+x_2^4=n^2(2m^2+3n^2)$.

8. x_1 ও x_2 যদি $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণটির বীজদ্বয় হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}=\frac{b^2-2ac}{ac}$; এবং $2x^2-7x+3=0$ সমীকরণে ইহার প্রয়োগ করিয়া এই সূত্রের পরীক্ষা কর।

9. যদি α ও β এবং α' ও β' যথাক্রমে $x^2-px+q=0$ এবং $x^2-p'x+q'=0$ সমীকরণদ্বয়ের বীজদ্বয় হয়, তবে

(i) $(\alpha-\alpha')^2+(\beta-\alpha')^2+(\alpha-\beta')^2+(\beta-\beta')^2$; [Calcutta, 1913]

এবং (ii) $(\alpha-\alpha')(\beta-\beta')+(\beta-\alpha')(\alpha-\beta')$-এর মান নির্ণয় কর।

10. (a) $x^2-px+q=0$ সমীকরণটির একটি বীজ অপরটির দ্বিগুণ হইলে, প্রমাণ কর যে, $2p^2=9q$. [Calcutta, 1937]

(b) কোন্ শর্ত সিদ্ধ হইলে, $x^2+px+q=0$ সমীকরণটির বীজদ্বয়ের সমষ্টি বীজদ্বয়ের অন্তরের তিনগুণ হইবে ?

11. (a) যদি $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণটির বীজদ্বয়ের অনুপাত 2 : 3 হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $6b^2=25ac$. [Calcutta, 1949]

(b) $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণটির বীজদ্বয়ের অনুপাত 3 : 4 হইলে, প্রমাণ কর যে, $12b^2=49ac$. [Calcutta, 1945]

12. যদি $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণটির একটি বীজ অপরটির বর্গের সমান হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $b^3+a^2c+ac^2=3abc$.

[ইঙ্গিত : বীজ-দুইটির একটি α হইলে, অপরটি α^2 হইবে ;

$\therefore\ \alpha^2+\alpha=-\dfrac{b}{a}$ ... (1) এবং $\alpha^2.\alpha$ বা, $\alpha^3=\dfrac{c}{a}$ ... (2)

এখন, (2) হইতে, $\alpha=\left(\dfrac{c}{a}\right)^{\frac{1}{3}}$; α-এর এই মান (1)-এ বসাইয়া,

$$\left(\frac{c}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{c}{a}\right)^{\frac{1}{3}}=-\frac{b}{a};$$

এখন করণী নিরসন করিলেই নির্ণেয় ফল পাওয়া যাইবে।]

13. যদি $x^2+px+q=0$ সমীকরণটির একটি বীজ অপরটির বর্গের সমান হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $p^3-q(3p-1)+q^2=0$. [Calcutta, 1943]

14. (i) যদি $lx^2+nx+n=0$ সমীকরণের বীজদ্বয়ের অনুপাত $p:q$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $\sqrt{\dfrac{p}{q}}+\sqrt{\dfrac{q}{p}}+\sqrt{\dfrac{n}{l}}=0$. [Calcutta, 1948]

(ii) যদি $ax^2-bx+c=0$ সমীকরণটির বীজদ্বয়ের অনুপাত $p:q$ হয়, তবে a, b ও c-এর মধ্যে যে সম্বন্ধ, তাহা নির্ণয় কর।

15. যদি $x^2+px+q=0$ সমীকরণটির বীজদ্বয়ের অনুপাত, x^2+p_1x

$+q_1=0$ সমীকরণটির বীজদ্বয়ের অনুপাতের সমান হয়, প্রমাণ কর যে, $p^2q_1=p_1{}^2q$.

[ইঙ্গিত : $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha_1}{\beta_1}$; $\therefore \frac{\alpha}{\alpha_1}=\frac{\beta}{\beta_1}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha_1+\beta_1}=\sqrt{\frac{\alpha\beta}{\alpha_1\beta_1}}$; ইত্যাদি।]

16. $\frac{a}{x+a+k}+\frac{b}{x+b+k}=1$ সমীকরণটির বীজদ্বয় সমান কিন্তু বিপরীত চিহ্নযুক্ত ; k-এর মান নির্ণয় কর।

17. প্রমাণ কর যে, $x^2-2ax+b^2=0$ সমীকরণটির বীজদ্বয়ের সমান্তর-মধ্যক $x^2-2bx+a^2=0$ সমীকরণটির বীজদ্বয়ের গুণোত্তর-মধ্যকের সমান, এবং বিপরীতক্রমে।

18. যদি $x^2+Px+q=0$ সমীকরণটির বীজদ্বয় α ও β এবং $x^2+px+Q=0$ সমীকরণটির বীজদ্বয় γ, δ হয়, তবে α, β, γ ও δ-এর মাধ্যমে $x^2+px+q=0$ সমীকরণটির বীজদ্বয় নির্ণয় কর।

19. যদি $ax^2+2bx+c=0$ সমীকরণটির বীজদ্বয় α ও β এবং $Ax^2+2Bx+C=0$ সমীকরণটির বীজদ্বয় $\alpha+\delta$ ও $\beta+\delta$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে,

$$\frac{b^2-ac}{B^2-AC}=\left(\frac{a}{A}\right)^2.$$ [Calcutta, 1912]

20. যদি $x^2+2px+q=0$ এবং $x^2+2qx+p=0$ সমীকরণদ্বয়ের বীজের অন্তর একটি ধ্রুবক সংখ্যা হয় এবং p, q-এর সমান না হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $p+q+1=0$. [Calcutta, 1944]

21. যদি $x^2-px+q=0$ সমীকরণটির বীজদ্বয়ের অন্তর, $x^2-qx+p=0$ সমীকরণটির বীজদ্বয়ের অন্তরের সমান হয়, এবং p, q-এর সমান না হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $p+q+4=0$. [Calcutta, 1941]

22. $x^2-px+q=0$ সমীকরণটির বীজদ্বয়ের অন্তর 1 হইলে, প্রমাণ কর যে, $p^2+4q^2=(1+2q)^2$. [Allahabad, 1917]

7·7. প্রদত্ত বীজদ্বয় হইতে সমীকরণগঠন (To form the equation from the given roots) :

কোন দ্বিঘাত-সমীকরণের বীজ-দুইটি যেন α ও β. সমীকরণটি গঠন করিতে হইবে।

নির্ণেয় দ্বিঘাত-সমীকরণটি যদি $x^2+px+q=0$ হয়, তবে

$$\alpha+\beta=-p \text{ এবং } \alpha\beta=q.$$

$\therefore$ নির্ণেয় দ্বিঘাত-সমীকরণটি হইল

$$\mathbf{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0}$$

অর্থাৎ x^2-(বীজদ্বয়ের সমষ্টি) $x+$ বীজদ্বয়ের গুণফল $=0$.

7·8. কোন প্রদত্ত দ্বিঘাত-সমীকরণের বীজদ্বয়-সম্বলিত দুইটি রাশি যে সমীকরণের বীজ সেই সমীকরণগঠন :

নিম্নলিখিত উদাহরণসমূহ হইতে গঠন-প্রণালী সুস্পষ্ট হইবে :

(i) যে সমীকরণের বীজদ্বয় $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণটির বীজদ্বয়ের সমান কিন্তু বিপরীত চিহ্নযুক্ত, সেই সমীকরণটি গঠন কর। [Form the equation whose roots are equal in magnitude but opposite in sign to those of the equation $ax^2+bx+c=0$.]

$ax^2+bx+c=0$ সমীকরণটির দুইটি বীজ যেন α ও β ; তাহা হইলে,

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a} \text{ এবং } \alpha\beta=\frac{c}{a}.$$

নির্ণেয় সমীকরণের বীজদ্বয় $-\alpha$ ও $-\beta$; উহাদের সমষ্টি

$$=-(\alpha+\beta)=-\left(\frac{-b}{a}\right)=\frac{b}{a}; \text{ এবং গুণফল}=(-\alpha)(-\beta)=\alpha\beta=\frac{c}{a}.$$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণটি হইল $x^2-\left(\frac{b}{a}\right)x+\frac{c}{a}=0$, বা, $ax^2-bx+c=0.$

(ii) যে সমীকরণের বীজদ্বয় $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের বীজদ্বয়ের অন্যোন্যক, সেই সমীকরণটি গঠন কর। [*Form the equation whose roots are reciprocals of the roots of the equation* $ax^2+bx+c=0$.].

$ax^2+bx+c=0$ সমীকরণটির বীজ যেন α ও β তাহা হইলে,

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a} \text{ এবং } \alpha\beta=\frac{c}{a}.$$

এখন এরূপ একটি দ্বিঘাত-সমীকরণ গঠন করিতে হইবে, যাহার বীজ $\frac{1}{\alpha}$ এবং $\frac{1}{\beta}$.

নির্ণেয় সমীকরণের বীজদ্বয় $\frac{1}{\alpha}$ ও $\frac{1}{\beta}$ বলিয়া উহাদের সমষ্টি

$$=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}}=\frac{-b}{c};$$

$$\text{এবং গুণফল}=\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}=\frac{1}{\alpha\beta}=\frac{1}{\frac{c}{a}}=\frac{a}{c}.$$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণটি হইল $x^2-\left(\frac{-b}{c}\right)x+\frac{a}{c}=0$. বা, $cx^2+bx+a=0.$

(iii) যে সমীকরণের বীজদ্বয় কোন নির্দিষ্ট সমীকরণের বীজদ্বয়ের প্রতিসম রাশিমালা, সেই সমীকরণটি গঠন কর। [*To find the equation whose roots are symmetrical functions of the roots of a given equation.*]

নির্ণেয় সমীকরণের বীজদ্বয় প্রদত্ত সমীকরণের বীজদ্বয় দ্বারা গঠিত দুইটি প্রতিসম রাশিমালা হওয়ায় নির্ণেয় সমীকরণের বীজদ্বয়ের সমষ্টি এবং গুণফল উভয়ই প্রদত্ত সমীকরণের বীজদ্বয় দ্বারা গঠিত দুইটি প্রতিসম রাশি হইবে এবং ইহাদের মানও পূর্বালোচিত পদ্ধতিতে নির্ণয় করা যাইবে। নির্ণেয় সমীকরণের বীজদ্বয়ের সমষ্টি এবং গুণফল নির্ণীত হইলে সমীকরণটিকে অনায়াসেই লেখা যাইবে।

উদা. 1. (i) -12 এবং 3, (ii) $\frac{m+n}{m-n}$ এবং $\frac{m-n}{m+n}$ বীজদ্বয় হইতে দ্বিঘাত-সমীকরণ গঠন কর।

(i) এস্থলে, বীজদ্বয়ের সমষ্টি $= -12+3=-9$;

এবং বীজদ্বয়ের গুণফল $= -12\times 3 = -36$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণটি হইল $x^2-(-9)x+(-36)=0$;

বা, $x^2+9x-36=0$.

(ii) এস্থলে বীজদ্বয়ের সমষ্টি $=\frac{m+n}{m-n}+\frac{m-n}{m+n}=\frac{2(m^2+n^2)}{m^2-n^2}$;

এবং বীজদ্বয়ের গুণফল $=\frac{m+n}{m-n}\times\frac{m-n}{m+n}=1$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ হইল $x^2-\frac{2(m^2+n^2)}{m^2-n^2}x+1=0$;

বা, $(m^2-n^2)x^2-2(m^2+n^2)x+(m^2-n^2)=0$.

উদা. 2. $4+2\sqrt{3}$ যে মূলদ সহগ-বিশিষ্ট দ্বিঘাত-সমীকরণটির একটি বীজ, সেই দ্বিঘাত-সমীকরণটি গঠন কর।

একটি বীজ $4+2\sqrt{3}$; অতএব, অপর বীজটি অবশ্যই $4-2\sqrt{3}$ হইবে।

$\therefore$ বীজদ্বয়ের সমষ্টি $=(4+2\sqrt{3})+(4-2\sqrt{3})=8$,

এবং বীজদ্বয়ের গুণফল $=(4+2\sqrt{3})(4-2\sqrt{3})=16-12=4$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণটি হইল $x^2-8x+4=0$.

উদা. 3. $x=2+7\sqrt{-1}$ হইলে,

$x^3-2x^2+45x+114$-এর মান নির্ণয় কর।

$x=2+7\sqrt{-1}$;

∴ $x-2=7\sqrt{-1}$,

বা, $(x-2)^2=(7\sqrt{-1})^2=49\times(-1)$,

বা, $x^2-4x+4=-49$;

∴ $x^2-4x+53=0$;

∴ $x^3-2x^2+45x+114$

$=x(x^2-4x+53)+2(x^2-4x+53)+8$

$=(2+7\sqrt{-1})\times 0+2\times 0+8$

($x=2+7\sqrt{-1}$ বসাইয়া)

$=8$.

উদা. 4. $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণটির বীজদ্বয় α ও β হইলে, যে সমীকরণটির বীজদ্বয় $p\alpha+q\beta$ এবং $q\alpha+q\beta$, সেই সমীকরণটি গঠন কর।

এস্থলে, $\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$ এবং $\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$ বলিয়া, নির্ণেয় সমীকরণের বীজদ্বয়ের

$$\text{সমষ্টি}=(p\alpha+q\beta)+(q\alpha+p\beta)=(p+q)(\alpha+\beta)=(p+q)\left(-\frac{b}{a}\right)$$

$$=-\frac{b(p+q)}{a};$$

$$\text{এবং গুণফল}=(p\alpha+q\beta)(q\alpha+p\beta)=pq(\alpha^2+\beta^2)+(p^2+q^2)\alpha\beta$$

$$=pq\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}+(p^2+q^2)\alpha\beta$$

$$=pq(\alpha+\beta)^2+(p^2+q^2-2pq)\alpha\beta$$

$$=pq(\alpha+\beta)^2+(p-q)^2\alpha\beta$$

$$=\frac{pqb^2}{a^2}+\frac{(p-q)^2c}{a}=\frac{b^2pq+(p-q)^2ac}{a^2}.$$

∴ নির্ণেয় সমীকরণটি হইল

$$x^2+\frac{b(p+q)}{a}x+\frac{b^2pq+(p-q)^2ac}{a^2}=0,$$

বা, $a^2x^2+ab(p+q)x+b^2pq+(p-q)^2ac=0$.

উদা. 5. $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণটির বীজদ্বয় α ও β হইলে, যে সমীকরণটির বীজদ্বয় $\dfrac{1}{a\alpha+b}$ এবং $\dfrac{1}{a\beta+b}$, সেই সমীকরণটি গঠন কর।

$ax^2+bx+c=0$ সমীকরণটির বীজ α ও β ;

$\therefore \quad a\alpha^2+b\alpha+c$, বা, $\alpha(a\alpha+b)=-c$;

$\therefore \quad \dfrac{1}{a\alpha+b}=-\dfrac{\alpha}{c}$;

এবং $a\beta^2+b\beta+c=0$, বা, $\beta(a\beta+b)=-c$;

$\therefore \quad \dfrac{1}{a\beta+b}=-\dfrac{\beta}{c}$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণটির বীজদ্বয়ের

$$\text{সমষ্টি}=-\frac{\alpha}{c}-\frac{\beta}{c}=-\frac{1}{c}(\alpha+\beta)=-\frac{1}{c}\left[-\frac{b}{a}\right]=\frac{b}{ac};$$

এবং $\text{গুণফল}=\left(-\dfrac{\alpha}{c}\right)\times\left(-\dfrac{\beta}{c}\right)=\dfrac{\alpha\beta}{c^2}=\dfrac{c}{ac^2}=\dfrac{1}{ac}$.

নির্ণেয় সমীকরণটি হইল

$$x^2-\frac{b}{ac}x+\frac{1}{ac}=0, \quad \text{বা,} \quad acx^2-bx+1=0.$$

উদা. 6. $x^2+2ax+b=0$ সমীকরণটির বীজদ্বয় α ও β হইলে, যে মূলদ সহগ-বিশিষ্ট সমীকরণটির একটি বীজ $\alpha+\beta+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$, সেই সমীকরণটি গঠন কর।

$x^2+2ax+b=0$ সমীকরণটির দুইটি বীজ α ও β ;

$\therefore \quad \alpha+\beta=-2a$ এবং $\alpha\beta=b$.

মূলদ সহগ-বিশিষ্ট দ্বিঘাত-সমীকরণের একটি বীজ $\alpha+\beta+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ বলিয়া অপর বীজটি অবশ্যই $\alpha+\beta-\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ হইবে।

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণের বীজদ্বয়ের সমষ্টি $=2(\alpha+\beta)=-4a$;

এবং গুণফল $=(\alpha+\beta)^2-(\alpha^2+\beta^2)$

$=2\alpha\beta=2b$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণটি হইল

$$x^2-(-4a)x+2b=0, \quad \text{বা,} \quad x^2+4ax+2b=0.$$

উদা. 7. $x^2+x+1=0$ সমীকরণটির বীজদ্বয় α ও β হইলে, যে সমীকরণের বীজদ্বয় α^2 ও β^2, সেই সমীকরণটি গঠন কর। নির্ণেয় সমীকরণ ও প্রদত্ত সমীকরণ একই হয় কেন—তাহার কারণ ব্যাখ্যা কর। [Allahabad, 1924]

এস্থলে, $\alpha+\beta=-1$, এবং $\alpha\beta=1$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণের বীজদ্বয়ের

$$সমষ্টি = \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta$$
$$= 1 - 2 = -1;$$

এবং $\quad$ গুণফল $= \alpha^2\beta^2 = (\alpha\beta)^2 = 1.$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণটি $x^2 - (-1)x + 1 = 0,$

বা, $x^2 + x + 1 = 0.$

অতএব, দেখা যাইতেছে প্রদত্ত সমীকরণটিই নির্ণেয় সমীকরণ।

এখন, $\quad \alpha + \beta = -1; \quad \therefore \beta = -\alpha - 1. \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$

আবার, প্রদত্ত সমীকরণ $x^2 + x + 1 = 0$-এর একটি বীজ α বলিয়া,

$\alpha^2 + \alpha + 1 = 0; \quad \therefore \alpha^2 = -\alpha - 1 = \beta$, (1) হইতে।

আবার, $\quad \alpha + \beta = -1; \quad \therefore \alpha = -\beta - 1 \quad \cdots \quad \cdots \quad (2)$

আর, প্রদত্ত সমীকরণ $x^2 + x + 1 = 0$-এর একটি বীজ β বলিয়া,

$\beta^2 + \beta + 1 = 0; \quad \therefore \beta^2 = -\beta - 1 = \alpha$, (2) হইতে।

$\therefore$ $\alpha = \beta^2$ এবং $\beta = \alpha^2$; সুতরাং, দেখা গেল যে, নির্ণেয় সমীকরণের বীজদ্বয় এবং প্রদত্ত সমীকরণের বীজদ্বয় একই এবং সেইজন্যই নির্ণেয় সমীকরণ এবং প্রদত্ত সমীকরণ এক হইয়াছে।

উদা. 8. a যদি b-এর সমান না হয়, কিন্তু $a^2 = 5a - 3$ এবং $b^2 = 5b - 3$ হয়, তবে যে সমীকরণের বীজদ্বয় $\frac{a}{b}$ এবং $\frac{b}{a}$, সেই সমীকরণটি গঠন কর।

[Calcutta, 1950]

$a^2 - 5a + 3 = 0$ এবং $b^2 - 5b + 3 = 0$;

$\therefore$ স্পষ্টই, a ও b, $x^2 - 5x + 3 = 0$, দ্বিঘাত-সমীকরণটির দুইটি বীজ ;

$\therefore$ $a + b = 5$ এবং $ab = 3.$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণের বীজদ্বয়ের

$$সমষ্টি = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{a^2+b^2}{ab} = \frac{(a+b)^2 - 2ab}{ab}$$
$$= \frac{5^2 - 2.3}{3} = \frac{25-6}{3} = \frac{19}{3};$$

এবং গুণফল $= \frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = 1.$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণটি হইল

$$x^2 - \tfrac{19}{3}x + 1 = 0, \quad বা, \quad 3x^2 - 19x + 3 = 0.$$

উদা. 9. যে সমীকরণের বীজদ্বয় প্রত্যেকে $x^2-16x+63=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় হইতে 2 কম, সেই সমীকরণটি গঠন কর।

মনে কর, α ও β প্রদত্ত সমীকরণের দুইটি বীজ;

$\therefore\ \alpha+\beta=16$, এবং $\alpha\beta=63$.

প্রদত্ত সমীকরণের বীজ-দুইটি α ও β হওয়ায়, নির্ণেয় সমীকরণের বীজ-দুইটি হইবে $\alpha-2$ এবং $\beta-2$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণের বীজদ্বয়ের

সমষ্টি $=(\alpha-2)+(\beta-2)=\alpha+\beta-4=16-4=12$;

এবং গুণফল $=(\alpha-2)(\beta-2)=\alpha\beta-2(\alpha+\beta)+4$

$=63-2.16+4=67-32=35$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণটি হইল $x^2-12x+35=0$.

উদা. 10. যদি $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণটির বীজদ্বয় α ও β হয় এবং $a'x^2+b'x+c'=0$ সমীকরণটির বীজদ্বয় α' ও β' হয়, তবে যে সমীকরণের বীজদ্বয় $\alpha\alpha'+\beta\beta'$ ও $\alpha\beta'+\beta\alpha'$, সেই সমীকরণটি গঠন কর।

এস্থলে, $\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$, $\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$, $\alpha'+\beta'=-\dfrac{b'}{a'}$, এবং $\alpha'\beta'=\dfrac{c'}{a'}$.

$$\therefore\quad (\alpha\alpha'+\beta\beta')+(\alpha\beta'+\beta\alpha')$$
$$=(\alpha+\beta)(\alpha'+\beta')=\left(-\frac{b}{a}\right)\left(-\frac{b'}{a'}\right)=\frac{bb'}{aa'},$$

এবং
$$(\alpha\alpha'+\beta\beta')(\alpha\beta'+\beta\alpha')$$
$$=\alpha^2\alpha'\beta'+\beta^2\alpha'\beta'+\alpha'^2\alpha\beta+\beta'^2\alpha\beta$$
$$=\alpha'\beta'(\alpha^2+\beta^2)+\alpha\beta(\alpha'^2+\beta'^2)$$
$$=\alpha'\beta'\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}+\alpha\beta\{(\alpha'+\beta')^2-2\alpha'\beta'\}$$
$$=\frac{c'}{a'}\left\{\left(-\frac{b}{a}\right)^2-\frac{2c}{a}\right\}+\frac{c}{a}\left\{\left(-\frac{b'}{a'}\right)^2-2\frac{c'}{a'}\right\}$$
$$=\frac{c'(b^2-2ac)}{a^2a'}+\frac{c(b'^2-2a'c')}{a'^2a}$$
$$=\frac{1}{a^2a'^2}\left(b^2a'c'+b'^2ac-4aa'cc'\right).$$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণটি হইল

$$x^2-\frac{bb'}{aa'}x+\frac{b^2a'c'+b'^2ac-4aa'cc'}{a^2a'^2}=0,$$

বা, $$a^2a'^2x^2-aa'bb'x+(b^2a'c'+b'^2ac-4aa'cc')=0.$$

উদা. 11. $4x^2+2x-1=0$ সমীকরণটির একটি বীজ α হইলে, প্রমাণ কর যে, অপর বীজটি $4\alpha^3-3\alpha$.

α প্রদত্ত সমীকরণটির একটি বীজ বলিয়া,

$$4\alpha^2+2\alpha-1=0, \quad \text{বা,} \quad 4\alpha^2=1-2\alpha; \quad \therefore \quad 4\alpha^3=\alpha-2\alpha^2.$$

$$\therefore \quad 4\alpha^3-3\alpha=\alpha-2\alpha^2-3\alpha=-2\alpha-2\alpha^2$$

$$=-2\alpha-\tfrac{1}{2}(1-2\alpha)=-\alpha-\tfrac{1}{2}. \quad \cdots \quad (1)$$

এখন, প্রদত্ত সমীকরণটির বীজদ্বয়ের সমষ্টি $=-\frac{2}{4}$ বা $-\frac{1}{2}$ এবং উহার একটি বীজ α ;

$\therefore$ প্রদত্ত সমীকরণটির অপর বীজটি $=-\frac{1}{2}-\alpha=4\alpha^3-3\alpha$, (1) হইতে।

প্রশ্নমালা 25

1. নিম্নলিখিত সংখ্যাদ্বয় যে সমীকরণের বীজ, সেই সমীকরণ গঠন কর :

(i) 5, 7 ; (ii) 9, −2 ; (iii) −5, −3 ; (iv) 11, −7.

2. নিম্নলিখিত সম্বন্ধ হইতে যে দ্বিঘাত-সমীকরণের বীজদ্বয় p ও q, সেই সমীকরণ নির্ণয় কর এবং তাহা হইতে p ও q-এর মান নির্ণয় কর :

(i) $p+q=7, pq=12$; (ii) $p+q=2, pq=-15$;

(iii) $p+q=-6, pq=8$; (iv) $p+q=6, pq=2$;

(v) $p+q=5, pq=6$.

3. যদি $2x^2-5x+2=0$ সমীকরণটির বীজদ্বয় α ও β হয়, তবে যে সমীকরণের বীজদ্বয় নিম্নলিখিত প্রতিসম রাশিমালা, সেই সমীকরণ গঠন কর :

(i) $\frac{\alpha}{\beta^2}, \frac{\beta}{\alpha^2}$; (ii) $\alpha^2+\beta^2, \alpha^2-\beta^2$;

(iii) $\frac{1}{2\alpha-5}, \frac{1}{2\beta-5}$; (iv) $\frac{\beta}{2\alpha-5}, \frac{\alpha}{2\beta-5}$;

(v) $\alpha+\beta, \frac{1}{2}\alpha\beta$.

4. যদি $x^2+px+q=0$ সমীকরণটির বীজদ্বয় α ও β হয়, তবে যে সমীকরণসমূহের বীজদ্বয় নিম্নলিখিত প্রতিসম রাশিমালা, সেই সমীকরণসমূহ গঠন কর :

(i) $\frac{\alpha}{\beta}$ এবং $\frac{\beta}{\alpha}$; [C. U. 1936] (ii) $(\alpha+\beta)^2, (\alpha-\beta)^2$;

(iii) $\alpha^2+\alpha\beta, \beta^2+\alpha\beta$.

5. যদি $x^2+7x+12=0$ সমীকরণটির বীজদ্বয় p ও q হয়, তবে যে সমীকরণটির বীজ $(p+q)^2$ এবং $(p-q)^2$, সেই সমীকরণটি গঠন কর।

[Calcutta, 1920, '40]

6. যদি $x^2-px+q=0$ সমীকরণটির বীজদ্বয় α ও β হয়, তবে যে সমীকরণের বীজদ্বয় নিম্নলিখিত প্রতিসম রাশিমালা, সেই সমীকরণসমূহ গঠন কর :

(i) $2\alpha-\beta,\ 2\beta-\alpha$; (ii) $\alpha^{-1}+\beta^{-1},\ \alpha\beta$;

(iii) $m\alpha+n\beta,\ n\alpha+m\beta$; (iv) $\alpha^2+\alpha\beta^{-1},\ \beta^2+\beta\alpha^{-1}$;

(3) $\dfrac{q}{p-\alpha},\ \dfrac{q}{p+\beta}$.

7. যদি $x^2-px+q=0$ সমীকরণটির বীজদ্বয় α ও β হয়, যে সমীকরণের বীজদ্বয় $\dfrac{2}{\alpha}$ ও $\dfrac{2}{\beta}$, সেই সমীকরণটি নির্ণয় কর। ইহা হইতে প্রমাণ কর যে,

$$\frac{1}{\alpha^3}+\frac{1}{\beta^3}=\frac{p^3}{q^3}-\frac{3p}{q^2}.$$

8. $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণটির বীজদ্বয় α ও β হইলে, যে সমীকরণের বীজদ্বয় নিম্নলিখিত প্রতিসম রাশিমালা, সেই সমীকরণ গঠন কর :

(i) $\alpha^2,\ \beta^2$; (ii) $\alpha(1-\beta),\ \beta(1-\alpha)$; (iii) $\dfrac{a\alpha+b}{\beta},\ \dfrac{a\beta+b}{\alpha}$;

(iv) $\alpha+m\beta,\ \beta+m\alpha$; (v) $\alpha+\dfrac{1}{\beta},\ \beta+\dfrac{1}{\alpha}$.

9. যদি $3x^2+6x+2=0$ সমীকরণটির বীজ p ও q হয়, প্রমাণ কর যে, যে সমীকরণটির বীজদ্বয় $\dfrac{-p^2}{q}$ ও $\dfrac{-q^2}{p}$ সেই সমীকরণটি $3x^2-18x+2=0$ হইবে।

[Calcutta, 1955]

10. যদি $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণটির বীজদ্বয় α ও β হয়, তবে প্রমাণ কর যে, যে সমীকরণটির বীজদ্বয়

$\dfrac{1}{\alpha+\beta}$ এবং $\left(\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}\right)$ সেই সমীকরণটি $bcx^2+(b^2+ca)x+ab=0$ হইবে।

11. যে সমীকরণের বীজদ্বয় $x^2-5x+6=0$ সমীকরণটির বীজদ্বয়ের অন্যোন্যক, সেই সমীকরণটি গঠন কর।

12. যে সমীকরণের বীজদ্বয় $x^2-x+1=0$ সমীকরণটির বীজদ্বয়ের অন্যোন্যক, সেই সমীকরণটি গঠন কর।

[Allahabad, 1925]

13. যদি $x^2+x+1=0$ সমীকরণটির বীজদ্বয় α ও β হয়, তবে যে সমীকরণটির বীজদ্বয় $\frac{\alpha}{\beta}$ এবং $\frac{\beta}{\alpha}$, সেই সমীকরণটি নির্ণয় কর। নির্ণীত সমীকরণ এবং প্রদত্ত সমীকরণটি যে অভিন্ন, তাহার কারণ নির্দেশ কর।

14. যদি $ax^2-bx+c=0$ সমীকরণটির বীজদ্বয় α ও β হয়, তবে যে সমীকরণটির বীজদ্বয় $\frac{c}{b-a\alpha}$ ও $\frac{c}{b-a\beta}$ সেই সমীকরণটি নির্ণয় কর। নির্ণীত সমীকরণটি ও প্রদত্ত সমীকরণটি যে অভিন্ন, তাহার কারণ নির্দেশ কর।

15. যদি $x^2-px+q=0$ সমীকরণটির বীজদ্বয় α ও β হয়, তবে দেখাও যে, $qx^2-(p^2-2q)x+q=0$ সমীকরণটির একটি বীজ $\frac{\alpha}{\beta}$. [Calcutta, 1931]

16. $x^2+px+q=0$ সমীকরণটির বীজদ্বয়ের মাধ্যমে $q^2x^2-(p^2-2q)x+1=0$ সমীকরণটির বীজদ্বয় প্রকাশ কর। [Calcutta, 1932]

17. যদি $x^2+px+q=0$ সমীকরণটির বীজদ্বয় $\alpha\pm\sqrt{\beta}$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $(p^2-4q)(p^2x^2+4px)=16q$ সমীকরণটির বীজদ্বয়

$$\frac{1}{\alpha}\pm\frac{1}{\sqrt{\beta}} \text{ হইবে।}$$

18. যদি $\alpha^{\frac{1}{2}}\pm\beta^{-\frac{1}{2}}$, $x^2-px+q=0$ সমীকরণটির বীজদ্বয় নির্দেশ করে, তবে প্রমাণ কর যে, যে সমীকরণের বীজদ্বয় $\alpha\pm\beta$, সেই সমীকরণটি $(p^2-4q)^2(4x-p^2)^2=256$.

19. মূলদ সহগবিশিষ্ট যে দ্বিঘাত-সমীকরণের একটি বীজ $3-\sqrt{5}$, সেই সমীকরণটি নির্ণয় কর।

20. নিম্নলিখিত রাশিমালার মান নির্ণয় কর :

(i) $x^3-7x^2+13x-2$, যখন $x=2+\sqrt{3}$;

(ii) $x^3-4x^2-9x+97$, যখন $x=4+\sqrt{-7}$;

(iii) $x^4+4x^3+6x^2+4x+9$, যখন $x=\sqrt{-2}-1$;

(iv) $16x^3-16x^2-11x+173$, যখন $x=\frac{1}{4}(6+7\sqrt{-1})$.

21. $x^2+7x+12=0$ সমীকরণটির বীজদ্বয় অপেক্ষা যে সমীকরণের বীজদ্বয় প্রত্যেকে $\frac{1}{2}$ কম, সেই সমীকরণটি নির্ণয় কর।

22. যে সমীকরণের বীজদ্বয় $ax^2-2bx+c=0$ সমীকরণের বীজদ্বয়ের অন্যোন্যক, সেই সমীকরণটি নির্ণয় কর। ইহা হইতে প্রমাণ কর যে, a-এর মান সীমাহীনভাবে হ্রাস পাইলে, প্রদত্ত সমীকরণটির বীজদ্বয়ের একটি অনির্দিষ্টভাবে বৃদ্ধি পায়।

7·9. দুইটি সমীকরণের সাধারণ বীজ থাকিবার শর্ত :

যে শর্ত সিদ্ধ হইলে $ax^2+bx+c=0$ এবং $a'x^2+b'x+c'=0$ সমীকরণ-দুইটির একটি সাধারণ বীজ থাকে তাহা নির্ণয় কর। [To find the condition that the equations $ax^2+bx+c=0$ and $a'x^2+b'x+c'=0$ may have a common root.]

সমীকরণ-দুইটির সাধারণ বীজ যেন α.

α উভয় সমীকরণের বীজ বলিয়া, α দ্বারা উভয় সমীকরণই সিদ্ধ হয়।

$$\left.\begin{array}{ll}\therefore & a\alpha^2+b\alpha+c=0 \\ \text{এবং} & a'\alpha^2+b'\alpha+c'=0\end{array}\right\}$$

বজ্রগুণন দ্বারা,

$$\frac{\alpha^2}{bc'-b'c}=\frac{\alpha}{ca'-c'a}=\frac{1}{ab'-a'b}; \qquad \cdots \quad (\text{ক})$$

$$\therefore \quad \frac{\alpha^2}{(ca'-c'a)^2}=\frac{\alpha^2}{bc'-b'c}\cdot\frac{1}{ab'-a'b}.$$

$$\therefore \quad \mathbf{(ca'-c'a)^2=(bc'-b'c)(ab'-a'b)}\ ;$$

ইহাই নির্ণেয় শর্ত।

অনুসি. 1. (ক) হইতে সুস্পষ্ট যে, সাধারণ বীজ α

$$=\frac{ca'-c'a}{ab'-a'b}, \text{ অথবা, } \frac{bc'-b'c}{ca'-c'a}.$$

অনুসি. 2. প্রথম সমীকরণটির অপর বীজটি

$$=\left(\frac{c}{a}\div\frac{ca'-c'a}{ab'-a'b}\right), \text{ অথবা, } \left(\frac{c}{a}\div\frac{bc'-b'c}{ca'-c'a}\right),$$

অর্থাৎ, $$\frac{c(ab'-a'b)}{a(ca'-c'a)}, \text{ অথবা, } \frac{c(ca'-c'a)}{a(bc'-b'c)}.$$

দ্বিতীয় সমীকরণটির অপর বীজটি

$$=\left(\frac{c'}{a'}\div\frac{ca'-c'a}{ab'-a'b}\right), \text{ অথবা, } \left(\frac{c'}{a'}\div\frac{bc'-b'c}{ca'-c'a}\right),$$

অর্থাৎ, $$\frac{c'(ab'-a'b)}{a'(ca'-c'a)}, \text{ অথবা, } \frac{c'(ca'-c'a)}{a'(bc'-b'c)}.$$

উদা. 1. প্রমাণ কর যে, $x^2+bx+ca=0$ এবং $x^2+cx+ab=0$ সমীকরণদ্বয়ের একটি সাধারণ বীজ থাকিলে, উহাদের অপর বীজদ্বয় দ্বারা $x^2+ax+bc=0$ সমীকরণটি সিদ্ধ হইবে।

সাধারণ বীজটি α হইলে,

$$\alpha^2 + b\alpha + ca = 0,$$

এবং $\alpha^2 + c\alpha + ab = 0.$

$\therefore$ বজ্রগুণন দ্বারা,

$$\frac{\alpha^2}{a(b^2 - c^2)} = \frac{\alpha}{-a(b-c)} = \frac{1}{-(b-c)},$$

বা, $$\frac{\alpha^2}{a(b+c)} = \frac{\alpha}{-a} = \frac{1}{-1}; \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$$

এখন, (1) হইতে সাধারণ বীজ $\alpha = \frac{-a}{-1} = a$;

$\therefore \quad a(b+c) \times (-1) = (-a)^2$, বা, $-a(b+c) = a^2$,

বা, $-(b+c) = a$, বা, $a + b + c = 0. \quad \cdots \quad \cdots \quad (2)$

$\therefore$ প্রথম সমীকরণের বীজদ্বয়ের গুণফল ca বলিয়া, ইহার অপর বীজটি $ca \div a = c$ এবং দ্বিতীয় সমীকরণের বীজদ্বয়ের গুণফল ab বলিয়া, ইহার অপর বীজটি $ab \div a = b$.

এখন, c ও b বীজদ্বয়ের দ্বারা গঠিত সমীকরণটি হইল

$$x^2 - (b+c)x + bc = 0,$$

বা, $x^2 + ax + bc = 0$, কারণ (2) হইতে $-(b+c) = a$.

সুতরাং, সমীকরণ-দুইটির অপর বীজদ্বয় c ও b দ্বারা $x^2 + ax + bc = 0$ সমীকরণটি সিদ্ধ হয়।

উদা. 2. যদি $ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d = 0$ এবং $ax^2 + 2bx + c = 0$ সমীকরণদ্বয়ের একটি সাধারণ বীজ থাকে, তবে প্রমাণ কর যে, $(bc - ad)^2 = 4(ac - b^2)(bd - c^2)$.

সাধারণ বীজটি α হইলে,

$$a\alpha^3 + 3b\alpha^2 + 3c\alpha + d = 0, \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$$

এবং $a\alpha^2 + 2b\alpha + c = 0. \quad \cdots \quad \cdots \quad (2)$

$\therefore$ (1) এবং (2) হইতে,

$$(a\alpha^3 + 3b\alpha^2 + 3c\alpha + d) - \alpha(a\alpha^2 + 2b\alpha + c) = 0,$$

বা, $b\alpha^2 + 2c\alpha + d = 0. \quad \cdots \quad \cdots \quad (3)$

(2) এবং (3) হইতে বজ্রগুণন দ্বারা,

$$\frac{\alpha^2}{2(bd - c^2)} = \frac{\alpha}{bc - ad} = \frac{1}{2(ac - b^2)};$$

$$\therefore \quad \frac{a^2}{(bc-ad)^2} = \frac{a^2}{2(bd-c^2)} \cdot \frac{1}{2(ac-b^2)};$$

$$\therefore \quad (bc-ad)^2 = 4(ac-b^2)(bd-c^2);$$

ইহাই নির্ণেয় শর্ত।

7·10. $ax^2+bx+c=0$ দ্বিঘাত-সমীকরণটির দুইটি বীজ α ও β হইলে, প্রমাণ করিতে হইবে যে, $ax^2+bx+c \equiv a(x-\alpha)(x-\beta)$.

$ax^2+bx+c=0$ দ্বিঘাত-সমীকরণটির দুইটি বীজ α ও β.

$$\therefore \quad \alpha+\beta = -\frac{b}{a} \text{ এবং } \alpha\beta = \frac{c}{a}.$$

$$\therefore \quad ax^2+bx+c \equiv a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$$

$$\equiv a\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\} \equiv a(x-\alpha)(x-\beta).$$

দ্রষ্টব্য 1. এই সূত্র অনুসারে যে-কোন দ্বিঘাত রাশিমালাকে দুইটি একঘাত (linear) গুণনীয়কে বিশ্লেষণ করা যায়।

দ্রষ্টব্য 2. (ক) α ও β বাস্তব ও অসমান হইলে, ax^2+bx+c-এর গুণনীয়ক-দুইটি বাস্তব ও অসমান হইবে, অর্থাৎ, $b^2 > 4ac$ হইলে, গুণনীয়ক দুইটিও বাস্তব ও অসমান হইবে;

(খ) α ও β বাস্তব ও সমান হইলে, ax^2+bx+c-এর গুণনীয়ক-দুইটিও বাস্তব ও সমান হইবে, অর্থাৎ, $b^2=4ac$ হইলে, ax^2+bx+c-এর গুণনীয়ক-দুইটি বাস্তব ও সমান হইবে, অর্থাৎ, ax^2+bx+c একটি পূর্ণবর্গ হইবে;

(গ) α ও β অবাস্তব হইলে, ax^2+bx+c-এর কোন বাস্তব গুণনীয়ক থাকিবে না, অর্থাৎ, $b^2 < 4ac$ হইলে, ax^2+bx+c-এর কোন বাস্তব গুণনীয়ক থাকে না।

উদা. $3x^2-7x+3$ রাশিমালাকে একঘাত গুণনীয়কে বিশ্লেষণ কর।

$3x^2-7x+3=0$ সমীকরণটির বীজদ্বয় $\frac{7 \pm \sqrt{49-36}}{5} = \frac{7 \pm \sqrt{13}}{6}$.

$$\therefore \quad 3x^2-7x+3 \equiv 3\left(x-\frac{7+\sqrt{13}}{6}\right)\left(x-\frac{7-\sqrt{13}}{6}\right).$$

7·11. যে শর্ত সিদ্ধ হইলে, ax^2+bx+c এবং $a'x^2+b'x+c'$ দ্বিঘাত রাশিমালা-দুইটির একটি সাধারণ একঘাত গুণনীয়ক থাকে, তাহা নির্ণয় কর। (To find the condition

that the two quadratic expressions ax^2+bx+c and $a'x^2+b'x+c'$ may have a common linear factor.)

$x-a$ রাশিমালা-দুইটির একটি সাধারণ গুণনীয়ক হইলে, $x-a$ দ্বারা রাশিমালা দুইটি সম্পূর্ণরূপে বিভাজ্য ;

$\therefore\ aa^2+ba+c,$ এবং $a'a^2+b'a+c'=0.$

[7·9 অনুচ্ছেদে সমাধান দ্রষ্টব্য]

উদা. 1. কোন্ শর্ত সিদ্ধ হইলে $lx^2+mxy+ny^2$ এবং $l'x^2+m'xy+n'y^2$ রাশিমালাদ্বয়ের একটি সাধারণ একঘাত গুণনীয়ক থাকিবে ?

ধরা যাক, $lx^2+mxy+ny^2 \equiv l(x-ay)\times(x-by)$ ... (1)

এবং $l'x^2+m'xy+n'y^2 \equiv l'(x-ay)\times(x-b'y)$ ... (2)

তাহা হইলে, $x-ay$ রাশিমালাদ্বয়ের সাধারণ একঘাত গুণনীয়ক।

এখন, $x=ay$ ধরিলে, (1) এবং (2) উভয়েরই দক্ষিণ পক্ষের মান $=0$ হয় ;

অতএব, $x=ay$ ধরিলে, (1) এবং (2) উভয়ের বাম পক্ষের মানও $=0$ হইবে।

$\therefore$ $x=ay$ বসাইলে (1) হইতে পাই

$$l(ay)^2+m(ay)y+ny^2=0\ ;$$

বা, $la^2+ma+n=0,$ ... ... (3)

অনুরূপে, $l'a^2+m'a+n'=0.$ ... ... (4)

$\therefore$ (3) এবং (4) হইতে বজ্রগুণন দ্বারা,

$$\frac{a^2}{mn'-m'n}=\frac{a}{nl'-n'l}=\frac{1}{lm'-l'm}\ ;$$

$$\therefore\quad \frac{a^2}{(nl'-n'l)^2}=\frac{a^2}{mn'-m'n}\cdot\frac{1}{lm'-l'm}\ ;$$

$$\therefore\quad (nl'-n'l)^2=(mn'-m'n)(lm'-l'm)\ ;$$

ইহাই নির্ণেয় শর্ত।

উদা. 2. যে শর্ত সিদ্ধ হইলে $ax^2+2hxy+by^2$ এবং $a'x^2+2h'xy+b'y^2$ রাশিমালাদ্বয় যথাক্রমে $y-mx$ এবং $my+x$ আকারের গুণনীয়ক দ্বারা বিভাজ্য, তাহা নির্ণয় কর।

মনে কর, $ax^2+2hxy+by^2 \equiv b(y-mx)(y-nx)$ ... (1)

এবং $a'x^2+2h'xy+b'y^2 \equiv a'(x+my)(x-ny).$ ... (2)

এখন, $y=mx$ ধরিলে, (1)-এর দক্ষিণ পক্ষটি শূন্য হয় বলিয়া, উহার বাম পক্ষটিও শূন্য হইবে ;

$\therefore \quad ax^2+2hx.mx+b(mx)^2=0,$

বা, $a+2hm+bm^2=0. \qquad \cdots \qquad \cdots \quad (3)$

আবার, $x=-my$ ধরিলে, (2)-এর দক্ষিণ পক্ষটি শূন্য হয় বলিয়া, উহার বাম পক্ষটিও শূন্য হইবে ;

$\therefore \quad a'(-my)^2+2h'(-my)y+b'y^2=0,$

বা, $a'm^2-2h'm+b'=0. \qquad \cdots \qquad \cdots \quad (4)$

(3) এবং (4) হইতে দেখা যায়,

$bm^2+2hm+a=0,$

এবং $a'm^2-2h'm+b'=0.$

$\therefore$ বজ্রগুণন দ্বারা,

$$\frac{m^2}{2(hb'+h'a)}=\frac{m}{aa'-bb'}=\frac{1}{-2(bh'+a'h)};$$

$\therefore \quad (aa'-bb')^2=-4(hb'+h'a)(bh'+a'h),$

বা, $(aa'-bb')^2+4(hb'+h'a)(bh'+a'h)=0$;

ইহাই নির্ণেয় শর্ত।

7·12. যে শর্ত সিদ্ধ হইলে, x এবং y সম্বলিত সাধারণ দ্বিঘাত রাশিমালা $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$-কে দুইটি একঘাত গুণনীয়কে বিশ্লেষণ করা যাইতে পারে, তাহা নির্ণয় কর :

$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0,$

বা, $ax^2+2x(hy+g)+(by^2+2fy+c)=0.$

[x-এর শক্তির অধঃক্রম অনুসারে সাজাইয়া]

ইহাকে x-এর দ্বিঘাত-সমীকরণরূপে গণ্য করিলে,

$$x=\frac{-2(hy+g)\pm\sqrt{4(hy+g)^2-4a(by^2+2fy+c)}}{2a}$$

$$=\frac{-(hy+g)\pm\sqrt{(hy+g)^2-a(by^2+2fy+c)}}{a}$$

$\therefore \quad ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c$

$$= a\left\{x + \frac{hy+g-\sqrt{(hy+g)^2 - a(by^2+2fy+c)}}{a}\right\}$$

$$\times\left\{x + \frac{hy+g+\sqrt{(hy+g)^2 - a(by^2+2fy+c)}}{a}\right\}.$$

স্পষ্টই, গুণনীয়ক-দুইটিকে একঘাত-বিশিষ্ট হইতে হইলে,

$(hy+g)^2 - a(by^2+2fy+c)$-কে একটি পূর্ণবর্গ হইতে হইবে,

অর্থাৎ, $y^2(h^2-ab) + 2y(gh-af) + (g^2-ac)$-কে একটি পূর্ণবর্গ হইতে হইবে,

$\therefore \quad 4(gh-af)^2 = 4(h^2-ab)(g^2-ac),$

বা, $\quad g^2h^2 - 2afgh + a^2f^2 = h^2g^2 - h^2ac - abg^2 + a^2bc,$

বা, উভয় পক্ষ হইতে h^2g^2 বাদ দিয়া এবং উভয় পক্ষকে a দ্বারা ভাগ করিয়া,

$\mathbf{abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2 = 0}$ **;**

ইহাই নির্ণেয় শর্ত, এবং বামপক্ষস্থ রাশিমালাটিকে x, y সম্বলিত সাধারণ দ্বিঘাত রাশিমালাটির নিরূপক বলা হয়।

উদা. 1. দেখাও যে, $2x^2 + xy - x - 3y^2 + 16y - 21$ রাশিমালাকে দুইটি একঘাত গুণনীয়কে বিশ্লেষণ করা যায়।

$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c$ রাশিমালাটিকে দুইটি একঘাত গুণনীয়কে বিশ্লেষণ করা যাইতে পারে, যদি

$abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2 = 0$ হয়।

এক্ষেত্রে, $\quad a = 2,\ h = \frac{1}{2},\ b = -3,\ g = -\frac{1}{2},\ f = 8,\ c = -21.$

এখন, $\quad abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2$

$$= 2.(-3).(-21) + 2.8.(-\tfrac{1}{2}).\tfrac{1}{2} - 2.8^2 - (-3)(-\tfrac{1}{2})^2 - (21)(\tfrac{1}{2})^2$$

$$= 126 - 4 - 128 + \tfrac{3}{4} + \tfrac{21}{4} = -6 + \tfrac{24}{4} = -6 + 6 = 0.$$

অতএব, প্রদত্ত রাশিমালাটিকে দুইটি একঘাত গুণনীয়কে বিশ্লেষণ করা যাইতে পারে।

উদা. 2. m-এর মান কত হইলে, $2x^2 - xy - y^2 + 5x + my + 2 = 0$ রাশিমালা দুইটি একঘাত গুণনীয়কের গুণফলের সমান হইবে?

এস্থলে, $\quad a = 2,\ b = -1,\ c = 2,\ f = \frac{m}{2},\ g = \frac{5}{2},\ h = -\frac{1}{2}.$

$\therefore \quad abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2$

$$= 2.(-1).2 + 2\cdot\frac{m}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) - 2\left(\frac{m}{2}\right)^2$$

$$-(-1)(\tfrac{5}{2})^2 - 2(-\tfrac{1}{2})^2$$

$$= -4 - \frac{5}{4}m - \frac{m^2}{2} + \frac{25}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{m^2}{2} - \frac{5}{4}m + \frac{7}{4}.$$

এখন, প্রদত্ত রাশিটিকে দুইটি একঘাত গুণনীয়কে বিশ্লেষণ করা সম্ভব হইলে, $abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2=0$ হইলে,

অর্থাৎ, $-\frac{m^2}{2}-\frac{5}{4}m+\frac{7}{4}=0$ হইবে।

$\therefore\quad -\frac{m^2}{2}-\frac{5}{4}m+\frac{7}{4}=0$, বা, $2m^2+5m-7=0$;

$\therefore\ m=\frac{-5\pm\sqrt{25+56}}{4}=1,\ -\frac{7}{2}$.

উদা. 3. $2x^2+xy-6y^2-5x+11y-3$ রাশিমালার একঘাত গুণনীয়ক-দুইটি নির্ণয় কর।

$2x^2+xy-6y^2-5x+11y-3=0$ সমীকরণটি বিবেচনা করা যাক।

সমীকরণটিকে $2x^2+(y-5)x-(6y^2-11y+3)=0$ রূপে লিখিয়া এবং ইহাকে x-এর একটি দ্বিঘাত-সমীকরণরূপে গণ্য করিয়া সমাধান করিলে, দেখা যায়,

$$x=\frac{-(y-5)\pm\sqrt{(y-5)^2+8(6y^2-11y+3)}}{4}$$

$$=\frac{-(y-5)\pm\sqrt{49y^2-98y+49}}{4}$$

$$=\frac{-(y-5)\pm(7y-7)}{4}=\frac{6y-2}{4},\text{ বা, }\frac{-8y+12}{4}$$

$$=\frac{3y-1}{2},\text{ বা, }(-2y+3).$$

$$\therefore\ 2x^2+xy-6y^2-5x+11y-3$$

$$=2\left(x-\frac{3y-1}{2}\right)\left\{x-(-2y+3)\right\}$$

$$=(2x-3y+1)(x+2y-3).$$

প্রশ্নমালা 26

1. (a) m-এর মান কত হইলে, $3x^2+4mx+2=0$ এবং $2x^2+3x-2=0$-এর একটি সাধারণ বীজ থাকে, তাহা নির্ণয় কর। [Calcutta, 1934]

(b) যদি $x^2+px+q=0$ এবং $x^2+qx+p=0$-এর একটি সাধারণ বীজ থাকে, তবে প্রমাণ কর যে, হয় $p=q$, অথবা, $p+q+1=0$. [Calcutta, 1939]

2. যদি $x^2+px+q=0$ এবং $x^2+p'x+q'=0$ সমীকরণদ্বয়ের একটি সাধারণ বীজ থাকে, তবে তাহা, হয় $\frac{pq'-p'q}{q-q'}$ বা $\frac{q-q'}{p'-p}$.

3. যদি $ax^2+bx+c=0$ এবং $cx^2+bx+a=0$ সমীকরণদ্বয়ের একটি সাধারণ বীজ থাকে, তবে দেখাও যে, $a+b+c=0$, অথবা, $a-b+c=0$.

4. যে শর্ত সিদ্ধ হইলে, $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণটির একটি বীজ $a'x^2+b'x+c'=0$-এর একটি বীজের সমান কিন্তু বিপরীত চিহ্নবিশিষ্ট হয়, তাহা নির্ণয় কর।

5. যে শর্ত সিদ্ধ হইলে, $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণটির একটি বীজ $a'x^2+b'x+c'=0$ সমীকরণটির একটি বীজের অন্যোন্যক হয়, তাহা নির্ণয় কর।

6. যে শর্ত সিদ্ধ হইলে, x^2+px+q এবং $x^2+p'x+q'$ রাশিমালাদ্বয়ের একটি সাধারণ একঘাত গুণনীয়ক থাকে, তাহা নির্ণয় কর।

7. a-এর মান কত হইলে, $x^2-11x+a$ এবং $x^2-14x+2a$ রাশিমালাদ্বয়ের একটি সাধারণ গুণনীয়ক থাকে, তাহা নির্ণয় কর।

8. যদি $x^2+ax+b=0$ সমীকরণটির একটি বীজ $x^2+cx+d=0$ সমীকরণটির একটি বীজ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, প্রথম সমীকরণটির অপর বীজটি $x^2+(2a-c)x+a^2-ac+d=0$ সমীকরণের একটি বীজ হইবে।

9. যদি ax^2+bx+c এবং bx^2+cx+a রাশিমালাদ্বয়ের একটি সাধারণ একঘাত গুণনীয়ক থাকে, তবে প্রমাণ কর যে, $a=0$, অথবা, $a^3+b^3+c^3=3abc$.

10. যে শর্ত সিদ্ধ হইলে, $ax^2+2hxy+by^2$ রাশিমালার $y-mx$ এবং $my+x$ আকারের দুইটি একঘাত গুণনীয়ক থাকে, তাহা নির্ণয় কর।

11. যদি $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের বীজদ্বয় $a'x^2+b'x+c'=0$ সমীকরণের বীজদ্বয়ের বর্গমূল হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $a'b^2+a^2b'=2aa'c$ এবং $a'c^2=c'a^2$.

12. যদি $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণটির বীজদ্বয় $a'x^2+b'x+c'=0$ সমীকরণটির বীজদ্বয়ের n-গুণ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $an^2/a'=bn/b'=c/c'$.

13. প্রমাণ কর যে, যদি $ax^2+by^2+cz^2+2ayz+2bzx+2cxy$-কে দুইটি একঘাত গুণনীয়কে বিশ্লেষণ করা যায়, তাহা হইলে, $a^3+b^3+c^3=3abc$.

14. m-এর মান কত হইলে, $x^2+8xy-4y^2+2my-5$ দুইটি একঘাত গুণনীয়কের গুণফলের সমান হয়, তাহা নির্ণয় কর।

15. প্রমাণ কর যে, $8x^2-8xy-6y^2+18x+21y-18$-কে দুইটি একঘাত গুণনীয়কে বিশ্লেষণ করা যায়। গুণনীয়কগুলি নির্ণয় কর।

7·13. দ্বিঘাত রাশিমালার মানের চিহ্ন :

প্রমাণ কর যে, x-এর সকল বাস্তব মানের জন্যই ax^2+bx+c রাশিমালাটির মান a-র চিহ্নবিশিষ্ট হইবে, কেবলমাত্র $ax^2+bx+c=0$

সমীকরণটির বীজদ্বয় বাস্তব এবং ভিন্ন হইলে এবং x-এর মান ঐ বীজদ্বয়ের অন্তর্বর্তী হইলে ঐরূপ হইবে না। (To show that for all real values of x the expression ax^2+bx+c has the same sign as a, except when the roots of the corresponding equation $ax^2+bx+c=0$, are real and different, and x lies between them.)

মনে কর, $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণটির বীজ α ও β.

তাহা হইলে, $ax^2+bx+c \equiv a(x-\alpha)(x-\beta)$.

এখন এই বীজ-দুইটি তিনপ্রকার হইতে পারে: (ক) বাস্তব এবং সমান, (খ) অবাস্তব, (গ) বাস্তব এবং অসমান।

(ক) বীজ-দুইটি বাস্তব এবং সমান হইলে, $\alpha=\beta$;

$\therefore$ $ax^2+bx+c \equiv a(x-\alpha)^2 = a \times$ একটি ধনাত্মক রাশি ;

$\therefore$ x-এর সকল বাস্তব মানের জন্যই ax^2+bx+c রাশিমালাটির মান a-র চিহ্নবিশিষ্ট হইবে।

(খ) বীজ-দুইটি অবাস্তব হইলে, মনে কর, $\alpha=m+in$ এবং $\beta=m-in$;

$$\therefore\quad ax^2+bx+c = a\{x-(m+in)\}\{x-(m-in)\}$$

$$= a\{(x-m)-in\}\{(x-m)+in\}$$

$$= a\{(x-m)^2+n^2\} = a \times \text{একটি ধনাত্মক রাশি।}$$

$\therefore$ x-এর সকল অবাস্তব মানের জন্যই ax^2+bx+c রাশিমালাটির মান a-র চিহ্নবিশিষ্ট হইবে।

(গ) বীজ-দুইটি বাস্তব কিন্তু অসমান হইলে, মনে কর, $\alpha > \beta$.

এখন, x-এর মান α ও β-র অন্তর্বর্তী হইলে, অর্থাৎ, $\beta < x < \alpha$ হইলে, $x-\alpha$ ঋণাত্মক হইবে এবং $x-\beta$ ধনাত্মক হইবে; অতএব, $(x-\alpha)(x-\beta)$ একটি একটি ঋণাত্মক রাশি হইবে ;

$$\therefore\quad \text{এক্ষেত্রে, } ax^2+bx+c \equiv a(x-\alpha)(x-\beta)$$

$$= a \times \text{একটি ঋণাত্মক রাশি ;}$$

স্পষ্টই, a ধনাত্মক হইলে, দক্ষিণ পক্ষ একটি ঋণাত্মক রাশি হইবে।

a ঋণাত্মক রাশি হইলে, দক্ষিণ পক্ষ একটি ধনাত্মক রাশি হইবে।

$\therefore$ এক্ষেত্রে, ax^2+bx+c-এর মান a-র বিপরীত চিহ্নবিশিষ্ট হইবে।

এইবার মনে কর, x-এর মান α ও β-র অন্তর্বর্তী নহে।

এক্ষেত্রে যদি x-এর মান α ও β অপেক্ষা বৃহত্তর হয়, তাহা হইলে, $x-\alpha$ ও

$x-\beta$ উভয়ই ধনাত্মক হইবে ; আর যদি x-এর মান α ও β অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হয়, তাহা হইলে, $x-\alpha$ ও $x-\beta$ উভয়ই ঋণাত্মক হইবে।

সুতরাং, উভয় ক্ষেত্রেই, $(x-\alpha)(x-\beta)$ ধনাত্মক হইবে।

$\therefore\quad ax^2+bx+c \equiv a(x-\alpha)(x-\beta) = a \times$ একটি ধনাত্মক রাশি।

$\therefore\quad x$-এর মান α ও β-এর অন্তর্বর্তী না হইলে, ax^2+bx+c রাশিমালাটির মান a-র চিহ্নবিশিষ্ট হইবে।

অতএব, দেখা গেল যে, x-এর সকল বাস্তব মানের জন্যই ax^2+bx+c রাশিমালাটির মান a-র চিহ্নবিশিষ্ট হইবে, কেবলমাত্র $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণটির বীজদ্বয় বাস্তব এবং ভিন্ন হইলে এবং x-এর মান ঐ বীজদ্বয়ের অন্তর্বর্তী হইলে, ঐরূপ হইবে না।

7·14. দ্বিঘাত রাশিমালার চরম ও অবম মান :

ax^2+bx+c রাশিমালাটি ধরা যাক।

মনে কর, x-এর বাস্তব মানের জন্য $ax^2+bx+c=y$.

তাহা হইলে, $ax^2+bx+(c-y)=0$ দ্বিঘাত-সমীকরণটির বীজদ্বয় বাস্তব।

এখন, সমীকরণটি সমাধান করিয়া,

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4a(c-y)}}{2a}$$

$$=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{4a\left(-\frac{4ac-b^2}{4a}\right)}}{2a}$$

$$=-\frac{b}{2a}\pm\frac{1}{a}\sqrt{a\left(y-\frac{4ac-b^2}{4a}\right)}.$$

এখন, x বাস্তব বলিয়া, মূলচিহ্ন-অন্তর্গত রাশিটি $=0$ বা একটি ধনাত্মক রাশি হইবে।

$\therefore\quad$ (i) $y=\frac{4ac-b^2}{4a}$, এস্থলে $x=-\frac{b}{2a}$;

অথবা, (ii) $y-\frac{4ac-b^2}{4a}$, এবং a উভয়ই অবশ্য ধনাত্মক বা ঋণাত্মক হইবে।

I. অতএব, x-এর বাস্তব মানের জন্য যদি a ধনাত্মক হয়, তাহা হইলে,

(i) $y=\frac{4ac-b^2}{4a}$, অথবা, (ii) $y>\frac{4ac-b^2}{4a}$.

সুতরাং, y (অর্থাৎ ax^2+bx+c)-এর অবম মান $=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$ এবং $x=-\dfrac{b}{2a}$ হইলেই এই অবম মান হইবে।

ইহা স্পষ্টই প্রতীয়মান হয় যে, এক্ষেত্রে ইহার চরম মানের কোন নির্দিষ্ট সীমা নাই।

II. যদি a ঋণাত্মক হয়, তাহা হইলে,

(i) $y=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$, অথবা, (ii) $y<\dfrac{4ac-b^2}{4a}$.

সুতরাং, y (অর্থাৎ ax^2+bx+c)-এর চরম মান $=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$, এবং $x=-\dfrac{b}{2a}$ হইলেই এরূপ চরম মান পাওয়া যায়।

ইহা স্পষ্টই প্রতীয়মান হয় যে, এক্ষেত্রে অবম্ মানের কোন নির্দিষ্ট সীমা নাই।

উদা. 1. x-এর বাস্তব মানের জন্য $3x^2-2x+5$-এর চিহ্ন নির্ণয় কর।

$3x^2-2x+5=3(x^2-\frac{2}{3}x+\frac{5}{3})=3\{(x-\frac{1}{3})^2+\frac{14}{9}\}$.

এখন, x বাস্তব বলিয়া $(x-\frac{1}{3})^2$ সর্বদাই ধনাত্মক হইবে ;

$\therefore$ $(x-\frac{1}{3})^2+\frac{14}{9}$ সর্বদাই ধনাত্মক হইবে।

$\therefore$ x-এর সকল বাস্তব মানের জন্যই প্রদত্ত রাশিমালাটি ধনাত্মক হইবে।

উদা. 2. x-এর বাস্তব মানের জন্য $x^2-6x+10$-এর অবম (লঘিষ্ঠ) মান নির্ণয় কর।

প্রদত্ত রাশিমালা $=(x^2-6x+9)+1=(x-3)^2+1$.

এখন, x-এর সকল বাস্তব মানের জন্য $(x-3)^2$ ধনাত্মক। অতএব রাশিমালাটি সর্বদাই >1, এবং যখন $x=3$ হইবে, রাশিমালাটি $=1$ হইবে।

$\therefore$ রাশিমালাটির অবম মান $=1$.

উদা. 3. x-এর মান কত হইলে, $2x^2+5x-3$ রাশিমালা ঋণাত্মক হইবে? ইহার অবম মান কত? [Calcutta, 1950]

প্রথম অংশ ঃ $2x^2+5x-3=2x^2+6x-x-3$

$=(x+3)(2x-1)=2(x+3)(x-\frac{1}{2})$.

[লক্ষণীয় যে, প্রথমে $2x^2+5x-3=0$-এর বীজ $\frac{1}{2}$ এবং -3 নির্ণয় করিয়া একেবারেই $2x^2+5x+3=2(x+3)(x-\frac{1}{2})$ লেখা যায়।]

এখন, x-এর মান $>\frac{1}{2}$ হইলে, $x+3$ এবং $x-\frac{1}{2}$ উভয়ই ধনাত্মক হইবে ;

$\therefore$ রাশিমালাটির মানও ধনাত্মক হইবে।

x-এর মান <-3 হইলে, $x+3$ এবং $x-\frac{1}{2}$ উভয়ই ঋণাত্মক হইবে ;

$\therefore$ রাশিমালাটির মান ধনাত্মক হইবে।

$-3 < x < \frac{1}{2}$ হইলে, $x+3$ ধনাত্মক এবং $x-\frac{1}{2}$ ঋণাত্মক হইবে ;

$\therefore$ রাশিমালাটির মান ঋণাত্মক হইবে।

দ্বিতীয় অংশ : মনে কর, $2x^2+5x-3=y$.

$\therefore$ x বাস্তব বলিয়া, $2x^2+5x-(3+y)=0$ সমীকরণটির বীজদ্বয় বাস্তব ;

$\therefore$ নিরূপক, $25+8(3+y) \nless 0$, বা, $8y+49 \nless 0$, $y \nless -\frac{49}{8}$.

$\therefore$ y অর্থাৎ প্রদত্ত রাশিমালাটির অবম মান $-\frac{49}{8}$.

উদা. 4. x-এর বাস্তব মানের জন্য, $\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$-এর চরম ও অবম মান নির্ণয় কর।

মনে কর, $\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}=y$.

তাহা হইলে, $y(x^2+x+1)=x^2-x+1$,

বা, $(y-1)x^2+(y+1)x+y-1=0$.

এখন, x বাস্তব বলিয়া, x-এর এই দ্বিঘাত-সমীকরণটির বীজদ্বয় বাস্তব ;

$\therefore$ নিরূপক, $(y+1)^2-4(y-1)^2 \geqslant 0$,

বা, $\{(y+1)+2(y-1)\}\{(y+1)-2(y-1)\} \geqslant 0$,

বা, $(3y-1)(3-y) \geqslant 0$,

বা, $-3(y-\frac{1}{3})(y-3) \geqslant 0$,

বা, $(y-\frac{1}{3})(y-3) \leqslant 0$.

$(y-\frac{1}{3})(y-3)=0$ হইলে, $y=3$, বা, $\frac{1}{3}$. ... ... (1)

$(y-\frac{1}{3})(y-3)<0$ হইলে, $y-\frac{1}{3}>0$ এবং $y-3<0$ হইবে ; (2)

বা, $y-\frac{1}{3}<0$ এবং $y-3>0$ হইবে। ... (3)

(2) হইতে, $y>\frac{1}{3}$ এবং <3, অর্থাৎ $\frac{1}{3}<y<3$. ... (4)

(3) হইতে, $y<\frac{1}{3}$ এবং >3 ইহা অসম্ভব।

$\therefore$ (1) এবং (4) হইতে, $\frac{1}{3} \leqslant y \leqslant 3$.

$\therefore$ y অর্থাৎ প্রদত্ত রাশিটির অবম মান $\frac{1}{3}$ এবং চরম মান 3.

উদা. 5. যদি x বাস্তব হয়, প্রমাণ কর যে, $\frac{2x^2-2x+4}{x^2-4x+3}$-এর মান 1 ও -7-এর অন্তর্বর্তী হইতে পারে না। [Calcutta, 1944]

মনে কর, $y=\frac{2x^2-2x+4}{x^2-4x+3}$;

$\therefore \quad y(x^2-4x+3)=2x^2-2x+4,$

বা, $(y-2)x^2-2(2y-1)x+(3y-4)=0.$

এখন, x বাস্তব বলিয়া, x-এর এই দ্বিঘাত-সমীকরণটির বীজদ্বয় বাস্তব ;

$\therefore$ নিরূপক, $4(2y-1)^2-4(y-2)(3y-4) \nless 0,$

বা, $(2y-1)^2-(y-2)(3y-4) \nless 0,$

বা, $y^2+6y-7 \nless 0,$

বা, $(y-1)(y+7) \nless 0.$

এখন, $y+7$-কে $y-(-7)$ রূপে লিখিলে দেখা যায় যে, y-এর মান > -7 কিন্তু < 1 হইলে, $y+7$ ধনাত্মক, কিন্তু $y-1$ ঋণাত্মক হয় ; সুতরাং,

$(y-1)(y-7) < 0$ হয় ;

$\therefore$ $y > -7$, কিন্তু < 1 হইতে পারে না ; অর্থাৎ, x-এর বাস্তব মানের জন্য, y অর্থাৎ প্রদত্ত রাশিটির মান -7 এবং 1-এর অন্তর্বর্তী হইতে পারে না।

উদা. 6. প্রমাণ কর যে, x-এর সকল বাস্তব মানের জন্য, $\frac{m^2}{1+x}-\frac{n^2}{1-x}$ রাশিমালার মান বাস্তব হইবে।

মনে কর, $y=\frac{m^2}{1+x}-\frac{n^2}{1-x},$

বা, $y=\frac{(m^2-n^2)-(m^2+n^2)x}{1-x^2}$;

$\therefore \quad yx^2-(m^2+n^2)x+m^2-n^2-y=0.$

[পক্ষান্তর-প্রক্রিয়া দ্বারা]

x-এর সমাধান করিয়া,

$$x=\frac{(m^2+n^2)\pm\sqrt{(m^2+n^2)^2-4y(m^2-n^2-y)}}{2y}.$$

এখন, x বাস্তব বলিয়া, করণী-চিহ্নের অন্তর্গত রাশিমালা অবশ্যই ধনাত্মক হইবে।

করণী-চিহ্নের অন্তর্গত রাশিমালা

$$= 4y^2 - 4y(m^2 - n^2) + (m^2 + n^2)^2$$
$$= 4y^2 - 4y(m^2 - n^2) + (m^2 - n^2)^2 + 4m^2n^2$$
$$= \{2y - (m^2 - n^2)\}^2 + (2mn)^2$$

= একটি ধনাত্মক রাশি + একটি ধনাত্মক রাশি,

(y-এর যে-কোন বাস্তব মানের জন্য)।

সুতরাং, x-এর সকল বাস্তব মানের জন্যই প্রদত্ত রাশিমালার মান বাস্তব হইবে।

দ্রষ্টব্য ঃ প্রদত্ত রাশিমালাটি যে-কোন বাস্তব মানবিশিষ্ট হইতে পারে বলিয়া উহার কোন চরম বা অবম মান থাকিবে না।

উদা. 7. প্রমাণ কর যে, x-এর বাস্তব মানের জন্য, $\dfrac{(x-a)(x-c)}{x-b}$ রাশিটি যে-কোন বাস্তব মানবিশিষ্ট হইতে পারে, যদি $a < b < c$ হয়।

মনে কর, $\dfrac{(x-a)(x-c)}{x-b} = y$;

$$\therefore \quad x^2 - (a+c+y)x + (ac+by) = 0.$$

[সরলীকরণ ও পক্ষান্তর প্রক্রিয়া দ্বারা]

$$\therefore \quad x = \frac{(a+c+y) \pm \sqrt{(a+c+y)^2 - 4(ac+by)}}{2}.$$

x-এর মান বাস্তব বলিয়া, x-এর দ্বিঘাত-সমীকরণটির বীজদ্বয়ও বাস্তব ;

$\therefore$ নিরূপক $(a+c+y)^2 - 4(ac+by) \nless 0,$

বা, $y^2 + (a+c)^2 + 2y(a+c) - 4ac - 4by \nless 0,$

বা, $y^2 + 2(a+c-2b)y + (a-c)^2 \nless 0,$

বা, $\{y + (a+c-2b)\}^2 + \{(a-c)^2 - (a+c-2b)^2\} \nless 0,$

বা, $\{y + (a+c-2b)\}^2 + \{(a-c) + (a+c-2b)\} \times \{(a-c) - (a+c-2b)\} \nless 0,$

বা, $\{y + (a+c-2b)\}^2 + 4(a-b)(b-c) \nless 0. \cdots (1)$

এখন, y-এর যে-কোন বাস্তব মানের জন্য $\{y+(a+c-2b)\}^2$, বাস্তব রাশির বর্গ বলিয়া ধনাত্মক হইবে, আর $a < b < c$ বলিয়া, $a-b$ একটি ঋণাত্মক রাশি এবং $b-c$-ও একটি ঋণাত্মক রাশি ; অতএব, $4(a-b)(b-c)$ একটি ধনাত্মক রাশি। অতএব, দেখা গেল, $a < b < c$ হইলে, y-এর সকল বাস্তব মানের জন্যই (1) সিদ্ধ হইতেছে।

$\therefore\ a < b < c$ হইলে, x-এর বাস্তব মানের জন্য প্রদত্ত রাশিটি যে-কোন বাস্তব রাশিবিশিষ্ট হইতে পারে।

দ্রষ্টব্য : $a > b > c$ হইলেও একই ফল পাওয়া যায়।

প্রশ্নমালা 27

1. যদি x বাস্তব হয়, নিম্নলিখিত রাশিমালাসমূহের চিহ্ন নিরূপণ কর :

(a) $3x^2+5x+7$; (b) $3x-4x^2-7$; (c) $4x^2-28x+49$;

(d) $(a^2+b^2)x^2-2abx+\dfrac{a^2+b^2}{4}$;

(e) $(a^2+b^2)x^2+2(a+b)x+2$.

2. প্রমাণ কর যে, $\frac{2}{3}$ হইতে $\frac{3}{2}$ ব্যতীত x-এর সব বাস্তব মানের জন্য $6x^2-13x+6$ রাশিমালা ধনাত্মক।

3. x-এর মান কত হইলে, $7x^2-9x+3$ রাশিমালার মান ঋণাত্মক হইবে, তাহা নির্ণয় কর।

4. (a) প্রমাণ কর যে, x-এর যে-কোন বাস্তব মানের জন্য $5x^2-30x+47$ রাশিমালা সর্বদা ধনাত্মক।

(b) যদি x বাস্তব এবং $x^2-2ax+a^2-b^2$ রাশিমালা ধনাত্মক হয়, দেখাও যে, x-এর মান কখনও $a-b$ ও $a+b$-এর অন্তর্বর্তী হইতে পারে না।

5. প্রমাণ কর যে, x-এর মান কোন নির্দিষ্ট সীমার মধ্যে থাকিলেই $8x-15-x^2$ রাশিমালা ধনাত্মক হইতে পারে। ঐ নির্দিষ্ট সীমা নিরূপণ কর।

6. প্রমাণ কর যে, x-এর বাস্তব মানের জন্য $(x-1)(x-3)(x-5)(x-7)+20$ রাশিমালা ধনাত্মক।

7. x-এর বাস্তব মানের জন্য $x^2-ax+1-2a^2$ রাশিমালা সর্বদা ধনাত্মক হইলে, a-এর মান নির্ণয় কর।

8. যদি x বাস্তব হয়, প্রমাণ কর যে,

(a) $4x^2-12x+17$ রাশিমালার মান 8-এর কম হইতে পারে না ;

(b) $x^2-9x+21$ " " $\frac{3}{4}$ " " " " " ;

(c) $5x^2-7x+4$ " " $1\frac{11}{20}$ " " " " "।

9. x-এর বাস্তব মানের জন্য, নিম্নলিখিত রাশিমালাসমূহের অবম (লঘিষ্ঠ) মান নির্ণয় কর।

(a) $4x^2-9x+5$; (b) $3x^2-5x+4$; (c) $2x^2-13x+22$. প্রত্যেক ক্ষেত্রে অবম মানে x-এর মান নির্ণয় কর।

10. যদি x বাস্তব হয়, প্রমাণ কর যে, $4x^2-4x+1$ রাশিমালার অবম মান 0 (শূন্য) এবং x-এর অনুরূপ মান $\frac{1}{2}$. [Calcutta, 1937]

11. x-এর বাস্তব মানের জন্য নিম্নলিখিত রাশিমালাসমূহের চরম (গরিষ্ঠ) মান নির্ণয় কর :

(a) $6x-x^2-1$; (b) $5+8x-8x^2$; (c) $5+4x-4x^2$.

প্রত্যেক ক্ষেত্রে এই চরম মানে x-এর মান কত, তাহা নির্ণয় কর।

12. x-এর বাস্তব মানের জন্য $(1-x)(2+3x)$-এর চরম মান নির্ণয় কর।

[Calcutta, 1946]

13. প্রমাণ কর যে, x বাস্তব হইলে, $\frac{x^2-3x+4}{x^2+3x+4}$-এর মান 7 এবং $\frac{1}{7}$-এর অন্তর্বর্তী। [Calcutta, 1940]

14. যদি x বাস্তব হয়, প্রমাণ কর যে, $\frac{x^2+2x-11}{2(x-3)}$-এর মান 2 হইতে 6-এর অন্তর্বর্তী মান ব্যতীত যে-কোন সাংখ্যমান হইতে পারে।

15. x-এর বাস্তব মানের জন্য $\frac{x^2-4x+9}{x^2+4x+9}$ রাশিমালার মান যে দুইটি নির্দিষ্ট সীমার মধ্যে থাকে, তাহা নিরূপণ কর। [Calcutta, 1948]

16. যদি x বাস্তব হয়, দেখাও যে, $\frac{x}{x^2-5x+9}$ মান নিশ্চয়ই 1 এবং $-\frac{1}{11}$-এর অন্তর্বর্তী হইবে। [Calcutta, 1953]

17. x-এর বাস্তব মানের জন্য $\frac{x^2+14x+9}{x^2+2x+3}$-এর চরম এবং অবম মান নির্ণয় কর।

18. যদি x বাস্তব হয়, প্রমাণ কর যে, $\frac{(x-1)(x+3)}{(x-2)(x+4)}$-এর মান $\frac{4}{9}$ ও 1-এর অন্তর্বর্তী হইবে না।

19. যদি x বাস্তব হয়, প্রমাণ কর যে, (a) $\frac{x^2-2x+21}{6x-14}$-এর মান 2 এবং $\frac{10}{9}$-এর অন্তর্বর্তী হইতে পারে না ; এবং (b) $\frac{x^2+8x+80}{2x+8}$-এর মান -8 এবং 8-এর অন্তর্বর্তী হইতে পারে না।

20. যদি x বাস্তব হয়, প্রমাণ কর যে, $\frac{x^2+34x-71}{x^2+2x-7}$-এর মান, 5 এবং 9-এর অন্তর্বর্তী ব্যতীত যে-কোন সাংখ্যমান হইতে পারে। [Calcutta, 1954]

21. প্রমাণ কর যে, x-এর যে-কোন বাস্তব মানের জন্য

$\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{3x+1}-\dfrac{1}{(x+1)(3x+1)}$ রাশিমালার মান 1 এবং 4-এর অন্তর্বর্তী হইতে পারে না।

22. x-এর সমস্ত বাস্তব মানের জন্য $\dfrac{6x^2-22x+21}{5x^2-18x+17}$-এর চরম ও অবম মান নির্ণয় কর। [Calcutta, 1942]

23. যদি x বাস্তব হয়, প্রমাণ কর যে, $\dfrac{3x^2+38x-85}{x^2+2x-7}$-এর কোন মান 7 এবং 11-এর অন্তর্বর্তী হইতে পারে না। [Gauhati, 1949]

24. দেখাও যে, x-এর বাস্তব মানের জন্য, $\dfrac{2x^2+4x+1}{x^2+4x+2}$-এর সব বাস্তব মান হইতে পারে।

25. যদি x বাস্তব হয়, দেখাও যে, $\dfrac{16}{1+x}-\dfrac{9}{1-x}$ রাশিমালার যে-কোন বাস্তব মান হইতে পারে।

26. $x^2-px+q^2=0$ সমীকরণে, যদি x বাস্তব হয়, প্রমাণ কর যে, p-এর মান $+2q$ এবং $-2q$-এর অন্তর্বর্তী হইতে পারে না।

27. দেখাও যে, যদি p, 1 (unity) হইতে বৃহত্তর হয়, তাহা হইলে, x-এর সব বাস্তব মানের জন্য $\dfrac{x^2-2x+p^2}{x^2+2x+p^2}$-এর মান $\dfrac{p-1}{p+1}$ এবং $\dfrac{p+1}{p-1}$-এর অন্তর্বর্তী থাকিবে।

28. প্রমাণ কর যে, $x^2+4y^2-8x+12=0$ সমীকরণটি x ও y-এর বাস্তব মান দ্বারা সিদ্ধ হইলে, x, 2 ও 6-এর এবং y, -1 ও 1-এর অন্তর্বর্তী হইবে।

29. দেখাও যে, x-এর সমস্ত বাস্তব মানের জন্য

$\dfrac{(x^2-4)(x^2+3x+2)(x^2-x-2)+10}{x^2+5x+7}$ ধনাত্মক।

অষ্টম অধ্যায়

বিন্যাস ও সমবায়

(Permutations and Combinations)

8·1. বিন্যাস ও সমবায়ঃ *a*, *b* ও *c*—এই তিনটি বস্তুর একটি প্রস্থ হইতে তিনটিকেই একসঙ্গে সংঘবদ্ধ বা সমবেত করিলে ঐ তিনটি বস্তু-সম্বলিত একটি মাত্র গুচ্ছ বা সমবায় পাওয়া যায়। এই গুচ্ছ বা সমবায়ে বস্তু-তিনটির কোনটির আগে বা পরে কোন্‌টি রহিল তাহা বিবেচ্য নহে। সেইজন্য *abc*, *acb*, *bca* প্রভৃতির প্রত্যেকটি একই **সমবায়** (combination) বুঝায়।

কিন্তু বস্তু-তিনটির কোন্‌টি কোন্‌টির পর রহিয়াছে তাহা যদি বিবেচনা করা হয় তবে তাহাদের বিন্যাস বা ক্রম-সজ্জার কথা আসে। সেক্ষেত্রে *abc* সমবায়টিকে এই ছয়টি বিভিন্নক্রমে (order) সাজানো যায়ঃ *abc*, *acb*, *bca*, *bac*, *cab* ও *cba*; ইহাদের প্রত্যেকটি অপর প্রত্যেকটি হইতে ভিন্নরূপ **বিন্যাস** (permutation).

অনুরূপে, *a*, *b* ও *c*—এই তিনটি বস্তুর প্রস্থটি হইতে দুইটি-দুইটি করিয়া বস্তু লইলে বা সমবেত করিলে, *a* ও *b*-কে লইয়া একটি, *b* ও *c*-কে লইয়া এবং *c* ও *a*-কে লইয়া আরেকটি—মোট এই **তিনটি সমবায়** পাওয়া যায়। সমবায়ের ক্ষেত্রে সমবেত বস্তুর কোন্‌টি কোন্‌টির আগে বা পরে রহিয়াছে তাহা বিচার্য নয় বলিয়া *a* ও *b*-সম্বলিত সমবায়টিকে *ab* বা *ba*—দুই ভাবেই লেখা যায়। একই কারণে *b* ও *c*-সম্বলিত সমবায়টিকে লেখা যায় *bc* বা *cb*-রূপে এবং *c* ও *a*-সম্বলিত সমবায়টিকেও লেখা যায় *ca* বা *ac* আকারে।

কিন্তু ঐরূপ প্রত্যেক গুচ্ছে বস্তুগুলির ক্রম যদি বিচার করা হয় তবে *ab* ও *ba*-কে ভিন্নক্রমে বিন্যস্ত দুইটি পৃথক বিন্যাসরূপে গণ্য করিতে হইবে। এইভাবে *a*, *b* ও *c*-এর প্রস্থটি হইতে দুইটি-দুইটি করিয়া লইলে,

a ও *b*-সম্বলিত *ab* ও *ba*, *b* ও *c*-সম্বলিত *bc* ও *cb* এবং *c* ও *a*-সম্বলিত *ca* ও *ac*—মোট **এই ছয়টি বিন্যাস** গঠন করা যায়।

অতএব, সাধারণভাবে সমবায় ও বিন্যাসের এইরূপ সংজ্ঞা নির্দেশ করা যায়ঃ

(i) একপ্রস্থ বস্তুর নির্দিষ্ট সংখ্যক কয়েকটি বা সব কয়টিকে লইয়া ঐ বস্তুগুলিকে যতগুলি গুচ্ছে সংঘবদ্ধ বা সমবেত করা যায় ততগুলির প্রত্যেকটিকে একটি **সমবায়** বলে।

এবং (ii) একপ্রস্থ বস্তু হইতে প্রতিবার নির্দিষ্ট-সংখ্যক কয়েকটি বা সব কয়টিকে

লইয়া **বিভিন্ন ক্রমে** সজ্জিত বা বিন্যস্ত যতগুলি গুচ্ছ গঠন করা যায় তাহাদের প্রত্যেকটিকে বলে একটি **বিন্যাস।**

(ক) বিন্যাস

8·2. r-সংখ্যকটি করিয়া লইয়া n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তুর বিন্যাস-সংখ্যা নির্ণয়।

n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হইতে প্রতিবার r-সংখ্যকটি লইয়া যতসংখ্যক বিন্যাস রচনা করা যায়, ঠিক ততসংখ্যক উপায়ে r-সংখ্যক অবস্থানে n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তুকে বিভিন্ন ক্রমে সাজাইয়া রাখা যায়।

এখন, ঐ n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তুর যে-কোন একটিকে প্রথম অবস্থানে রাখা যায় বলিয়া, প্রথম অবস্থানটিকে n-সংখ্যক উপায়ে পূর্ণ করা যায়।

দ্বিতীয়ত, এই n-সংখ্যক উপায়ের যে-কোন একটি উপায়ে, একটি বস্তু দিয়া, ঐ প্রথম অবস্থানটি পূর্ণ করিলে, $(n-1)$-সংখ্যক বস্তু অবশিষ্ট থাকিবে এবং ইহাদের যে-কোন একটি দিয়া দ্বিতীয় অবস্থানটি পূর্ণ করা যাইবে। সুতরাং প্রত্যেকবার একটি বস্তু দিয়া প্রথম অবস্থানটি পূর্ণ করার পর দ্বিতীয় অবস্থানটি $(n-1)$-সংখ্যক উপায়ে পূর্ণ করা যাইবে। অতএব প্রথম অবস্থান পূর্ণ করার n-সংখ্যক উপায়ের প্রত্যেকটির সহিত দ্বিতীয় অবস্থান পূর্ণ করার $(n-1)$-সংখ্যক উপায় যুক্ত করিলে, প্রথম ও দ্বিতীয় অবস্থান পূর্ণ করার মোট উপায়-সংখ্যা $n(n-1)$ হইবে।

তৃতীয়ত, উল্লিখিত $n(n-1)$ উপায়ের যে-কোন একটি উপায়ে প্রথম দুইটি অবস্থান পূর্ণ করার পর $(n-2)$-সংখ্যক বস্তু অবশিষ্ট থাকিবে এবং সেই কারণে তখন তৃতীয় অবস্থানটি $(n-2)$ উপায়ে পূর্ণ করা যাইবে। সুতরাং প্রথম দুইটি অবস্থান পূর্ণ করার $n(n-1)$ উপায়ের প্রত্যেকটির সহিত তৃতীয় অবস্থানটি পূর্ণ করার $(n-2)$ উপায় যুক্ত করিলে প্রথম তিনটি অবস্থান পূর্ণ করার জন্য $n(n-1)(n-2)$-সংখ্যক উপায় থাকিবে।

এইভাবে অগ্রসর হইলে দেখা যায় যে প্রত্যেক পর্যায়ে অবস্থান-সংখ্যা যত ঠিক তত সংখ্যক উৎপাদকের গুণফল দ্বারাই ঐ অবস্থানসমূহ পূর্ণ করার উপায়-সংখ্যা সূচিত হয়। সুতরাং r-সংখ্যক অবস্থান পূর্ণ করার উপায়-সংখ্যা

$$= n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots\cdots r\text{-সংখ্যক উৎপাদক পর্যন্ত}$$
$$= n(n-1)(n-2)\cdots\cdots\{n-(r-1)\}$$
$$= n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1).$$

r-সংখ্যকটি করিয়া লইয়া, n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তুর বিন্যাস-সংখ্যাকে ${}^nP_r$ প্রতীকটি

দ্বারা এবং 1 হইতে n পর্যন্ত স্বাভাবিক সংখ্যার ক্রমিক গুণফলকে $\lfloor n$* বা $n!$ প্রতীক দ্বারা সূচিত করা হয়। তাহা হইলে 1 হইতে $(n-r)$ পর্যন্ত স্বাভাবিক সংখ্যার ক্রমিক গুণফল নিশ্চয় $\lfloor n-r$ হইবে।

$$\therefore \quad {}^{n}P_{r} = n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-r+1)$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)(n-r)(n-r-1)\cdots 3.2.1}{(n-r)(n-r-1)(n-r-2)\cdots 3.2.1.}$$

$$= \frac{1 \text{ হইতে } n \text{ পর্যন্ত স্বাভাবিক সংখ্যার ক্রমিক গুণফল}}{1 \text{ হইতে } (n-r) \text{ পর্যন্ত স্বাভাবিক সংখ্যার ক্রমিক গুণফল}}$$

$$= \frac{\lfloor n}{\lfloor n-r}.$$

বিকল্প প্রমাণ : r-সংখ্যকটি করিয়া লইয়া n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তুর বিন্যাস-সংখ্যা নির্ণয়।

n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তুগুলি যেন $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ এবং নির্ণেয় বিন্যাস-সংখ্যা যেন ${}^{n}P_{r}$.

এখন, n-সংখ্যক বস্তুর একটিকে প্রথম অবস্থানে রাখিলে, অবশিষ্ট থাকে $(n-1)$ বস্তু এবং শূন্য থাকে $(r-1)$ অবস্থান। সুতরাং n-এর স্থলে $(n-1)$ এবং r-এর স্থলে $(r-1)$ বসাইয়া $(n-1)$-সংখ্যক বস্তুদ্বারা $(r-1)$-সংখ্যক অবস্থান পূর্ণ করার সংখ্যা হইবে ${}^{n-r}P_{r-1}$; সেই কারণে প্রথম স্থানে একটি নির্দিষ্ট বস্তু-বিশিষ্ট বিন্যাস-সংখ্যাও হইবে ${}^{n-1}P_{r-1}$.

অতএব, ${}^{n}P_{r}$ = প্রথম স্থানে a_1-বিশিষ্ট বিন্যাস-সংখ্যা
+ " a_2-বিশিষ্ট "
+ " a_3-বিশিষ্ট "
... ...
+ " a_n-বিশিষ্ট " ।

কিন্তু প্রথম স্থানে a_1-বিশিষ্ট বিন্যাস-সংখ্যা $= {}^{n-1}P_{r-1}$,
অনুরূপে " a_2-বিশিষ্ট " $= {}^{n-1}P_{r-1}$;
... ...
" a_n-বিশিষ্ট " $= {}^{n-1}P_{r-1}$.

$\therefore$ a_1 হইতে a_n পর্যন্ত বস্তুর সংখ্যা n বলিয়া

$${}^{n}P_{r} = n \times {}^{n-1}P_{r-1}.$$

*$\lfloor n$ বা n !-কে পড়া হয় 'ফ্যাকটোরিয়েল n (factorial n)'-রূপে।

এই সূত্রে n-এর স্থলে যথাক্রমে $n, (n-1), (n-2)\cdots 3, 2, 1$ এবং r-এর স্থলে যথাক্রমে $r, (r-1), (r-2)\cdots 3, 2, 1$ বসাইলে দেখা যায় যে,

$$\begin{aligned}
{^nP_r} &= n \times {^{n-1}P_{r-1}} ;\\
{^{n-1}P_{r-1}} &= (n-1) \times {^{n-2}P_{r-2}} ;\\
\cdots \quad &\cdots \quad \times \quad \cdots\\
{^{n-r+2}P_2} &= (n-r+2) \times {^{n-r+1}P_1} ;\\
{^{n-r+1}P_1} &= (n-r+1).
\end{aligned}$$

এইবার, প্রতিটি পক্ষকে স্তম্ভক্রমে গুণ করিয়া উভয়পক্ষ হইতে সাধারণ গুণনীয়কগুলিকে অপসারণ করিলে দেখা যায় যে,

$$\begin{aligned}
{^n\mathbf{P}_r} &= n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+2)(n-r+1)\\
&= \frac{n(n-1)(n-1)\cdots(n-r+1) \times (n-r)(n-r-1)\cdots 3.2.1.}{(n-r)(n-r-1)\cdots 3.2.1.}\\
&= \frac{\underline{|n}}{\underline{|n-r}}.
\end{aligned}$$

দ্রষ্টব্য : ইহা সুস্পষ্ট যে n ও r উভয়েই ধনাত্মক এবং $r \leqslant n$.

অনুসি. 1. n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তুর সব কয়টিকে লইয়া গঠিত বিন্যাস-সংখ্যা,

$$\begin{aligned}
{^nP_n} &= n(n-1)(n-2)\cdots n\text{-সংখ্যক উৎপাদক পর্যন্ত}\\
&= n(n-1)(n-2)\cdots 3.2.1\\
&= \underline{|n}.
\end{aligned}$$

দ্রষ্টব্য : (1) $\underline{|n} = n(n-1)(n-2)\cdots 3.2.1$
$$= n \times \{(n-1)(n-2)\cdots 3.2.1\}$$
$$= n\underline{|n-1}.$$

অনুরূপে, $\underline{|n} = n\underline{|n-1} = n(n-1)\underline{|n-2}$; ইত্যাদি।

(2) যেহেতু, ${^nP_n} = n(n-1)(n-2)\cdots 3.2.1$

এবং ${^nP_{n-1}} = n(n-1)(n-2)\cdots 3.2.1$

সেইহেতু, ${^n\mathbf{P}_n} = {^n\mathbf{P}_{n-1}}$.

(3) **$\underline{|0}$-এর অর্থ :** ${^nP_r} = \dfrac{\underline{|n}}{\underline{|n-r}}$ সূত্রে $r = n$ বসাইলে

$${^nP_n} = \frac{\underline{|n}}{\underline{|n-n}} = \frac{\underline{|n}}{\underline{|0}}.$$

কিন্তু $^nP_n = n(n-1)(n-2)\cdots 3.2.1$

$$= \underline{|n}.$$

$\because \quad \underline{|n} = \dfrac{\underline{|n}}{\underline{|0}};$

$\therefore \quad \underline{|0} = \dfrac{\underline{|n}}{\underline{|n}} = 1.$

কিন্তু $\underline{|n}$-এর সংজ্ঞা অনুসারে, (n-এর স্থলে 0 বসাইলে) $\underline{|0}$ অর্থহীন হইয়া পড়ে। অতএব, **$\underline{|0}$-কে 1-মানবিশিষ্ট একটি প্রতীকরূপে গণ্য করা হইয়া থাকে।**

অনুসি. 2. r-সংখ্যকটি করিয়া লইয়া গঠিত n-সংখ্যক বস্তুর বিন্যাস-সমূহের যে-গুলির মধ্যে একটি বিশেষ বস্তু সর্বদা বর্তমান, তাহাদের সংখ্যা $r.{}^{n-1}P_{r-1}$.

n-সংখ্যক বস্তুর একটি যেন a এবং এই a বস্তুটি যেন r-সংখ্যকটি করিয়া লইয়া গঠিত n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তুর বিন্যাস-সমূহের মধ্যে n-সংখ্যক বিন্যাসে বর্তমান থাকে।

এখন, a-কে প্রথম অবস্থানে রাখিয়া বাকী $(r-1)$ অবস্থানে অবশিষ্ট $(n-1)$-সংখ্যক বস্তুকে $^{n-1}P_{r-1}$ উপায়ে স্থাপন করা যায়। অনুরূপে, a-কে দ্বিতীয়, তৃতীয়, চতুর্থ, $\cdots$, r-তম অবস্থানে রাখিয়া প্রত্যেকবার অবশিষ্ট অবস্থানগুলিকে $^{n-1}P_{r-1}$ উপায়ে পূর্ণ করা যায়। সুতরাং প্রথম হইতে r-তম পর্যন্ত r-সংখ্যক অবস্থান থাকায়

$$a\text{-বিশিষ্ট বিন্যাস-সংখ্যা}, \ x = r.{}^{n-1}P_{r-1}.$$

অনুসি. 3. r-সংখ্যকটি করিয়া লইয়া গঠিত n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তুর বিন্যাস-সমূহের যেগুলিতে একটি বিশেষ বস্তু আদৌ থাকে না। তাহাদের সংখ্যা $^{n-1}P_r$.

r-সংখ্যকটি করিয়া লইয়া গঠিত n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তুর যে-বিন্যাসগুলিতে একটি বিশেষ বস্তু নাই তাহারা ঐ বস্তুটি বাদে অবশিষ্ট $(n-1)$-সংখ্যক বস্তু হইতে প্রতিবার r-সংখ্যকটি লইয়া গঠিত। সুতরাং তাহাদের সংখ্যা $= {}^{n-1}P_r$.

দ্রষ্টব্য : অনুসি. 2 ও অনুসি. 3 হইতে স্পষ্ট হয় যে

$$^nP_r = {}^{n-1}P_r + r.{}^{n-1}P_{r-1};$$

কেননা, $^{n-1}P_r + r\,{}^{n-1}P_{r-1}$

$$= \frac{\underline{|n-1}}{\underline{|n-r-1}} + r \times \frac{\underline{|n-1}}{\underline{|n-r}}$$

$$= \underline{|n-1}\left\{\frac{1 \times (n-r)}{(n-r)\underline{|n-r-1}} + \frac{r}{\underline{|n-r}}\right.$$

$$=\underline{|n-1}\left\{\frac{n-r+r}{\underline{|n-r}}\right\}=\frac{n\underline{|n-1}}{\underline{|n-r}}$$

$$=\frac{\underline{|n}}{\underline{|n-r}}={}^nP_r.$$

উদা. 1. ${}^6P_4$-এর মান নির্ণয় কর।

${}^6P_4$ = 4টি করিয়া লইয়া 6টি বস্তুর বিন্যাস-সংখ্যা

$$=\frac{\underline{|6}}{\underline{|6-4}}=\frac{\underline{|6}}{\underline{|2}}=\frac{6.5.4.3.\underline{|2}}{\underline{|2}}$$

$$=6.5.4.3=\mathbf{360}.$$

উদা. 2. 1, 2, 3, 4, 5—এই পাঁচটি অঙ্কের 3টি করিয়া লইয়া কতগুলি সংখ্যা গঠন করা যায়, নির্ণয় কর।

প্রদত্ত 5টি অঙ্ক হইতে 3টি করিয়া লইয়া বিভিন্নক্রমে সাজাইলে প্রত্যেকবারেই একটি নূতন সংখ্যা পাওয়া যায় বলিয়া, নির্ণেয় সংখ্যাগুলির সংখ্যা

= 3টি করিয়া লইয়া 5টি বস্তুর বিন্যাস-সংখ্যা

$$={}^5P_3=5.4.3=\mathbf{60}.$$

উদা. 3. যদি ${}^nP_4 : {}^nP_6 = 1 : 2$, তবে n-এর মান কত ?

$$\frac{{}^nP_4}{{}^nP_6}=\frac{1}{2}, \quad \text{বা}, \quad 2.{}^nP_4={}^nP_6\,;$$

$$\therefore \quad 2n(n-1)(n-2)(n-3)=n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5).$$

n-ঘটিত এই সমীকরণটির $n=0, 1, 2, 3$ কোন সমাধান হইতে পারে না, কারণ 1, 2 অথবা 3টি বস্তু হইতে 4টি অথবা 6টি করিয়া লইয়া বিন্যাস-গঠন অর্থহীন ; অতএব, উভয় পক্ষ হইতে $n(n-1)(n-2)(n-3)$ সাধারণ গুণনীয়কগুলি অপসারণ করিয়া, $(n-4)(n-5)=2$,

$$\text{বা}, \quad n^2-9n+18=0, \quad \text{বা}, \quad (n-3)(n-6)=0\,;$$

$$\therefore \quad n=3, \text{ বা}, 6.$$

কিন্তু n-এর 3 মানটি গ্রহণীয় নয় বলিয়া (কারণ উপরে বিবৃত হইয়াছে), $n=\mathbf{6}$.

উদা. 4. প্রমাণ কর যে, $\underline{|2n}=2^n.1.3.5\ldots\ldots(2n-1)\,\underline{|n}$.

$$\underline{|2n}=1.2.3.4.5\ldots\ldots(2n-1).2n$$

$$=\{1.3.5\ldots\ldots(2n-1)\}\times(2.4.6\ldots\ldots2n)$$

$$=1.3.5\ldots\ldots(2n-1)\times\{(2.1)(2.2)(2.3)\ldots\ldots(2.n)\}$$

$$=1.3.5\ldots\ldots(2n-1).2^n.(1.2.3\ldots\ldots n)$$

$$=2^n.1.3.5\ldots\ldots(2n-1)\,\underline{|n}.$$

উদা. 5. *Courtesy* শব্দটির অক্ষরগুলি দিয়া যতগুলি শব্দ গঠন করা যায়, তন্মধ্যে যাহাদের আদিতে c এবং অন্তে y থাকে, তাহাদের সংখ্যা নির্ণয় কর।

৪টি বিভিন্ন অক্ষর c, o, u, r, t, e, s, y আছে। শব্দসমূহের আদিতে এবং অন্তে সর্বদাই যথাক্রমে c এবং y থাকিবে বলিয়া, অন্তর্বর্তী 6টি অক্ষরকে উহাদের সবগুলিকে লইয়া যত বিভিন্ন উপায়ে সাজানো যায় ততগুলিই শব্দ হইবে।

$\therefore$ নির্ণেয় শব্দ-সংখ্যা $= {}^6P_5 = 6.5.4.3.2.1 = \mathbf{720}.$

উদা. 6. B এবং C-কে পাশাপাশি রাখিয়া A, B, C, D, E, F, G, এই 7টি অক্ষরকে যত প্রকারে বিন্যাস করা যায়, সেই বিন্যাস-সংখ্যা নির্ণয় কর।

B এবং C সর্বদাই একসঙ্গে থাকিবে বলিয়া, উহাদিগকে B-এর পরে C-কে একটি বন্ধনী-ভুক্ত করিয়া রাখ এবং এই বন্ধনী-ভুক্ত (BC)-কে একটি বস্তু মনে করিয়া

$$A, (BC), D, E, F, G$$

এই 6টি বিভিন্ন বস্তুকে সবগুলি একসঙ্গে লইয়া নিজেদের মধ্যে কত বিভিন্ন উপায়ে সাজানো যাইতে পারে তাহা নির্ণয় করিতে হইবে।

স্পষ্টই এইরূপ বিন্যাস-সংখ্যা $= {}^6P_6 = \lfloor 6 = 6.5.4.3.2.1 = 720.$

এই 720টি বিন্যাসের প্রত্যেকটিতে B এবং C একসঙ্গে আছে, কিন্তু B-এর পরে C আছে। C-এর পরে B থাকিয়াও উহারা একসঙ্গে থাকিতে পারে। অনুরূপ উপায়ে প্রমাণ করা যায় যে, এইরূপ বিন্যাস-সংখ্যাও 720.

$\therefore$ প্রদত্ত 7টি অক্ষর দ্বারা বিভিন্ন বিন্যাস গঠন করিলে, তাহাদের মধ্যে যতগুলিতে B এবং C পাশাপাশি থাকিবে তাহাদের সংখ্যা $= 2 \times 720 = \mathbf{1440}.$

উদা. 7. স্বরবর্ণগুলিকে সর্বদা একসঙ্গে রাখিয়া *valedictory* শব্দটির অক্ষরগুলি কত প্রকারে সাজানো যায়, সেই বিন্যাস-সংখ্যা নির্ণয় কর।

স্বরবর্ণগুলি সর্বদা একসঙ্গে থাকিবে বলিয়া, উহাদিগকে যে-কোন ক্রমে, ধরা যাক a, তারপরে e, তারপরে i এবং তারপরে o এই ক্রমে সাজাইয়া একটি বন্ধনী-ভুক্ত করিয়া রাখিলে, ৪টি বিভিন্ন বস্তু $v, l, d, c, t, r, y, (aeio)$ পাওয়া যায়। ইহাদের সবগুলি লইয়া সম্ভাব্য সকল প্রকারে নিজেদের মধ্যে সাজাইলে যে সকল বিন্যাস পাওয়া যায় তাহাদের সংখ্যা

$$= {}^8P_8 = \lfloor 8 = 8.7.6.5.4.3.2.1 = 40320.$$

এই বিন্যাসগুলিতে স্বরবর্ণগুলি একসঙ্গে a, e, i, o এই ক্রম আছে। কিন্তু উহারা যে-কোন ক্রমে থাকিয়াও একসঙ্গে থাকিতে পারে, এবং অনুরূপ যুক্তি-সাহায্যে প্রমাণ করা যায় যে, স্বরবর্ণসমূহের যে-কোন ক্রমের জন্যই মোট বিন্যাস-সংখ্যা হইবে 40320. এখন স্বরবর্ণগুলির সংখ্যা 4 বলিয়া উহাদিগকে $\lfloor 4$ বা 24টি বিভিন্ন উপায়ে

বা ক্রমে নিজেদের মধ্যে সাজানো যাইতে পারে। অতএব, প্রতি ক্রমের জন্য মোট বিন্যাস-সংখ্যা 40320 হয় বলিয়া,

নির্ণেয় বিন্যাস-সংখ্যা $= 40320 \times 24 = \mathbf{967680}$.

দ্রষ্টব্য ঃ যদি বলা হইত যে স্বরবর্ণগুলি কেবলমাত্র পাশাপাশি থাকিবে না, অধিকন্তু তাহারা পরস্পরের সম্পর্কে কোন নির্দিষ্ট অবস্থানে থাকিবে, তাহা হইলে নির্ণেয় বিন্যাস-সংখ্যা হইত 40320.

উদা. 8. স্বরবর্ণগুলিকে অযুগ্ম-স্থানে বসাইয়া *machine* শব্দটির অক্ষরগুলিকে যত প্রকারে সাজানো যায়, সেই বিন্যাস-সংখ্যা নির্ণয় কর।

এস্থলে, 7টি বর্ণের মধ্যে 4টি ব্যঞ্জনবর্ণ এবং 3টি স্বরবর্ণ ; 7টি স্থানের মধ্যে স্বরবর্ণ তিনটিকে প্রথম, তৃতীয়, পঞ্চম ও সপ্তম এই চারিটি অযুগ্ম-সংখ্যক স্থানের যে-কোন তিনটিতে বসাইতে হইবে। স্পষ্টই, স্বরবর্ণ তিনটিকে ${}^4p_3$ বা $4 \times 3 \times 2$, বা 24টি বিভিন্ন উপায়ে অযুগ্ম-সংখ্যক স্থানগুলিতে বসানো যাইতে পারে। এখন স্বরবর্ণ তিনটিকে যে-কোন এক উপায়ে সাজাইলে যে চারিটি স্থান অবশিষ্ট থাকে সেই চারিটি স্থানে ব্যঞ্জনবর্ণ চারিটিকে ${}^4P_4$ বা $\lfloor 4$ বা 24টি বিভিন্ন উপায়ে বসানো যাইতে পারে। অতএব, স্বরবর্ণ তিনটিকে 24টি উপায়ে অযুগ্ম-সংখ্যক স্থানগুলিতে বসানো যায় বলিয়া,

নির্ণেয় বিন্যাস-সংখ্যা $= 24 \times 24 = \mathbf{576}$.

উদা. 9. তোমাকে 8 রঙের (কালো, সাদা, লাল, হলদে, সবুজ, আসমানি, নীল এবং বেগুনী) 8টি বল দেওয়া হইল। কালো এবং সাদা বল দুইটি একসঙ্গে না থাকে এরূপ যত বিন্যাসে তাহাদের সাজানো যায়, সেই বিন্যাস-সংখ্যা নির্ণয় কর।

আটটি বলকে একসঙ্গে লইয়া বিন্যাস গঠন করিলে মোট বিন্যাস-সংখ্যা হইবে ${}^8P_8$ বা $\lfloor 8$. উদা. 6-এর অনুরূপ যুক্তি-সাহায্যে প্রমাণ করা যায় যে, এইসকল বিন্যাসের যেগুলিতে কালো এবং সাদা বল দুইটি একসঙ্গে থাকিবে তাহাদের সংখ্যা হইতেছে $2 \times {}^7P_7$ বা $2 \times \lfloor 7$.

অতএব, যে সকল বিন্যাসে উহারা একসঙ্গে থাকিবে না তাহাদের সংখ্যা

$$= \lfloor 8 - 2 \times \lfloor 7 = 8 \times \lfloor 7 - 2 \times \lfloor 7$$
$$= (8-2)\lfloor 7 = 6 \times 7.6.5.4.3.2.1 = \mathbf{30240}.$$

উদা. 10. 7টি নির্দিষ্ট বস্তুর 3টি করিয়া লইয়া যতগুলি বিন্যাস পাওয়া যায়, তন্মধ্যে যে বিন্যাসগুলিতে একটি বস্তু (i) কখনও থাকে না, (ii) সর্বদা থাকে, তাহাদের সংখ্যা নির্ণয় কর।

(i) নির্দিষ্ট বস্তুটিকে পৃথক্ করিয়া রাখিয়া এবং ইহার জন্য কোন স্থান না রাখিয়াই অবশিষ্ট $(7-1)$ বা ছয়টি বস্তু হইতে তিনটি করিয়া লইয়া বিন্যাস গঠন করিলে যে বিন্যাসগুলি পাওয়া যাইবে, তাহাদের একটিতেও নির্দিষ্ট বস্তুটি থাকিবে না।

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যা $= {}^6p_3 = 6 \times 5 \times 4 = 120.$

(ii) সাতটি বস্তু হইতে 3টি করিয়া লইয়া বিন্যাস রচনা করিলে মোট বিন্যাস-সংখ্যা হইবে ${}^7p_3$ বা $7 \times 6 \times 5$ বা 210টি। এখন 120টি বিন্যাসে নির্দিষ্ট বস্তুটি থাকিবে তাহাদের সংখ্যা $= 210 - 120 = \mathbf{90}.$

উদা. 11. 1, 2, 3, 4, 5—এই পাঁচটি অঙ্কের 3টি করিয়া লইয়া মোট কয়টি যুগ্ম-সংখ্যা পাওয়া যায়, তাহা নির্ণয় কর।

সংখ্যাগুলি যুগ্ম বলিয়া, উহাদের শেষে অর্থাৎ এককের স্থানে 2 অথবা 4 থাকিবে।

2-কে এককের স্থানে রাখিয়া দিয়া অবশিষ্ট $(5-1)$ বা 4টি অঙ্ক দ্বারা অবশিষ্ট $(3-1)$ বা 2টি স্থান পূর্ণ করিয়া বিভিন্ন বিন্যাস রচনা করিলে, যেসকল সংখ্যা পাওয়া যাইবে তাহাদের শেষে 2 থাকিবে। অতএব, যেসকল সংখ্যার শেষে 2 থাকিবে তাহাদের সংখ্যা $= {}^4P_2 = 4 \times 3 = 12.$

এইরূপে, 4-কে এককের স্থানে রাখিলেও মোট 12টি সংখ্যা পাওয়া যাইবে।

$\therefore$ মোট যুগ্ম-সংখ্যা 12×2 বা **24টি**।

প্রশ্নমালা 28

1. মান নির্ণয় কর :

$${}^{10}P_6,\ {}^{12}P_8,\ \underline{|6},\ 8\,!,\ \frac{\underline{|10}}{\underline{|7}}.$$

2. ছয়টি শূন্য-আসনবিশিষ্ট কোন রেলগাড়ীর কামরায় দুইজন লোক উঠিয়া কতপ্রকারে বসিতে পারে? [Calcutta, 1910]

3. *Naresh* শব্দটির অক্ষরসমূহের সবগুলি একযোগে লইয়া বিন্যাস-সংখ্যা নির্ণয় কর। [Calcutta, 1918]

4. *dogmatic* শব্দটির অক্ষরসমূহকে আর কতপ্রকারে সাজানো যাইতে পারে?

5. কলিকাতা হইতে দমদম বিমানবন্দর পর্যন্ত 8টি বাস-গাড়ী যাতায়াত করে। একজন লোক একটি বাস-গাড়ীতে দমদম যাইয়া অন্য যে-কোন বাস-গাড়ীতে ফিরিয়া আসিলে, সে কতপ্রকারে কলিকাতা হইতে দমদম যাইয়া ফিরিয়া আসিতে পারে?

6. কোন পিতা তাহার 4 জন পুত্রের জন্য 7টি পেশা ঠিক করিলেন। যদি তাহাদের যে-কোন দু'জনে একই পেশা গ্রহণ না করে, তাহা হইলে তাহারা কতপ্রকারে পেশা গ্রহণ করিতে পারিবে?

7. পূর্ব রেলওয়ের শিয়ালদহ বিভাগে কলিকাতা-রানাঘাট শাখায় 22টি স্টেশন আছে। এক স্টেশন হইতে অন্য স্টেশনের টিকেট বিক্রয় করিতে হইলে তৃতীয় শ্রেণীর কতপ্রকারের টিকেটের প্রয়োজন হইবে?

[**ইঙ্গিত:** প্রত্যেক স্টেশনে 21 রকম টিকেট থাকিবে।]

8. (*a*) যদি ${}^nP_4 = 12 \times {}^nP_2$, n-এর মান নির্ণয় কর।

(*b*) যদি ${}^{20}P_r = 13 \times {}^{20}P_{r-1}$, r-এর মান নির্ণয় কর।

(*c*) যদি ${}^{n-1}P_4 : {}^{n+1}P_4 = 1 : 3$, n-এর মান নির্ণয় কর।

(*d*) যদি ${}^{2n+1}P_{n-1} : {}^{2n-1}P_n = 3 : 5$, n-এর মান নির্ণয় কর।

(*e*) যদি ${}^{m-2n}P_2 = 12$ এবং ${}^{m+2n}P_2 = 132$, m ও n-এর মান নির্ণয় কর।

9. 12খানা পতাকায় এক সময়ে একখানার উপর আর একখানা করিয়া 4খানা তুলিয়া কতপ্রকারের বিভিন্ন সঙ্কেত করা যায়?

10. 10টি বিভিন্ন বস্তুর 4টি করিয়া লইয়া বিন্যাস গঠন করিলে, কতগুলি বিন্যাসে একটি নির্দিষ্ট বস্তু (i) সর্বদা থাকিবে, (ii) কখনও থাকিবে না?

11. *Bengal* শব্দটির অক্ষরগুলিকে কতপ্রকারে সাজানো যায়? এই বিন্যাস-সমূহের মধ্যে কতগুলি B অক্ষর দিয়া আরম্ভ হইবে? এই বিন্যাসসমূহের মধ্যে কতগুলি B অক্ষর দিয়া আরম্ভ হইবে এবং l অক্ষর দিয়া শেষ হইবে? এই বিন্যাসসমূহের কতগুলিতে প্রথমে B অক্ষর থাকিবে না? এই বিন্যাসসমূহের কতগুলি B অক্ষর দিয়া আরম্ভ হইবে কিন্তু l অক্ষর দিয়া শেষ হইবে না?

12. m-সংখ্যক লোক এবং n-সংখ্যক বানর আছে; n-এর মান m-এর মান অপেক্ষা বৃহত্তর। প্রত্যেকটি লোক কতপ্রকারে একটি বানরের মনিব হইতে পারে?

13. কোন মহাবিদ্যালয়ের প্রথম বার্ষিক শ্রেণীতে 10টি ছাত্র। তাহাদের একজন মুসলমান, একজন খ্রীষ্টান এবং অবশিষ্ট সকলে হিন্দু। মুসলমান ও খ্রীষ্টান ছাত্র-দুইটিকে দুই প্রান্তে বসাইয়া ছাত্রদিগকে কতপ্রকারে এক সারিতে সাজানো যাইতে পারে?

14. n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তুর সবগুলি লইয়া বিন্যাস গঠন করিলে, কতগুলি বিন্যাসের মধ্যে 2টি নির্দিষ্ট বস্তু সর্বদা একত্র থাকিবে?

15. *Failure* শব্দটির স্বরবর্ণ চারিটিকে (aiue) একত্র রাখিয়া, অক্ষরসমূহ দ্বারা যতগুলি শব্দ গঠন করা যায়, তাহা নির্ণয় কর। [Calcutta, 1940]

16. *Daughter* শব্দটির স্বরবর্ণগুলিকে (aue) পৃথক্ না রাখিয়া যতগুলি শব্দ গঠন করা যায়, তাহা নির্ণয় কর। [C. U. 1946]

17. তোমাকে 7 প্রকারের 7টি মুদ্রা দেওয়া হইল; তন্মধ্যে দুইটি তাম্রমুদ্রা। তাম্রমুদ্রাগুলিকে তুমি সর্বদা অযুগ্ম-স্থানে বসাইয়া মুদ্রাগুলিকে কতপ্রকারে সাজাইতে পার?

18. তোমাকে পাঁচটি অক্ষর দেওয়া হইল, তন্মধ্যে তিনটি ব্যঞ্জনবর্ণ এবং 2টি স্বরবর্ণ। কতপ্রকারে তুমি অক্ষরগুলিকে সাজাইতে পার যাহাতে ব্যঞ্জনবর্ণগুলি পাশাপাশি না থাকে?

19. প্রখ্যাত দার্শনিক *Brojen Sil*-এর নামের অক্ষরসমূহ দ্বারা কতগুলি শব্দ গঠন করা যায় যাহাদের আদিতে ব্যঞ্জনবর্ণ এবং অন্তে একটি স্বরবর্ণ থাকিবে?

20. তোমাকে নিম্নলিখিত পুস্তকগুলির একখানা করিয়া দেওয়া হইল: টড্ হান্টারের বীজগণিত, হ্যম্ব্লিন স্মিথের ত্রিকোণমিতি, রবীন্দ্রনাথের গীতাঞ্জলি, বিভূতিভূষণের পথের পাঁচালি, কে. পি. বসুর জ্যামিতি, সেক্সপীয়ারের হ্যামলেট, ফাউলারের তর্কবিদ্যা, এবং কালিদাসের রঘুবংশম্। গণিতের পুস্তকগুলি একত্র রাখিয়া ঐ পুস্তকগুলিকে তুমি কতপ্রকারে একটি তাকের উপর সাজাইতে পার?

21. পূর্ববর্তী প্রশ্নে, সাহিত্যের পুস্তকগুলিও একত্র রাখিয়া কতপ্রকারে উহাদিগকে সাজাইতে পার?

22. দুইখণ্ডের (volume) তিনখানা এবং তিনখণ্ডের দুইখানা গ্রন্থাবলী আছে। যে-কোন গ্রন্থাবলীর খণ্ডগুলিকে পৃথক্ না করিয়া ঐ 12খানা পুস্তককে একটি তাকের উপর কতপ্রকারে সাজানো যাইতে পারে?

23. 7টি ব্যঞ্জনবর্ণের 2টি এবং 3টি স্বরবর্ণের 1টি লইয়া কতগুলি শব্দ গঠন করা যাইতে পারে যদি স্বরবর্ণটি সর্বদা ব্যঞ্জনবর্ণ দুইটির মধ্যে বসে? [Calcutta, 1922]

24. (*a*) 10খানি পরীক্ষার উত্তরপত্র কতপ্রকারে সাজানো যায় যাহাতে সর্বোৎকৃষ্ট এবং সর্বনিকৃষ্ট উত্তরপত্র দুইখানি পাশাপাশি না থাকে? [Calcutta, 1953]

(*b*) প্রমাণ কর যে, সবগুলি একত্র লইয়া n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তুর বিন্যাসের মধ্যে $(n-2)\underline{|n-1}$ বিন্যাসে দুইটি নির্দিষ্ট বস্তু একত্র থাকিবে না?

25. পূর্ব রেলওয়ের কলিকাতা-বনগাঁও শাখার হৃদয়পুর হইতে চাঁদপাড়া পর্যন্ত 12টি স্টেশন আছে। একজন উড়িয়া, একজন মারাঠী এবং অপর কয়জন বাঙ্গালী লইয়া মোট 12 জন প্রার্থীর মধ্য হইতে এই স্টেশনগুলির প্রত্যেকটির জন্য একজন টিকেট-বিক্রেতা নিযুক্ত করিতে হইবে। পর পর দুইটি স্টেশনে উড়িয়া ও মারাঠী প্রার্থীকে নিয়োগ না করিয়া প্রার্থীদিগকে কতপ্রকারে নিয়োগ করা যাইতে পারে?

26. *Youngster* শব্দটির অক্ষরগুলি লইয়া কতগুলি বিন্যাস গঠিত হইতে পারে, যাহাতে স্বরবর্ণগুলি পর পর থাকিবে না?

27. দুইজন B. Sc. পরীক্ষার্থীকে যদি পাশাপাশি না বসানো হয়, তবে 12 জন B. Sc. ও 15 জন I. Sc. পরীক্ষার্থীকে এক সারিতে কতপ্রকারে বসানো যায়?

28. 3টি করিয়া লইয়া n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তুর বিন্যাস-সংখ্যা যাহাতে একটি নির্দিষ্ট বস্তু না থাকে এবং যাহাতে ঐ নির্দিষ্ট বস্তুটি সর্বদা থাকে, এই দুই বিন্যাস-সংখ্যা যদি একই হয়, তবে n-এর মান নির্ণয় কর।

29. (*a*) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 অঙ্কগুলি লইয়া 100 এবং 1000-এর মধ্যবর্তী কতগুলি সংখ্যা গঠন করা যাইতে পারে?

(*b*) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 অঙ্কগুলি লইয়া 3000 এবং 4000-এর মধ্যবর্তী কতগুলি সংখ্যা গঠন করা যাইতে পারে?

30. 5, 6, 7, 8, 9 অঙ্কগুলি লইয়া 1000 অপেক্ষা বৃহত্তর কতগুলি সংখ্যা গঠন করা যাইতে পারে?

31. 2, 3, 4, 0, 8, 9 দ্বারা 10 এবং 1000-এর মধ্যবর্তী কতগুলি সংখ্যা গঠন করা যায়?

32. 5, 2, 0, 4, 7 দ্বারা পাঁচটি সার্থক অঙ্কের কয়টি অযুগ্ম-সংখ্যা গঠন করা যায়?

33. 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9—ইহাদের প্রত্যেকটিকে একাধিকবার না লইয়া 5 দ্বারা বিভাজ্য 1000 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর কতগুলি সংখ্যা গঠন করা যায়, তাহাদের সংখ্যা নির্ণয় কর। [Calcutta, 1942]

34. প্রমাণ কর যে,

(i) ${}^nP_r = (n-r+1)\,{}^nP_{r-1}$.

(ii) ${}^nP_n = 1 + 1.{}^1P_1 + 2.{}^2P_2 + 3.{}^3P_3 + \cdots\cdots + (n-1).{}^{n-1}P_{n-1}$.

(iii) $2.6.10.14\cdots n$-সংখ্যক উৎপাদক পর্যন্ত

$= (n+1)(n+2)(n+3)\cdots\cdots n$-সংখ্যক উৎপাদক পর্যন্ত।

35. যদি ${}^nP_{r-1}/a = {}^nP_r/b = {}^nP_{r+1}/c$, প্রমাণ কর যে,

$$b^2 = a(b+c).$$

(খ) সমবায়

8·3. n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হইতে r-সংখ্যকটি করিয়া লইয়া গঠিত সমবায়সমূহের সংখ্যা নির্ণয়। [*To find the number of combinations of n different things taken r at a time* ($r < n$).]

নির্ণেয় সমবায়-সংখ্যা যেন ${}^nC_r$ প্রতীকদ্বারা সূচিত। এই ${}^nC_r$-সংখ্যক সমবায়ের প্রত্যেকটির অন্তর্গত r-সংখ্যক বস্তুর সবগুলিকে লইয়া বিন্যাস রচনা করিলে, প্রত্যেকটি সমবায় হইতে $\underline{|r}$-সংখ্যক বিন্যাস পাওয়া যাইবে; সুতরাং, ${}^nC_r$-সংখ্যক সমবায় হইতে মোট ${}^nC_r \times \underline{|r}$-সংখ্যক বিন্যাস পাওয়া যাইবে। ইহা স্পষ্ট যে n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু

হইতে r-সংখ্যকটি করিয়া লইয়া গঠিত **বিন্যাস**-সমূহের সংখ্যা এই ${}^nC_r \times \underline{|r}$-সংখ্যার সমান।

$$\therefore \quad {}^rC_r \times \underline{|r} = {}^nP_r = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1); \qquad [\text{অনু. } 8\cdot2]$$

$$\therefore \quad {}^nC_r = \frac{{}^nP_r}{\underline{|r}} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{\underline{|r}}. \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$$

আবার, (1)-এর দক্ষিণ পক্ষের লব এবং হর উভয়কে $\underline{|n-r}$ দ্বারা গুণ করিলে, দেখা যায়,

$$\mathbf{{}^nC_r = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) \times \underline{|n-r}}{\underline{|r} \times \underline{|n-r}}}$$

$$\mathbf{= \frac{\underline{|n}}{\underline{|r}\,\underline{|n-r}}}. \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (2)$$

সমবায়-সংখ্যা পাটীগণিতীয় সংখ্যায় প্রকাশ করিতে হইলে, সূত্র (1) প্রয়োগ করিতে হয়; আর বীজগণিতীয় রাশিমালায় প্রকাশ করিতে হইলে, সূত্র (2) প্রয়োগ করাই সুবিধাজনক।

দ্রষ্টব্য : ইহা স্পষ্ট যে, সূত্র (1) এবং (2)-এ r এবং n উভয়ই ধনাত্মক সংখ্যা এবং r-এর মান n অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর অথবা n-এর সমান।

বিকল্প প্রমাণ (বিন্যাস-সংখ্যা নির্ণয়ের সূত্রের সাহায্য-ব্যতিরেকে) : n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হইতে উহাদের r-সংখ্যকটি করিয়া লইয়া গঠিত সমবায়-সংখ্যাটিকে ${}^nC_r$ দ্বারা এবং n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তুকে $a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots, a_n$ দ্বারা সূচিত করা হইল। যে সকল সমবায়ে কোন একটি বিশেষ অক্ষর, a_1 থাকে, তাহাদের প্রত্যেকটিতে a_1 বাদে আরও $(r-1)$-সংখ্যক বস্তু থাকিবে। ইহাদের প্রত্যেকটির জন্য a_1-কে আলাদা করিয়া রাখিলে n-সংখ্যক বস্তুর $(n-1)$-সংখ্যকটি অবশিষ্ট থাকে। এই $(n-1)$-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হইতে $(r-1)$-সংখ্যকটি করিয়া লইয়া ${}^{n-1}C_{r-1}$-সংখ্যক সমবায় গঠন করা যায়। অতএব, যে সকল সমবায়ে a_1 অক্ষরটি বর্তমান থাকে, তাহাদের সংখ্যা হইতেছে ${}^{n-1}C_{r-1}$.

এইরূপে, যে সকল সমবায়ে a_2 অক্ষরটি বর্তমান থাকে, তাহাদের সংখ্যাও ${}^{n-1}C_{r-1}$, যেগুলিতে a_3 বর্তমান থাকে, তাহাদের সংখ্যাও ${}^{n-1}C_{r-1}$, ইত্যাদি; প্রত্যেক অক্ষরই ${}^{n-1}C_{r-1}$-সংখ্যক সমবায়ে বর্তমান থাকিবে এবং এই সকল সমবায়ের প্রত্যেকটিতে প্রত্যেক অক্ষর থাকিবে মাত্র একবার করিয়া। অতএব, n-সংখ্যক বিভিন্ন অক্ষর হইতে উহাদের r-সংখ্যকটি করিয়া লইয়া গঠিত ${}^nC_r$-সংখ্যক সমবায়ের সবগুলি লিখিয়া ফেলিলে, দেখা যাইবে এই সকল সমবায়ে a_1, a_2, প্রভৃতি n-সংখ্যক অক্ষরের প্রত্যেকটি ${}^{n-1}C_{r-1}$ বার করিয়া আছে; সুতরাং, ঐ সকল সমবায়ে অক্ষরগুলির মোট সংখ্যা হইবে $n \times {}^{n-1}C_{r-1}$.

আবার, ${}^nC_r$-সংখ্যক সমবায়ের প্রত্যেকটি r-সংখ্যক অক্ষর লইয়া গঠিত বলিয়া, মোট অক্ষর-সংখ্যা হইবে $r \times {}^nC_r$.

$$\therefore \qquad r \times {}^nC_r = n \times {}^{n-1}C_{r-1},$$

$$\text{বা,} \qquad {}^nC_r = \frac{n}{r} \times {}^{n-1}C_{r-1};$$

এই সূত্রে n ও r-কে প্রথমে যথাক্রমে $n-1$ ও $r-1$-এ, তারপর যথাক্রমে $n-2$ ও $r-2$-এ ইত্যাদিতে পরিবর্তন করিলে দেখা যায় যে,

$${}^{n-1}C_{r-1} = \frac{n-1}{r-1} \times {}^{n-2}C_{r-2},$$

$${}^{n-2}C_{r-2} = \frac{n-2}{r-2} \times {}^{n-3}C_{r-3},$$

$$\cdots \qquad \cdots \qquad \cdots$$

$${}^{n-r+2}C_2 = \frac{n-r+2}{2} \times {}^{n-r+1}C_1,$$

এবং স্পষ্টই $\quad {}^{n-r+1}C_1 = \dfrac{n-r+1}{1}.$

এখন স্তম্ভক্রমে গুণ করিয়া এবং সমতা-চিহ্নযুক্ত গুণফল দুইটি হইতে উহাদের সাধারণ গুণনীয়কগুলি অপসারণ করিলে,

$${}^nC_r = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r(r-1)(r-2)\cdots 2.1}$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{\underline{|r}}.$$

অনুসিদ্ধান্ত। ${}^nC_1 = n$; ${}^nC_n = 1$; ${}^nP_r = \underline{|r} \times {}^nC_r$.

8·4. n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হইতে উহাদের r-সংখ্যকটি করিয়া লইয়া গঠিত সমবায়সমূহের যেগুলিতে (ক) p-সংখ্যক নির্দিষ্ট বস্তু সর্বদা বর্তমান থাকে, তাহাদের সংখ্যা নির্ণয়; এবং (খ) যেগুলিতে p-সংখ্যক নির্দিষ্ট বস্তু কখনই থাকে না তাহাদের সংখ্যা নির্ণয়।

[*To find the number of combinations of* n *things, taken* r *at a time, in which* (i) p *particular things will always occur,* (ii) p *particular things never occur.*]

(ক) n-সংখ্যক বস্তু হইতে নির্দিষ্ট p-সংখ্যক বস্তু পৃথক্ করিয়া রাখিয়া অবশিষ্ট $(n-p)$-সংখ্যক বস্তু হইতে উহাদের $(r-p)$-সংখ্যকটি করিয়া লইয়া ${}^{n-p}C_{r-p}$-সংখ্যক

সমবায় গঠন করা যায়। ইহাদের প্রত্যেকটির সহিত ঐ পৃথক্ করিয়া রাখা p-সংখ্যক বস্তু যুক্ত করা যায়। সুতরাং যে সকল সমবায়ে ঐ p-সংখ্যক বস্তু সর্বদা বর্তমান থাকে তাহাদের সংখ্যা ${}^{n-p}C_{r-p}$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমবায়-সংখ্যা $= {}^{n-p}C_{r-p}$.

(খ) নির্দিষ্ট p-সংখ্যক বস্তু কোন সমবায়েই থাকিবে না বলিয়া, n-সংখ্যক বস্তু হইতে নির্দিষ্ট p-সংখ্যক বস্তু পৃথক্ করিয়া রাখিয়া অবশিষ্ট $(n-p)$-সংখ্যক বস্তু হইতে r-সংখ্যকটি করিয়া লইয়া সমবায় গঠন করিলে, এই সকল সমবায়ের কোনটিতেই নির্দিষ্ট p-সংখ্যক বস্তু কখনই থাকিবে না।

$\therefore$ নির্ণেয় সমবায়-সংখ্যা $= {}^{n-p}C_r$.

8·5. পূরক সমবায় (Complementary Combinations) :

n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হইতে উহাদের r-সংখ্যকটি করিয়া লইয়া গঠিত সমবায়-সংখ্যা, n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হইতে (n − r)-সংখ্যকটি করিয়া লইয়া গঠিত সমবায়-সংখ্যার সমান।

আমরা জানি, $${}^nC_r = \frac{\lfloor n}{\lfloor r \lfloor n-r} \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$$

এই সূত্রে r-এর স্থানে $n-r$ বসাইলে,

$${}^nC_{n-r} = \frac{\lfloor n}{\lfloor n-r \lfloor n-(n-r)} = \frac{\lfloor n}{\lfloor n-r \lfloor r} \quad \cdots \quad (2)$$

$\therefore$ (1) এবং (2) হইতে, ${}^nC_r = {}^nC_{n-r}$.

বিকল্প পদ্ধতি : n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হইতে যতবারই r-সংখ্যক বস্তু নির্বাচন করা যাক না কেন, ততবারই $(n-r)$-সংখ্যক বস্তু পড়িয়া থাকে। অতএব, n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হইতে যত বিভিন্ন উপায়ে r-সংখ্যক বস্তু নির্বাচন করা যায়, ঠিক তত বিভিন্ন উপায়েই $(n-r)$-সংখ্যক বস্তুকে নির্বাচন করা যায় ;

অর্থাৎ, ${}^nC_r = {}^nC_{n-r}$.

এইরূপ সমবায়কে **পূরক সমবায়** বলে।

অনুসিদ্ধান্ত। ${}^nC_x = {}^nC_y$ হইলে, স্পষ্টই $x = y$; আবার $x + y = n$ও হইতে পারে ; কারণ, ${}^nC_x = {}^nC_{n-x}$; সুতরাং, $y = n - x$, বা, $x + y = n$.

$\therefore$ ${}^nC_x = {}^nC_y$ হইলে, $x = y$, অথবা, $x + y = n$.

দ্রষ্টব্য : ${}^nC_0 = {}^nC_{n-0} = {}^nC_n = 1$.

8·6. প্রমাণ কর যে, $^nC_r + {^nC_{r-1}} = {^{n+1}C_r}$.

অর্থাৎ n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হইতে r-সংখ্যকটি করিয়া লইয়া গঠিত ^nC_r-সংখ্যক সমবায় এবং ঐ n-সংখ্যক বস্তু হইতে $(r-1)$-সংখ্যকটি করিয়া লইয়া গঠিত $^nC_{r-1}$-সংখ্যক সমবায়ের সমষ্টি $(n+1)$-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হইতে r-সংখ্যকটি করিয়া লইয়া গঠিত সমবায়-সংখ্যা $^{n+1}C_r$-এর সমান।

$$^nC_r + {^nC_{r-1}} = \frac{\underline{|n}}{\underline{|r}\,\underline{|n-r}} + \frac{\underline{|n}}{\underline{|r-1}\,\underline{|n-r+1}}$$

$$= \frac{\underline{|n}}{r\,\underline{|r-1}\,\underline{|n-r}} + \frac{\underline{|n}}{\underline{|r-1}\,(n-r+1)\,\underline{|n-r}}$$

$$= \frac{\underline{|n}}{\underline{|r-1}\,\underline{|n-r}}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{n-r+1}\right)$$

$$= \frac{\underline{|n}}{\underline{|r-1}\,\underline{|n-r}} \times \frac{n-r+1+r}{r(n-r+1)}$$

$$= \frac{(n+1)\underline{|n}}{r\,\underline{|r-1}(n-r+1)\underline{|n-r}} = \frac{\underline{|n+1}}{\underline{|r}\,\underline{|n-r+1}} = {^{n+1}C_r}.$$

বিকল্প পদ্ধতি : $(n+1)$-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হইতে r-সংখ্যকটি করিয়া লইয়া গঠিত মোট $^{n+1}C_r$-সংখ্যক সমবায়কে নিম্নবর্ণিত দুইভাগে ভাগ করিয়া রাখা যায় :

(ক) উক্ত $(n+1)$-সংখ্যক বস্তুর কোন একটি নির্দিষ্ট বস্তু-সংবলিত সমবায়সমূহ ; এবং (খ) ঐ নির্দিষ্ট বস্তু-বর্জিত সমবায়সমূহ।

এখন, নির্দিষ্ট বস্তুটি-সংবলিত সমবায়সমূহের সংখ্যা, নির্দিষ্ট বস্তুটিকে পৃথক্ করিয়া রাখিলে যে n-সংখ্যক বস্তু অবশিষ্ট থাকে সেই সকল বস্তু হইতে $(r-1)$-সংখ্যকটি করিয়া লইয়া গঠিত সমবায়সমূহের সংখ্যার সমান ; অতএব (ক)-এ বর্ণিত

নির্দিষ্ট বস্তুটি-সংবলিত সমবায়-সংখ্যা $= {^nC_{r-1}}$.

আবার, নির্দিষ্ট বস্তু-বর্জিত সমবায়সমূহের সংখ্যা, নির্দিষ্ট বস্তুটিকে পৃথক্ করিয়া রাখিলে যে n-সংখ্যক বস্তু অবশিষ্ট থাকে সেই সকল বস্তু হইতে r-সংখ্যকটি করিয়া লইয়া গঠিত সমবায়সমূহের সংখ্যার সমান ; অতএব, (খ)-এ বর্ণিত

নির্দিষ্ট বস্তুটি-বর্জিত সমবায়-সংখ্যা $= {^nC_r}$.

$\therefore \quad {^nC_r} + {^nC_{r-1}} = {^{n+1}C_r}$.

উদা. 1. $^{12}C_8$, $^{15}C_9$ এবং $^{25}C_{22}$-এর মান নির্ণয় কর।

$$^{12}C_8 = {^{12}C_{12-8}} = {^{12}C_4} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9}{1 \times 2 \times 3 \times 4} = 11 \times 5 \times 9 = 495.$$

$$^{15}C_9 = {}^{15}C_{15-9} = {}^{15}C_6 = \frac{15\times14\times13\times12\times11\times10}{1\times2\times3\times4\times5\times6}$$
$$= 7\times13\times11\times5 = \mathbf{5005}.$$

$$^{25}C_{22} = {}^{25}C_{25-22} = {}^{25}C_3 = \frac{25\times24\times23}{1\times2\times3} = \mathbf{2300}.$$

উদা. 2. $^nC_{14} = {}^nC_{16}$ হইলে, $^nC_{28}$ এবং $^{32}C_n$-এর মান কত হইবে?

এখন, $^nC_{14} = {}^nC_{16}$; $\quad \therefore \; n = 14+16 = 30.$

$$\therefore \quad {}^nC_{28} = {}^{30}C_{28} = {}^{30}C_2 = \frac{30\times29}{1\times2} = \mathbf{435};$$

এবং $^{32}C_n = {}^{32}C_{30} = {}^{32}C_2 = \dfrac{32\times31}{1\times2} = \mathbf{496}.$

উদা. 3. প্রমাণ কর যে,

$$^{4n}C_{2n} : {}^{2n}C_n = \{1.3.5\ldots(4n-1)\} : \{1.3.5\ldots(2n-1)\}^2.$$

আমরা জানি, $\quad {}^{4n}C_{2n} = \dfrac{\lfloor 4n}{\lfloor 2n \lfloor 2n}$, এবং $^{2n}C_n = \dfrac{\lfloor 2n}{\lfloor n \lfloor n}$;

$$\therefore \quad {}^{4n}C_{2n} : {}^{2n}C_n = \frac{\lfloor 4n}{\lfloor 2n\lfloor 2n} \times \frac{\lfloor n\lfloor n}{\lfloor 2n} = \frac{\lfloor 4n}{\lfloor 2n} \times \left\{\frac{\lfloor n}{\lfloor 2n}\right\}^2.$$

এখন, $\lfloor 4n = 1.2.3.4.5\ldots 4n = \{1.3.5\ldots\ldots(4n-1)\} \times \{2.4.6\ldots 4n\}$
$$= \{1.3.5\ldots(4n-1)\} \times 2^n\{1.2.3\ldots 2n\}.$$

$$\therefore \quad \frac{\lfloor 4n}{\lfloor 2n} = \{1.3.5\ldots(4n-1)\} \times 2^{2n}. \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad (1)$$

আবার, $\lfloor 2n = \{1.3.5\ldots(2n-1)\} \times \{2.4.6\ldots 2n\}$
$$= \{1.3.5\ldots(2n-1)\}.2^n\{1.2.3\ldots n\}.$$

$$\therefore \quad \frac{\lfloor 2n}{\lfloor n} = \{1.3.5\ldots(2n-1)\} \times 2^n;$$

$$\therefore \quad \left(\frac{\lfloor n}{\lfloor 2n}\right) = \frac{1}{\{1.3.5\ldots(2n-1)\}^2 \times 2^{2n}}. \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad (2)$$

অতএব, (1) এবং (2) হইতে, $\;{}^{4n}C_{2n} : {}^{2n}C_n = \dfrac{1.3.5\ldots(4n-1)}{\{1.3.5\ldots(2n-1)\}^2}.$

উদা. 4. কোন সওদাগরী অফিসে 16টি কেরানীর পদ খালি আছে। 20 জন প্রার্থীর মধ্যে 16 জন করিয়া কতপ্রকারে নির্বাচন করা যায়? একজন নির্দিষ্ট প্রার্থী কতবার নির্বাচিত হইতে পারে?

এস্থলে 20 জন প্রার্থী হইতে 16 জন করিয়া নির্বাচন করিয়া বিভিন্ন দল গঠন করিতে হইবে। অতএব, নির্ণেয় দল-সংখ্যা

$$={}^{20}C_{16}={}^{20}C_4=\frac{20\times19\times18\times17}{4\times3\times2\times1}$$

$$=5\times19\times3\times17=\mathbf{4845.}$$

এখন, নির্ণয় করিতে হইবে একজন নির্দিষ্ট প্রার্থীকে কতবার নির্বাচন করা যাইতে পারে। নির্দিষ্ট প্রার্থীটিকে যেবারই নির্বাচন করা হইবে, সেইবারই বাকী 15 জনকে অবশিষ্ট 19 জন প্রার্থী হইতে নির্বাচন করিতে হইবে।

অতএব, যত বিভিন্ন উপায়ে 19 জন ব্যক্তি হইতে 15 জন ব্যক্তিকে নির্বাচন করা যায়, ঠিক ততবারই নির্দিষ্ট ব্যক্তিটিকেও নির্বাচন করা যায়।

∴ কোন নির্দিষ্ট প্রার্থী যতবার নির্বাচিত হয় তাহার সংখ্যা

$$={}^{19}C_{15}={}^{19}C_4=\frac{19\times18\times17\times16}{4\times3\times2\times1}$$

$$=19\times3\times17\times4=\mathbf{3876.}$$

উদা. 5. কোন পিতা তাঁহার 8 জন সন্তানের 3 জন করিয়া সন্তানকে লইয়া চিড়িয়াখানায় যান। কিন্তু একই 3 জন সন্তানকে একবারের বেশী না লইলে, তাঁহাকে কতবার চিড়িয়াখানায় যাইতে হইবে? প্রত্যেকটি সন্তান কতবার চিড়িয়াখানায় যাইবে?

3 জন করিয়া গঠিত পুত্র-কন্যার প্রত্যেকটি দলের সহিত পিতার চিড়িয়াখানায় যাইতে হয় বলিয়া, 8 জন পুত্র-কন্যার মধ্যে 3 জন করিয়া লইয়া যত বিভিন্ন দল গঠন করা যায়, পিতার ততবার চিড়িয়াখানায় যাইতে হইবে। অতএব, পিতার যতবার চিড়িয়াখানায় যাইতে হয় তাহার সংখ্যা

$$={}^{8}C_3=\frac{8\times7\times6}{3\times2\times1}=\mathbf{56.}$$

দেখা গেল, পুত্র-কন্যার মধ্যে 56টি বিভিন্ন দল গঠন করা যায়। এই 56টি দলের মধ্যে পুত্র-কন্যার কোন নির্দিষ্ট একজন যত দলে থাকিবে পুত্র-কন্যার প্রত্যেকে ততবার করিয়া চিড়িয়াখানায় যাইবে। অতএব, প্রত্যেকে 3 জনের বাকী 2 জন করিয়া লইয়া অবশিষ্ট 7 জনের মধ্যে যতগুলি দল গঠন করা যায় ততবার যাইবে।

∴ পুত্র-কন্যার প্রত্যেকের চিড়িয়াখানায় যতবার যাইতে হয় তাহার সংখ্যা

$$={}^{7}C_2=\frac{7\times6}{2\times1}=\mathbf{21.}$$

উদা 6. একটি দ্বাদশভুজবিশিষ্ট বহুভুজের কৌণিক বিন্দুগুলি যুক্ত করিয়া যতগুলি বিভিন্ন ত্রিভুজ পাওয়া যায়, তাহাদের সংখ্যা নির্ণয় কর। বহুভুজটির কর্ণসংখ্যাও নির্ণয় কর।

দ্বাদশভুজবিশিষ্ট বহুভুজটির 12টি কৌণিক বিন্দু আছে। এই 12টি বিন্দুর 3টি 3টি করিয়া সংযুক্ত করিলে প্রতিবারেই একটি ত্রিভুজ পাওয়া যাইবে। অতএব, 12টি বিন্দু হইতে 3টি বিন্দু যত বিভিন্ন উপায়ে নির্বাচন করা যায়, মোট ত্রিভুজ-সংখ্যাও হইবে ততগুলি।

∴ নির্ণেয় ত্রিভুজ-সংখ্যা

$$= {}^{12}C_3 = \frac{12 \times 11 \times 10}{3 \times 2 \times 1} = 2 \times 11 \times 10 = \mathbf{220}.$$

আবার, 12টি কৌণিক বিন্দুর 2টি করিয়া সংযুক্ত করিলে, প্রতিবারেই একটি সরল রেখা পাওয়া যাইবে।

∴ মোট সরল রেখার সংখ্যা $= {}^{12}C_2 = \dfrac{12 \times 11}{2 \times 1} = 6 \times 11 = 66.$

এখন, পরপর দুইটি কৌণিক বিন্দু সংযুক্ত করিলে, বহুভুজটির বাহুগুলি পাওয়া যায় বলিয়া, উপরিপ্রাপ্ত 66টি সরল রেখার মধ্যে বহুভুজের বাহু 12টিও আছে। স্পষ্টই এই বাহুগুলি বাদে ঐ 66টি সরল রেখার বাকী সরল রেখাগুলি কর্ণ।

অতএব, নির্ণেয় কর্ণ-সংখ্যা $= 66 - 12 = \mathbf{54}.$

উদা. 7. (i) কোন সমতলে দ্বাদশটি বিন্দু আছে। তাহাদের 5টি ব্যতীত অন্য কোন তিনটি বিন্দুই এক সরল রেখায় অবস্থিত নহে। ঐ 12টি বিন্দু হইতে কতগুলি সরল রেখা পাওয়া যাইতে পারে? (ii) ঐ 12টি বিন্দুর দ্বারা কতগুলি ত্রিভুজ উৎপন্ন হইতে পারে?

(i) কোন তিনটি বিন্দুই এক সরল রেখায় অবস্থিত না হইলে, 12টি বিন্দু হইতে 2টি করিয়া লইয়া মোট ${}^{12}C_2$, অর্থাৎ, $\dfrac{12 \times 11}{2 \times 1}$, অর্থাৎ, 66টি বিভিন্ন সরল রেখা পাওয়া যাইত। কিন্তু 5টি বিন্দু এক সরল রেখায় অবস্থিত বলিয়া, উহাদের দ্বারা ${}^{5}C_2$ বা $\dfrac{5 \times 4}{2 \times 1}$ বা 10টি সরল রেখা গঠিত হইবে না, হইবে মাত্র একটি। কিন্তু উপরিউক্ত 66টি সরল রেখার মধ্যে এই 10টিকে বিভিন্ন সরল রেখা ধরা হইয়াছে; কিন্তু ধরিতে হইবে 10টির স্থলে মাত্র 1টি।

∴ নির্ণেয় সরল রেখার সংখ্যা $= 66 - 10 + 1 = \mathbf{57}.$

(ii) এক সরল রেখায় অবস্থিত নহে এরূপ যে-কোন 3টি বিন্দুর সংযোগে ত্রিভুজ উৎপন্ন হয়। এস্থলে, 12টি বিন্দুর কোন 3টি বিন্দুই এক সরল রেখায় অবস্থিত না হইলে, মোট ত্রিভুজ-সংখ্যা হইত ${}^{12}C_3$; কিন্তু 5টি বিন্দু এক সরল রেখায় অবস্থিত হওয়ায়,

উহাদের 3টি 3টি দ্বারা কোন ত্রিভুজই গঠিত হয় না। উক্ত $^{12}C_3$-সংখ্যক ত্রিভুজের মধ্যে এই 5টি বিন্দুর 3টি 3টি দ্বারা গঠিত $^5C_3$-সংখ্যক ত্রিভুজ সংখ্যাও ধরা হইয়াছে ;

∴ নির্ণেয় ত্রিভুজ-সংখ্যা

$$= {}^{12}C_3 - {}^5C_3 = \frac{12 \times 11 \times 10}{3 \times 2 \times 1} - \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1} = 220 - 10 = \mathbf{210.}$$

উদা. 8. 10টি বিভিন্ন ব্যঞ্জনবর্ণ এবং 4টি বিভিন্ন স্বরবর্ণের মধ্যে 3টি ব্যঞ্জনবর্ণ এবং 2টি স্বরবর্ণ একযোগে লইয়া কতগুলি শব্দ গঠন করা যাইতে পারে ?

10টি ব্যঞ্জনবর্ণ হইতে 3টি 3টি করিয়া মোট $^{10}C_3$-সংখ্যক সমবায় গঠন করা যায়।

4টি স্বরবর্ণ হইতে 2টি 2টি করিয়া লইয়া মোট $^4C_2$-সংখ্যক সমবায় গঠন করা যায়।

এখন, ব্যঞ্জনবর্ণসমূহ দ্বারা গঠিত সমবায়সমূহের প্রত্যেকটির সহিত স্বরবর্ণসমূহ দ্বারা গঠিত সমবায়সমূহের প্রত্যেকটি সংযুক্ত করিয়া, 3টি করিয়া ব্যঞ্জনবর্ণ এবং 2টি করিয়া স্বরবর্ণ-সংবলিত $^{10}C_3 \times {}^4C_2$-সংখ্যক সমবায় পাওয়া যাইবে।

আবার, এই সকল সমবায়ের প্রত্যেকটিতে যে 5টি করিয়া অক্ষর আছে, তাহাদের সবগুলিকে লইয়া বিন্যাস রচনা করিলে, প্রত্যেক সমবায় হইতে $\lfloor 5$-সংখ্যক শব্দ পাওয়া যায়।

$$\therefore \text{ নির্ণেয় শব্দ-সংখ্যা} = {}^{10}C_3 \times {}^4C_2 \times \lfloor 5$$

$$= \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} \times \frac{4 \times 3}{2 \times 1} \times \lfloor 5$$

$$= 120 \times 6 \times \lfloor 5 = 720 \times 120 = \mathbf{86400.}$$

উদা. 9. 5টি করিয়া দুই ভাগে বিভক্ত 10টি প্রশ্নের মধ্যে কোন পরীক্ষার্থীকে 6টি প্রশ্নের উত্তর দিতে হইবে। কোন ভাগ হইতেই 4টির অধিক প্রশ্নের উত্তর দিতে পারিবে না। কতপ্রকারে সে প্রশ্ন নির্বাচন করিতে পারে ? [C. U. 1932]

প্রদত্ত শর্ত হইতে, স্পষ্টই পরীক্ষার্থী নিম্নলিখিত বিভিন্ন উপায়ে প্রশ্নগুলি নির্বাচন করিতে পারে :

(i) প্রথম বিভাগের 5টি প্রশ্ন হইতে যে-কোন 4টি, দ্বিতীয় বিভাগের 5টি প্রশ্ন হইতে যে-কোন 2টি ;

(ii) প্রথম বিভাগের 5টি প্রশ্ন হইতে যে-কোন 3টি, দ্বিতীয় বিভাগের 5টি প্রশ্ন হইতে যে-কোন 3টি ;

(iii) প্রথম বিভাগের 5টি প্রশ্ন হইতে যে-কোন 2টি, দ্বিতীয় বিভাগের 5টি প্রশ্ন হইতে যে-কোন 4টি।

(i) প্রথম বিভাগের 5টি হইতে 4টি, $^5C_4$-সংখ্যক বিভিন্ন উপায়ে এবং দ্বিতীয়

বিভাগের 5টি হইতে 2টি, ${}^5C_2$-সংখ্যক বিভিন্ন উপায়ে নির্বাচন করা যায়। এখন প্রথম বিভাগের প্রশ্ন-নির্বাচনের প্রত্যেক উপায়ের সহিত দ্বিতীয় বিভাগের প্রশ্ন-নির্বাচনের প্রত্যেকটি উপায় সংযুক্ত করা যায় বলিয়া, দুই বিভাগ হইতে (i)-বর্ণিত উপায়ে প্রশ্ন-নির্বাচন-সংখ্যা $= {}^5C_4 \times {}^5C_2$,

এইরূপে (ii)-এ বর্ণিত উপায়ে প্রশ্ন-নির্বাচন-সংখ্যা $= {}^5C_3 \times {}^5C_3$,

এবং (iii)-এ বর্ণিত উপায়ে প্রশ্ন-নির্বাচন-সংখ্যা $= {}^5C_2 \times {}^5C_4$.

$\therefore$ যে সকল বিভিন্ন উপায়ে প্রশ্নগুলি দুইটি বিভাগ হইতে নির্বাচিত হইতে পারে তাহাদের সংখ্যা

$$= {}^5C_4 \times {}^5C_2 + {}^5C_3 \times {}^5C_3 + {}^5C_2 \times {}^5C_4$$
$$= {}^5C_1 \times {}^5C_2 + {}^5C_2 \times {}^5C_2 + {}^5C_2 \times {}^5C_1$$
$$= 5 \times \frac{5 \times 4}{2 \times 1} + \frac{5 \times 4}{2 \times 1} \times \frac{5 \times 4}{2 \times 1} + \frac{5 \times 4}{2 \times 1} \times 5$$
$$= 5 \times 10 + 10 \times 10 + 10 \times 5 = 50 + 100 + 50 = \mathbf{200}.$$

উদা. 10. *Metaphysics* শব্দটির অক্ষরগুলি হইতে একযোগে 5টি করিয়া লইয়া যতগুলি শব্দ গঠন করা যায়, তন্মধ্যে কতগুলিতে 't' সর্বদা থাকিবে ?

এখানে 11টি অক্ষরের 5টি 5টি লইয়া শব্দ গঠন করিলে, কতকগুলির মধ্যে t সর্বদা থাকিবে, তাহাই নির্ণয় করিতে হইবে।

't' সর্বদা থাকিবে ; অতএব, t বাদ দিয়া যে 10টি অক্ষর থাকে, তাহাদের মধ্য হইতে 4টি করিয়া লইয়া যেসব সমবায় (${}^{10}C_4$) গঠন করা যায়, তাহার প্রত্যেকের সহিত t যুক্ত করিয়া প্রত্যেকটি সমবায় হইতে বিন্যাস-সংখ্যা লইলেই মোট বিন্যাস-সংখ্যা পাওয়া যাইবে, প্রত্যেকটি সমবায়ে 5টি অক্ষর থাকিবে বলিয়া, উহা হইতে $\underline{|5}$-সংখ্যক বিন্যাস পাওয়া যাইবে।

$\therefore$ নির্ণেয় বিন্যাস-সংখ্যা $= {}^{10}C_4 \times \underline{|5}$

$$= \frac{10.9.8.7}{1.2.3.4} \times 120 = \mathbf{25200}.$$

[সমবায়-সূত্র-ব্যতিরেকে মাত্র বিন্যাস-সূত্র-সাহায্যে সমাধানের ভার শিক্ষার্থিগণের উপর অর্পিত হইল।]

উদা. 11. 21টি শ্বেতবর্ণের এবং 19টি কৃষ্ণবর্ণের বলকে এক সারিতে এরূপভাবে সাজাইতে হইবে, যেন 2টি কৃষ্ণবর্ণের বল পাশাপাশি না বসে। কতপ্রকারে এরূপে সাজানো যাইতে পারে ?

শ্বেতবর্ণের বলগুলিকে W দ্বারা সূচিত করিলে, কৃষ্ণবর্ণের বলগুলি যাহাতে

পাশাপাশি না বসে তাহার জন্য তাহাদিগকে নিম্নলিখিতরূপে '×'-চিহ্নিত স্থানে বসাইতে হইবে

$$\times\ W \times W \times W \times W \times \cdots\cdots\cdots\cdots \times W \times W \times\text{।}$$

এখন শ্বেতবর্ণ বলের সংখ্যা 21 বলিয়া '×'-চিহ্নের সংখ্যা অবশ্যই 22 হইবে। এই 22টি স্থানের মধ্যে যে-কোন 19টি স্থান নির্বাচন করিয়া সেই সকল স্থানে কৃষ্ণবর্ণ বল বসাইলে উহারা কখনই পাশাপাশি বসিবে না।

∴ নির্ণেয় বিভিন্ন উপায়-সংখ্যা

$$= {}^{22}C_{19} = {}^{22}C_3 = \frac{22 \times 21 \times 20}{3 \times 2 \times 1} = \mathbf{1540.}$$

উদা. 12. একখানি নৌকার 8 জন মাঝির 3 জন একপার্শ্বে আর 2 জন অন্যপার্শ্বে দাঁড় টানিতে পারে। মাঝিদিগকে মোট কতপ্রকারে সাজাইতে পারা যায়?

মনে কর, মাঝিদের নাম A, B, C, D, E, F, G ও H এবং A, B, C মাত্র একপার্শ্বে এবং D, E অন্যপার্শ্বে কাজ করিতে পারে, অতএব, তাহাদিগকে নিম্নোক্ত প্রকারে সাজানো যায় :—

A	D
B	E
C	

যেহেতু মাঝিদের 4 জন করিয়া একপার্শ্বে থাকিবে, অতএব, অবশিষ্ট 3 জনের 1 জনকে A, B, C-এর পার্শ্বে এবং অপর 2 জনকে D, E-এর পার্শ্বে রাখা যায়—ইহা স্পষ্ট যে, ইহা তিন প্রকারে করা যায়, কেননা অবশিষ্ট 3 জনের যে-কোন 1 জনকে A, B, C-এর পার্শ্বে রাখা যায়।

মাঝিদের এই তিনপ্রকারের অবস্থানের একটির আলোচনা করা যাক, যাহাতে A, B, C-এর পার্শ্বে F-কে রাখা হইল :

A	D
B	E
C	G
F	H

এক্ষণে A, B, C, F-কে তাহাদের মধ্যে $\lfloor 4$ প্রকারে সাজানো যায়, এইরূপে অপর পার্শ্বের D, E, G, H-কেও তাহাদের মধ্যে $\lfloor 4$ প্রকারে সাজানো যায়।

অতএব, বাম পক্ষের প্রত্যেক প্রকারের সহিত দক্ষিণ পক্ষের প্রত্যেক প্রকার

সংযুক্ত করা যায় বলিয়া, এক্ষেত্রে মোট $\underline{|4} \times \underline{|4}$ প্রকারে মাঝিদের সাজানো যায়। অপর দুই ক্ষেত্রের (অর্থাৎ G ও H-এর এক এক জনকে A, B, C-এর পার্শ্বে রাখিয়া) প্রত্যেক ক্ষেত্রে মাঝিদিগকে মোট $\underline{|4} \times \underline{|4}$ প্রকারে সাজানো যায়।

সুতরাং, মোটের উপর $3 \times \underline{|4} \times \underline{|4} = 3 \times 24 \times 24 = \mathbf{1728}$ প্রকারে মাঝিদিগকে সাজানো যায়।

উদা. 13. n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তুর একযোগে r-সংখ্যক বস্তু লইয়া বিন্যাস-সংখ্যার কতগুলির মধ্যে 3টি নির্দিষ্ট বস্তু সর্বদা থাকিবে ?

প্রথমে n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হইতে উহাদের r-সংখ্যকটি করিয়া লইয়া গঠিত বিভিন্ন সমবায়ে যে সকল সমবায়ে নির্দিষ্ট বস্তু-তিনটি সর্বদাই থাকিবে, তাহাদের সংখ্যা নির্ণয় করা যাক।

নির্দিষ্ট বস্তু-তিনটিকে পৃথক্ করিয়া রাখিয়া অবশিষ্ট $(n-3)$-সংখ্যক বস্তু হইতে সম্ভাব্য সকল প্রকারে $(r-3)$-সংখ্যক বস্তু লইয়া $^{n-3}C_{r-3}$-সংখ্যক সমবায় গঠন করা যায়, দেখা যায় যে, পৃথক্ করিয়া রাখা বস্তু-তিনটিকে এই সকল সমবায়ের প্রত্যেকটির সহিত সংযুক্ত করিলে প্রত্যেক সমবায়ের বস্তু-সংখ্যাও হয় r এবং এই r-সংখ্যক বস্তুর মধ্যে নির্দিষ্ট বস্তু-তিনটি সর্বদাই বর্তমান থাকে।

অতএব, যে সকল সমবায়ে নির্দিষ্ট বস্তু-তিনটি সর্বদাই থাকে তাহাদের সংখ্যা

$$= {}^{n-3}C_{r-3} = \frac{\underline{|n-3}}{\underline{|r-3}\ \underline{|n-r}}.$$

নির্দিষ্ট তিনটি বস্তুসমেত এই r-সংখ্যক বস্তুবিশিষ্ট সমবায়গুলির প্রত্যেকটি হইতে $\underline{|r}$-সংখ্যক বিন্যাস পাওয়া যায় বলিয়া, যে সকল বিন্যাসে নির্দিষ্ট বস্তু তিনটি সর্বদাই বর্তমান থাকে তাহাদের সংখ্যা

$$= \frac{\underline{|n-3}}{\underline{|r-3}\ \underline{|n-r}} \times \underline{|r} = \frac{\underline{|n-3}}{\underline{|n-r}} \times r(r-1)(r-2).$$

প্রশ্নমালা 29

1. $^{50}C_{47}$, $^{27}C_{23}$, $^{40}C_{35}$-এর মান নির্ণয় কর।
2. $^{2n}C_r = {}^{2n}C_{r+2}$ হইলে, r-এর মান নির্ণয় কর। [C. U. 1930]
3. $m = {}^nC_2$ হইলে, প্রমাণ কর যে, $^mC_2 = 3.{}^{n+1}C_4$. [C. U. 1912]
4. $^nP_r = 720$ এবং $^nC_r = 120$ হইলে, n এবং r-এর মান নির্ণয় কর।
5. $^{n-1}C_r : {}^nC_r : {}^{n+1}C_r = 1 : 3 : 8$ হইলে, n এবং r-এর মান নির্ণয় কর।
6. প্রমাণ কর যে, $^nC_r + {}^{n-1}C_{r-1} + {}^{n-1}C_{r-2} = {}^{n+1}C_r$.

7. প্রমাণ কর যে, r-সংখ্যক ক্রমিক সংখ্যার গুণফল সর্বদা $\lfloor r$ দ্বারা বিভাজ্য।

8. কোন প্রশ্নপত্রের 15টি প্রশ্নের মধ্যে 12টির উত্তর করিতে হইবে। একজন পরীক্ষার্থী কতপ্রকারে প্রশ্ন নির্বাচন করিতে পারে?

9. দশজন লোকের মধ্যে চারিজন লোকের একটি দল কতপ্রকারে নির্বাচন করা যাইতে পারে এবং একজন লোক কতবার নির্বাচিত হইতে পারে?

10. একটি ঝুড়িতে 10টি আম আছে। একটি নির্দিষ্ট আম-সহ তিনটি আম তুমি কতবার বাছাই করিতে পার? [C. U. 1921]

11. 15 জন লোকের একটি দল হইতে কোন নির্দিষ্ট 3 জন লোক বাদ দিয়া 9 জন লোকের কতগুলি দল গঠন করিতে পারা যাইবে?

12. টাকায় 3টি দরের 20টি নাশপাতি আছে। 6 টাকার নাশপাতি কিনিতে হইলে, কিভাবে নির্বাচন করা যাইতে পারে এবং এই নির্বাচনের কতগুলির মধ্যে একটি নির্দিষ্ট নাশপাতি থাকিবে?

13. কোন সমতলে 16টি বিন্দু আছে; তাহাদের যে-কোন তিনটি এক সরল রেখায় অবস্থিত নহে। ঐ বিন্দুগুলি সংযুক্ত করিয়া কতগুলি সরল রেখা পাওয়া যাইতে পারে? [C. U. 1909]

14. n-সংখ্যক ভুজবিশিষ্ট ক্ষেত্রে কতগুলি কর্ণ অঙ্কিত হইতে পারে? এ-ক্ষেত্রটির শীর্ষবিন্দুগুলি সংযুক্ত করিয়া কতগুলি ত্রিভুজ উৎপন্ন করা যাইতে পারে?

15. কোন সমতলে n-সংখ্যক বিন্দু আছে; তন্মধ্যে m-সংখ্যক বিন্দু ব্যতীত অপর যে-কোন তিনটি বিন্দু এক সরল রেখায় অবস্থিত নহে। ঐ বিন্দুগুলি সংযুক্ত করিয়া যতগুলি (i) বিভিন্ন সরল রেখা, (ii) বিভিন্ন ত্রিভুজ উৎপন্ন করা যাইতে পারে, তাহাদের সংখ্যা নির্ণয় কর। [C. U. 1928]

16. 2 জন মুসলমান এবং অবশিষ্ট হিন্দু—মোট 23 জন কর্মপ্রার্থীদের মধ্য হইতে 20 জন কেরানী নিযুক্ত হইবে। যাহাতে কোন মুসলমানপ্রার্থী বাদ না যায়, এরূপ কতপ্রকারে প্রার্থী নির্বাচন করা যাইতে পারে?

17. কোন নির্বাচনে 5 জন প্রার্থীর মধ্যে 3 জন নির্বাচিত হইবে। একজন ভোটদাতা নির্বাচিত প্রার্থিসংখ্যা অপেক্ষা অনধিক যে-কোন সংখ্যক প্রার্থীকে ভোট দিতে পারেন। একজন ভোটদাতা কতপ্রকারে ভোট দিতে পারেন?

[C. U. 1935]

18. কোন পৌরপ্রতিষ্ঠানে (Municipal Corporation) 20 জন কাউন্সিলর (Councillor) এবং 5 জন অল্ডারম্যান (Alderman) আছেন। তন্মধ্যে 6 জন কাউন্সিলর ও 3 জন অল্ডারম্যান লইয়া কতগুলি সমিতি (Committee) গঠন করা যাইতে পারে? [C. U. 1923, '31, '33]

19. ইংরেজী বর্ণমালার অক্ষরের প্রত্যেক ক্ষেত্রে 2টি স্বরবর্ণ লইয়া 6টি বর্ণের কতগুলি সমবায় (combination) গঠন করা যাইতে পারে ?

20. 7 জন ভদ্রলোক এবং 4 জন মহিলা হইতে, 5 জন সভ্যের একটি সমিতি গঠন করা হইবে। যদি সমিতিতে অন্ততঃপক্ষে একজন মহিলার অন্তর্ভুক্তি বাধ্যতামূলক হয়, তাহা হইলে কতপ্রকারে সমিতি গঠন করা যাইতে পারিবে ?
[C. U. 1948]

21. একটি নূতন মহাবিদ্যালয়ে 8 জন অধ্যাপকের পদ খালি আছে; 3 জন D.Sc. এবং 12 জন M.Sc. অধ্যাপক-পদ-প্রার্থী। (i) সব কয়জন D.Sc.-কে লইয়া, (ii) অন্ততঃপক্ষে একজন D.Sc.-কে লইয়া কতপ্রকারে অধ্যাপক নির্বাচন করা যাইতে পারে ?

22. 15টি বালকের মধ্যে 7 জন স্কাউট (Scout)-এর অন্তর্ভুক্ত। (i) মাত্র 6 জন স্কাউটের বালক লইয়া এবং (ii) অন্ততঃপক্ষে 6 জন স্কাউটের বালক লইয়া কতপ্রকারে 12টি বালককে নির্বাচন করা যাইতে পারে ? [C. U. 1943]

23. 6 জন খেলোয়াড়ের এবং 8 জন খেলোয়াড়ের দুইটি দল হইতে 11 জন খেলোয়াড়ের একটি দল গঠন করিতে হইবে। যদি 6 জন খেলোয়াড়ের দল হইতে 4 জনের কম খেলোয়াড় লওয়া না হয়, তবে কতপ্রকারে খেলোয়াড় নির্বাচন করা যাইতে পারে ? [C. U. 1938]

24. কোন এক পরিষদে একজন সভাপতি, দুইজন সহ-সভাপতি এবং দ্বাদশজন অপর সভ্য আছেন। যদি সমিতিতে (Committee) সভাপতির এবং একজন সহ-সভাপতির থাকা বাধ্যতামূলক হয়, তাহা হইলে, তাঁহাদিগকে লইয়া 6 জনের একটি সমিতি কতপ্রকারে নির্বাচন করিতে পারা যাইবে ? [C. U. 1914]

25. পৌরসভার 20 জন কমিশনারের মধ্যে 15 জন হিন্দু ও 5 জন মুসলমান। তাঁহাদের মধ্য হইতে 5 জন হিন্দু ও 2 জন মুসলমান কমিশনার লইয়া কতপ্রকারে একটি 7 জনের সমিতি গঠিত হইতে পারে ? এইরূপ সমিতির কতগুলি হইতে একজন নির্দিষ্ট হিন্দু কমিশনার বাদ পড়িয়া যাইবেন ?

26. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 চিহ্নিত আটটি কাউন্টার (counter)-এর একযোগে চারিটি করিয়া লইয়া কতগুলি সমবায় গঠন করা যাইতে পারে, যাহাতে অন্ততঃপক্ষে একটি অযুগ্ম ও একটি যুগ্ম অঙ্ক দ্বারা চিহ্নিত কাউন্টার থাকিবে ? [C. U 1941]

27. 17টি বিভিন্ন ব্যঞ্জনবর্ণ ও 5টি বিভিন্ন স্বরবর্ণের 3টি ব্যঞ্জনবর্ণ ও 2টি স্বরবর্ণ লইয়া কতগুলি শব্দ গঠন করা যাইতে পারে ? [C. U. 1939]

28. 8টি বিভিন্ন ব্যঞ্জনবর্ণ ও 4টি বিভিন্ন স্বরবর্ণের দুইটি বিভিন্ন ব্যঞ্জনবর্ণ ও একটি স্বরবর্ণ লইয়া কতগুলি শব্দ গঠন করা যাইতে পারে, যাহাতে স্বরবর্ণটি ব্যঞ্জনবর্ণদ্বয়ের মাঝখানে বসে ?

29. প্রমাণ কর যে, a, b, c, d, e, f অক্ষরগুলির অন্ততঃপক্ষে একটি স্বরবর্ণ-সংবলিত তিনটি অক্ষরে গঠিত শব্দের সংখ্যা 96.

30. *Centrifugal* শব্দটির অক্ষরসমূহের একযোগে 6টি অক্ষর লইয়া শব্দ গঠন করিলে, কতগুলিতে c, t, f অক্ষরত্রয় থাকিবে ?

31. একখানি সাহিত্য-বিষয়ক পুস্তকের 37 খানা এবং একখানি গণিত-পুস্তকের 35 খানা আছে। যদি গণিত-পুস্তকের দুইখানা একত্র না থাকে, তাহা হইলে পুস্তকগুলিকে একখানির উপর আর একখানি করিয়া একটি স্তম্ভে কতপ্রকারে সাজানো যাইতে পারে ?

32. একখানি নৌকার 10 জন মাঝির 3 জন মাত্র একদিকে এবং 2 জন মাত্র অপরদিকে দাঁড় টানিতে পারে। মাঝিদের কতপ্রকারে সাজানো যাইতে পারে ?

8·7. ^nC_r-এর চরম মান।

r-এর মান কত হইলে, n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হইতে উহাদের r-সংখ্যকটি করিয়া লইয়া গঠিত সমবায়সমূহের সংখ্যা বৃহত্তম হইবে, তাহা নির্ণয় করিতে হইবে।

আমরা জানি,

$$^nC_r = \frac{n(n-1)(n-2)\ \ (n-r+2)(n-r+1)}{r(r-1)(r-2)\cdots\cdots 3.2.1}$$

এবং $$^nC_{r-1} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+2)}{(r-1)(r-2)\cdots 3.2.1};$$

$$\therefore\ \frac{^nC_r}{^nC_{r-1}} = \frac{n-r+1}{r} = \frac{n+1}{r} - 1. \quad \cdots \quad (1)$$

অতএব, n একটি ধনাত্মক পূর্ণরাশি হইলে, n-এর মান বৃদ্ধির সহিত $\frac{n+1}{r}-1$-এর মান হ্রাস পাইবে, r-এর মান হ্রাসপ্রাপ্ত হইলে, $\frac{n+1}{r}-1$-এর মান বৃদ্ধি পাইবে। r-এর কোন নির্দিষ্ট মানের জন্য, $\frac{n+1}{r}-1$-এর মান যেন k, তাহা হইলে, ঐ নির্দিষ্ট মান অপেক্ষা r-এর সমস্ত ক্ষুদ্রতর মানের জন্যই $\frac{n+1}{r}-1 > k$, এবং r-এর উচ্চতর সমস্ত মানের জন্য $\frac{n+1}{r}-1 < k$.

ধরা যাক r-এর কোন নির্দিষ্ট মানের জন্য

$$\frac{n+1}{r} - 1 > 1. \quad \cdots \quad \cdots \quad (2)$$

r-এর ক্ষুদ্রতর সমস্ত মানের জন্যই $\frac{n+1}{r}-1$ মানটি 1 অপেক্ষা আরও বৃহত্তর।

সুতরাং, (1) হইতে, $\frac{^nC_r}{^nC_{r-1}} > 1, \frac{^nC_{r-1}}{^nC_{r-2}} > 1, \frac{^nC_{r-2}}{^nC_{r-3}} > 1 \cdots\cdots$;

অর্থাৎ, $^nC_r > {^nC_{r-1}} > {^nC_{r-2}} > {^nC_{r-3}} >$ ... ... (A)

এইরূপে, যদি r-এর যে-কোন মানের জন্য $^nC_r > {^nC_{r-1}}$ হয়, তাহা হইলে ইহা $^nC_{r-2}, {^nC_{r-3}}, \ldots\ldots$ অপেক্ষাও বৃহত্তর হইবে।

ঐরূপে, r-এর কোন নির্দিষ্ট মানের জন্য যদি $\frac{n+1}{r}-1<1$ হয়, তাহা হইলে ঐ নির্দিষ্ট মান অপেক্ষা r-এর সকল বৃহত্তর মানের জন্যই $\frac{n+1}{r}-1$-এর মান 1 অপেক্ষা আরও ক্ষুদ্রতর হইবে।

অতএব, (1) হইতে, $\frac{^nC_r}{^nC_{r-1}} < 1, \frac{^nC_{r+1}}{^nC_r} < 1, \frac{^nC_{r+2}}{^nC_{r+1}} < 1, \cdots\cdots$;

অর্থাৎ, $^nC_{r-1} > {^nC_r} > {^nC_{r+1}} > {^nC_{r+2}} >$ ... ... (B)

এইরূপে, দেখা যায় যে, পরবর্তী সমবায়গুলির মান ক্রমশঃ হ্রাসপ্রাপ্ত হয়।

(A) এবং (B) হইতে, ইহা স্পষ্ট যে, r-এর মান 1 হইতে n পর্যন্ত বৃদ্ধিপ্রাপ্ত হইলে, যে পর্যন্ত না $\frac{n+1}{r}-1$-এর মান 1 হইতে ক্ষুদ্রতর হয়, সেই পর্যন্ত ^nC_r-এর মান ক্রমান্বয়ে বৃদ্ধিপ্রাপ্ত হইতে থাকে, এবং তাহার পর হইতে ক্রমান্বয়ে হ্রাসপ্রাপ্ত হইতে থাকে।

$\therefore$ ^nC_r বৃহত্তম হইবে, যখন $\frac{n+1}{r}-1$ হয় 1 অপেক্ষা ঠিক বৃহত্তর অথবা 1-এর সমান ;

অথবা, $\frac{n+1}{r}$ হয় 2 অপেক্ষা ঠিক বৃহত্তর অথবা 2-এর সমান ;

অথবা, $n+1$ হয় $2r$ অপেক্ষা ঠিক বৃহত্তর অথবা $2r$-এর সমান ;

অথবা, r হয় $\frac{1}{2}(n+1)$ অপেক্ষা ঠিক ক্ষুদ্রতর বা $\frac{1}{2}(n+1)$-এর ঠিক সমান ... ... (3)

n যুগ্ম বা অযুগ্ম ধনাত্মক পূর্ণরাশি হইলে, r-এর মান কিরূপ দাঁড়ায় দেখা যাক।

(ক) n যুগ্ম ধনাত্মক পূর্ণরাশি হইলে, মনে কর, $n=2m$, তাহা হইলে (3) হইতে পাওয়া যায় যে, ^nC_r বৃহত্তম হইবে, যখন r, $\frac{1}{2}(2m+1)$ অপেক্ষা ঠিক ক্ষুদ্রতর বা $\frac{1}{2}(2m+1)$-এর সমান। কিন্তু r একটি ধনাত্মক পূর্ণরাশি বলিয়া, ইহা $m+\frac{1}{2}$-এর

সমান হইতে পারে না ; অতএব $m+\frac{1}{2}$ অপেক্ষা ঠিক ক্ষুদ্রতর পূর্ণসংখ্যা m-এর সমান হইবে ; অতএব,

$r=m$ অর্থাৎ $\frac{n}{2}$ হইলেই, ^nC_r বৃহত্তম হইবে।

(খ) n অযুগ্ম ধনাত্মক পূর্ণরাশি হইলে, মনে কর, $n=2m+1$, অতএব, (3) হইতে পাওয়া যায় যে, ^nC_r বৃহত্তম হইবে, যখন r, $\frac{1}{2}(2m+1+1)$ অর্থাৎ $(m+1)$ অপেক্ষা ঠিক ক্ষুদ্রতর অথবা $(m+1)$-এর সমান। $(m+1)$ অপেক্ষা ঠিক ক্ষুদ্রতর পূর্ণরাশি m. অতএব,

$r=m$ বা $m+1$ অর্থাৎ $\frac{n-1}{2}$ অথবা $\frac{n+1}{2}$ হইলে, ^nC_r বৃহত্তম হইবে।

n অযুগ্ম হইলে, $^nC_{\frac{n+1}{2}}$ এবং $^nC_{\frac{n-1}{2}}$-ই ^nC_r-এর চরম মান হইবে। কেননা উভয়ই পূরক সমবায়।

প্রশ্নমালা 30

1. *Pantheism* শব্দটির কয়টি অক্ষর লইয়া গঠিত সমবায়সমূহের সংখ্যা বৃহত্তম হইবে ? এই সমবায়সমূহের কতগুলির মধ্যে p ও m থাকিবে ?

2. একজন লোক তাহার 20 জন বন্ধুকে লইয়া, প্রত্যেক দলে একই সংখ্যক বন্ধু থাকে এরূপ যতগুলি দল গঠন করা সম্ভব, ততগুলি দল গঠন করিয়া খাওয়াইতে ইচ্ছুক। সে কতজন বন্ধুকে একবারে নিমন্ত্রণ করিবে ? এই দলসমূহের কতগুলিতে একই লোককে দেখিতে পাওয়া যাইবে ?

3. *Barouche* শব্দটির অক্ষরসমূহ হইতে, প্রত্যেক সমবায়ে একই সংখ্যক অক্ষর থাকিবে, এরূপ সমবায়ের বৃহত্তম সংখ্যা নির্ণয় কর। এরূপ সমবায়ের কতকগুলিতে c থাকিবে ?

4. প্রমাণ কর যে, $^{2n}C_r$ এবং $^{2n-1}C_r$-এর বৃহত্তম মানের অনুপাত $2:1$.

(গ) জটিল বিন্যাস ও সমবায়

8·8. সবগুলি বিভিন্ন নহে এরূপ বস্তুসমূহের বিন্যাস।

সবগুলি বিভিন্ন নহে এরূপ n-সংখ্যক বস্তুর সবগুলি লইয়া বিন্যাস গঠন করিলে যে বিন্যাসগুলি পাওয়া যাইবে তাহাদের সংখ্যা নির্ণয়।
[*To find the number of permutations of* **n** *things, taken all together,* **when the things are not all different.**]

n-সংখ্যক বস্তুকে n-সংখ্যক অক্ষর দ্বারা সূচিত করা হইল ; এই সকল অক্ষরের p-সংখ্যকটি a, q-সংখ্যকটি b, r-সংখ্যকটি যেন c এবং অবশিষ্ট অক্ষরগুলির সবগুলি যেন পরস্পর বিভিন্ন।

ধরা গেল, নির্ণেয় বিন্যাস-সংখ্যা x.

বিন্যাসগুলির প্রত্যেকটিতেই p-সংখ্যক a আছে। ইহাদের প্রত্যেকটিতে, এই p-সংখ্যক a-এর স্থানে যদি অবশিষ্ট অন্য সকল অক্ষর ও পরস্পর হইতে ভিন্ন p-সংখ্যক নূতন অক্ষর থাকিত তবে অন্য অক্ষরসকলের স্থান আদৌ পরিবর্তন না করিয়া, এই নূতন p-সংখ্যক বিভিন্ন অক্ষরের সব কয়টিকে লইয়া $|\underline{p}$-সংখ্যক বিন্যাস পাওয়া যাইত। ফলে ঐরূপ প্রত্যেকটি বিন্যাস হইতে $|\underline{p}$-সংখ্যক বিভিন্ন বিন্যাস পাওয়া যাইত। এইভাবে x-সংখ্যক বিন্যাসের প্রত্যেকটিতে এইরূপ পরিবর্তন ও বিন্যাস-গঠন করিলে, x-সংখ্যক বিন্যাস হইতে মোট $x \times |\underline{p}$-সংখ্যক নূতন বিন্যাস পাওয়া যাইত।

আবার, এই $x \times |\underline{p}$-সংখ্যক নূতন বিন্যাসগুলির প্রতিটিতে q-সংখ্যক b-অক্ষরের স্থানে যদি অবশিষ্ট অন্য সকল অক্ষর এবং পরস্পরও হইতে ভিন্ন q-সংখ্যক নূতন অক্ষর থাকিত, তবে বিন্যাসটির অন্য অক্ষরসকলের স্থান আদৌ পরিবর্তন না করিয়া, এই নূতন q-সংখ্যক বিভিন্ন অক্ষরের সব কয়টিকে লইয়া $|\underline{q}$-সংখ্যক বিভিন্ন বিন্যাস পাওয়া যাইত। $x \times |\underline{p}$-সংখ্যক বিন্যাসগুলির যে-কোনটি হইতেই, এইরূপ পরিবর্তন ও বিন্যাস-গঠন দ্বারা $|\underline{q}$-সংখ্যক বিভিন্ন বিন্যাস পাওয়া যাইত বলিয়া, $x \times |\underline{p}$-সংখ্যক বিন্যাস হইতে মোট $x \times |\underline{p} \times |\underline{q}$-সংখ্যক নূতন বিন্যাস পাওয়া যাইত।

অনুরূপে, এই $x \times |\underline{p} \times |\underline{q}$-সংখ্যক নূতন বিন্যাসগুলির প্রত্যেকটিতে r-সংখ্যক c অক্ষরের স্থানে যদি অবশিষ্ট অন্য সকল অক্ষর ও পরস্পর হইতে ভিন্ন r-সংখ্যক নূতন অক্ষর থাকিত তবে এই r-সংখ্যক বিভিন্ন অক্ষরের মধ্যে বিন্যাস রচনা করিলে, মোট $x \times |\underline{p} \times |\underline{q} \times |\underline{r}$-সংখ্যক নূতন বিন্যাস পাওয়া যাইত। সেক্ষেত্রে ঐ বিন্যাসগুলির প্রত্যেকটিতে n-সংখ্যক পরস্পর ভিন্ন অক্ষর থাকিত।

তাহা হইলে দেখা গেল যে, পরস্পর ভিন্ন n-সংখ্যক অক্ষরগুলি লইয়া বিন্যাস রচনা করিলে মোট বিন্যাস-সংখ্যা হয়, $x \times |\underline{p} \times |\underline{q} \times |\underline{r}$. আবার, আমরা জানি, n-সংখ্যক বিভিন্ন অক্ষরগুলির সবগুলি লইয়া বিন্যাস রচনা করিলে বিন্যাস-সংখ্যা হয় $|\underline{n}$.

$$\therefore \quad x \times |\underline{p} \times |\underline{q} \times |\underline{r} = |\underline{n}\,; \quad \therefore \quad x = \frac{|\underline{n}}{|\underline{p}\,|\underline{q}\,|\underline{r}}.$$

দ্রষ্টব্য : প্রক্রিয়াটি সম্পূর্ণ সাধারণ ; a, b, c-এর ন্যায় তিন-এর অধিক-সংখ্যক বস্তুর প্রত্যেকটি একাধিক করিয়া থাকিলেও বিন্যাস-সংখ্যা-নির্ণয়ে উপরের সূত্রটি প্রযোজ্য।

8·9. পুনরাবৃত্তি-ঘটিত বিন্যাস।

n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হইতে r-সংখ্যকটি লইয়া বিন্যাস রচনা করিলে এবং প্রতিটি বিন্যাসে উক্ত n-সংখ্যক বস্তুর প্রত্যেকটিরই একবার, দুইবার, r-সংখ্যকবার পর্যন্ত থাকা সম্ভব হইলে, যে বিন্যাসগুলি গঠিত হইবে, তাহাদের সংখ্যা নির্ণয়। (*To find the number of permutations of n different things taken r at a time, when each may occur once, twice up to r times in any permutation.*]

n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তুকে n-সংখ্যক বিভিন্ন অক্ষর দ্বারা সূচিত করা হইল। বিন্যাসগুলির প্রত্যেকটিতে বস্তুগুলির প্রত্যেকটি এক, দুই, ... অথবা r-সংখ্যকবার থাকিতে পারে বলিয়া উক্ত r-সংখ্যক অক্ষরের প্রত্যেকটি একবার, দুইবার, ··· r-সংখ্যকবার আছে। এখন, r-সংখ্যকটি লইয়া বিন্যাস-রচনা আর উহাদের দ্বারা r-সংখ্যকটি স্থান পূর্ণ করা একই কথা।

n-সংখ্যক বিভিন্ন অক্ষরের যে-কোনটিকেই প্রথম স্থানে রাখা যাইতে পারে বলিয়া প্রথম স্থানটি **n-সংখ্যক** বিভিন্ন উপায়ে পূর্ণ করা যাইতে পারে। এই n-সংখ্যক বিভিন্ন উপায়ের যে-কোন এক উপায়ে প্রথম স্থানটিকে পূর্ণ করিবার পরে দ্বিতীয় স্থানটিকেও **n-সংখ্যক** বিভিন্ন উপায়ে পূর্ণ করা যাইতে পারে, কারণ যে অক্ষরটিকে প্রথম স্থানে বসানো হইয়াছে তাহার আরও অন্ততঃ $(r-1)$-সংখ্যকটি অবশিষ্ট আছে বলিয়া তাহাকেও পুনরায় দ্বিতীয় স্থানে বসানো যায়। অতএব, প্রথম স্থান পূর্ণ করিবার প্রত্যেক উপায়ের সহিত দ্বিতীয় স্থান পূর্ণ করিবার প্রত্যেকটি উপায়কে সংযুক্ত করা যায় বলিয়া, প্রথম দুইটি স্থান $\mathbf{n \times n}$ বা $\mathbf{n^2}$-সংখ্যক বিভিন্ন উপায়ে পূর্ণ করা যাইতে পারে। এইরূপে প্রথম তিনটি স্থান $\mathbf{n^3}$-সংখ্যক বিভিন্ন উপায়ে পূর্ণ করা যায়। যত-সংখ্যক স্থান পূর্ণ করা হয়, n-এর সূচকও সেই সংখ্যা ইহা লক্ষ্য রাখিয়া, এইরূপে অগ্রসর হইলে, স্পষ্টই দেখা যাইতেছে যে, যে সকল বিভিন্ন উপায়ে r-সংখ্যক স্থান পূর্ণ করা যাইতে পারে তাহাদের সংখ্যা $\mathbf{n^r}$. অতএব, নির্ণেয় বিন্যাস-সংখ্যা $= \mathbf{n^r}$.

উদা. 1. *Constantinople* শব্দটির অক্ষরসমূহ একযোগে লইয়া কতগুলি শব্দ গঠন করা যায়? উহাদের কতগুলির মধ্যে n তিনটি পর পর বসিবে?

প্রদত্ত শব্দে মোট 14টি অক্ষর আছে এবং ইহাদের মধ্যে 2টি o, 3টি n, 2টি t এবং অবশিষ্ট 7টি পরস্পর ভিন্ন।

$$\therefore \text{ নির্ণেয় শব্দ-সংখ্যা} = \frac{\lfloor 14}{\lfloor 2 \lfloor 3 \lfloor 2} = 14.13.12.11.10.9.8.7.6.5$$

$$= \mathbf{3632428800}.$$

3টি n সর্বদাই পাশাপাশি থাকিলে, উহাদিগকে একটি অক্ষর মনে করিয়া বিন্যাস রচনা করিলে, নির্ণেয় শব্দ-সংখ্যা পাওয়া যাইবে। অতএব, এক্ষেত্রে মোট অক্ষর-সংখ্যা হইবে 12 এবং ইহাদের মধ্যে 2টি o এবং 2টি t.

$$\therefore \text{ নির্ণেয় শব্দ-সংখ্যা} = \frac{\lfloor 12}{\lfloor 2 \lfloor 2} = 12.11.10.9.8.7.6.5.3.2 = \mathbf{119750400.}$$

উদা. 2. 15টি নৌকাচালন-সঙ্ঘের (Rowing Club) দুইটির প্রত্যেকের তিনখানি, অপর পাঁচটির প্রত্যেকের দুইখানি এবং অবশিষ্ট আটটির একখানি করিয়া নৌকা নদীতে আছে। এই 24খানি নৌকা লইয়া কতগুলি তালিকা রচনা করিতে পারা যাইবে, যাহাতে একটি সঙ্ঘের দ্বিতীয় নৌকা প্রথম নৌকার পরে বা তৃতীয় নৌকা প্রথম ও দ্বিতীয় নৌকার পরে থাকিবেই ?

প্রদত্ত শর্তানুসারে, মোট যতগুলি তালিকা রচনা করা সম্ভব তাহাদের সংখ্যা-জ্ঞাপক রাশিকে x দ্বারা সূচিত করা হইল। এখন, পনেরটি সঙ্ঘকে $a_1, a_2, \cdots, a_{15}$ দ্বারা সূচিত করিয়া, ধরা যাক, a_1 এবং a_2 সঙ্ঘের প্রত্যেকের তিনখানি করিয়া নৌকা আছে, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7 সঙ্ঘগুলির প্রত্যেকের দুইখানি করিয়া নৌকা আছে এবং অন্যান্য সঙ্ঘগুলির প্রত্যেকের একখানি করিয়া নৌকা আছে।

প্রদত্ত শর্তানুসারে তালিকা প্রস্তুত করিলে দেখা যায় যে, কোন তালিকাতেই a_1, a_2 প্রভৃতি কোন সঙ্ঘেরই স্ব স্ব নৌকাগুলির মধ্যে পরস্পর স্থান-বিনিময় করাইয়া নূতন বিন্যাস রচনা করা সম্ভব নহে কেননা প্রত্যেকটি সঙ্ঘের নৌকাগুলি পরস্পর বিভিন্ন নহে, যদিও তাহারা অন্য সব সঙ্ঘের সকল নৌকা হইতে বিভিন্ন। কাজেই 24 খানা নৌকার মধ্যে a_1 সঙ্ঘের নৌকা তিনখানি একই, কিন্তু অন্য সঙ্ঘগুলির নৌকাগুলি হইতে ভিন্ন ; a_2 সঙ্ঘের নৌকা তিনখানি একই, কিন্তু অন্য সঙ্ঘগুলির নৌকাগুলি হইতে ভিন্ন ; এইরূপ, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7 সঙ্ঘের প্রত্যেকটির দুইখানি নৌকা পরস্পর অভিন্ন, কিন্তু অন্য সবগুলি হইতে ভিন্ন ; এবং বাকী আটটি সঙ্ঘের প্রত্যেকটির এক-একখানি নৌকা পরস্পর এবং অন্যান্য সবগুলি হইতে ভিন্ন। অতএব,

$$x = \frac{\lfloor 24}{(\lfloor 3)^2 (\lfloor 2)^5}.$$

উদা. 3. *multiple* শব্দটির অক্ষরগুলির (1) স্বরবর্ণের ক্রম-পরিবর্তন না করিয়া, (2) স্বরবর্ণগুলির স্থান নির্দিষ্ট রাখিয়া, (3) ব্যঞ্জনবর্ণ ও স্বরবর্ণের আপেক্ষিক অবস্থানের পরিবর্তন না করিয়া, কতপ্রকারে পুনর্বিন্যাস করা যাইতে পারে ?

(1) এস্থলে, প্রদত্ত শর্তানুসারে গঠিত বিন্যাসসমূহের কোনটিতেই স্বরবর্ণক্রম পরিবর্তন নিষিদ্ধ বলিয়া স্বরবর্ণ-তিনটির স্থান পরস্পর বিনিময় করাইয়া নূতন বিন্যাস রচনা করা সম্ভব নহে। অতএব, এক্ষেত্রে পরস্পর বিভিন্ন স্বরবর্ণ-তিনটিকে কার্যত

একই এবং পরস্পর অভিন্ন মনে করা যাইতে পারে। তাহা হইলে, মোট 8টি অক্ষরের 2টি l এবং কার্যত অভিন্ন বিবেচ্য 3টি স্বরবর্ণ;

$$\therefore \text{ মোট বিন্যাস-সংখ্যা} = \frac{\lfloor 8}{\lfloor 3 \, \lfloor 2} = 8.7.6.5.2 = 3360.$$

কিন্তু প্রদত্ত *multiple* শব্দটিই একটি বিন্যাস বলিয়া, পুনর্বিন্যাস-সংখ্যা = 3360 − 1 = **3359.**

(2) স্বরবর্ণ-তিনটির স্থান অপরিবর্তিত থাকিবে বলিয়া এক্ষেত্রে 2টি l-যুক্ত, 5টি ব্যঞ্জনবর্ণ লইয়া বিন্যাস গঠন করিতে হইবে।

$$\therefore \text{ মোট বিন্যাস-সংখ্যা} = \frac{\lfloor 5}{\lfloor 2} = 60.$$

$$\therefore \text{ নির্ণেয় পুনর্বিন্যাস-সংখ্যা} = 60 - 1 = \mathbf{59}.$$

(3) বিন্যাসগুলিতে স্বরবর্ণ এবং ব্যঞ্জনবর্ণের আপেক্ষিক অবস্থান সর্বদাই পূর্ববৎ অর্থাৎ প্রথমে 'multiple' শব্দটিতে যেমন প্রথম, তৃতীয়, চতুর্থ, ষষ্ঠ ও সপ্তম স্থানে ব্যঞ্জনবর্ণ এবং দ্বিতীয়, পঞ্চম ও অষ্টম স্থানে স্বরবর্ণ ছিল সেইরূপই থাকিবে।

এখন, স্বরবর্ণ-তিনটিকে উক্ত নির্দিষ্ট স্থান তিনটিতে $\lfloor 3$ বিভিন্ন উপায়ে রাখা যায় এবং ব্যঞ্জনবর্ণ 5টির মধ্যে 2টি l বলিয়া উহাদিগকে উক্ত নির্দিষ্ট 5টি স্থানে $\frac{\lfloor 5}{\lfloor 2}$ বিভিন্ন উপায়ে রাখা যায়। সুতরাং স্বরবর্ণ-তিনটির বিন্যাসের $\lfloor 3$ বিভিন্ন উপায়ের প্রত্যেকটির সহিত ব্যঞ্জনবর্ণ 5টির বিন্যাসের $\frac{\lfloor 5}{\lfloor 2}$ বিভিন্ন উপায়ের প্রত্যেকটি সংযুক্ত করা যায় বলিয়া মোট বিন্যাস-সংখ্যা হইবে $\lfloor 3 \times \frac{\lfloor 5}{\lfloor 2} = 360$;

$$\therefore \text{ নির্ণেয় মোট পুনর্বিন্যাস-সংখ্যা} = 360 - 1 = \mathbf{359}.$$

উদা. 4. 2, 3, 0, 3, 4, 2, 3 অঙ্কগুলির সাহায্যে নিযুত (million) অপেক্ষা বৃহত্তর কতগুলি সংখ্যা গঠন করা যাইতে পারে?

সংখ্যাগুলি এক নিযুত অপেক্ষা বৃহত্তর বলিয়া, উহাদের প্রত্যেকটিই সাত অথবা সাতের অধিক অঙ্কবিশিষ্ট হইবে। কিন্তু সাতটি অঙ্ক দেওয়া আছে; অতএব সবগুলি অঙ্ক লইয়াই সংখ্যা গঠন করিতে হইবে।

এখন, অঙ্কগুলির মোট সংখ্যা 7 এবং ইহাদের মধ্যে দুইটি 2 ও তিনটি 3 আছে; সুতরাং, অঙ্কগুলির সবগুলি লইয়া গঠিত মোট বিন্যাস-সংখ্যা $= \frac{\lfloor 7}{\lfloor 2 \, \lfloor 3} = 420.$

এই 420টি বিন্যাসের কতকগুলির আদিতে 0 আছে ; ইহারা নিযুত অপেক্ষা বৃহত্তর সংখ্যা নহে বলিয়া ইহাদিগকে বাদ দিতে হইবে। বাকী 6টি অঙ্কের দুইটি 2 এবং তিনটি 3.

∴ যে সকল বিন্যাসের আদিতে 0 আছে তাহাদের সংখ্যা

$$=\frac{\lfloor 6}{\lfloor 2\,\lfloor 3}=60.$$

∴ নির্ণেয় এক নিযুত অপেক্ষা বৃহত্তর সংখ্যাগুলির সংখ্যা

$$=420-60=\mathbf{360}.$$

উদা. 5. *arrange* শব্দটির অক্ষরসমূহকে কতপ্রকারে সাজানো যাইতে পারে ?

(a) যদি r দুইটির একত্র না থাকা বাধ্যতামূলক,

(b) যদি r দুইটি এবং a দুইটির একত্র না থাকা বাধ্যতামূলক হয়,

তাহা হইলে কতপ্রকারে উহাদিগকে সাজানো যাইতে পারে ?

এস্থলে মোট 7টি অক্ষরের মধ্যে 2টি a, 2টি r এবং বাকী অক্ষরগুলি পরস্পর এবং অন্য সকল অক্ষর হইতে ভিন্ন।

∴ এই 7টির বিন্যাস-সংখ্যা $=\frac{\lfloor 7}{\lfloor 2\,\lfloor 2}=7.6.5.2.3=\mathbf{1260}.$

(a) r দুইটিকে বন্ধনীভুক্ত করিয়া একটি অক্ষর মনে করিলে অক্ষরগুলি হইল a, (rr), a, n, g, e ; ইহাদের সংখ্যা 6 এবং 6টির মধ্যে দুইটি a.

∴ যে সকল বিন্যাসে দুইটি r একত্র থাকে তাহাদের সংখ্যা

$$=\frac{\lfloor 6}{\lfloor 2}=6.5.4.3=360.$$

∴ যে সকল বিন্যাসে দুইটি r একত্র নাই তাহাদের সংখ্যা

$$=1260-360=\mathbf{900}.$$

(b) *arrange* শব্দটির সবগুলি অক্ষর লইয়া বিন্যাস রচনা করিলে যে 1260টি বিন্যাস পাওয়া যায় তাহাদিগকে নিম্নে বর্ণিত চারিভাগে ভাগ করিয়া রাখা যায় :

(i) দুইটি r অথবা দুইটি a কখনই পাশাপাশি থাকিবে না, এইরূপ বিন্যাসসমূহের সংখ্যা যেন N.

(ii) দুইটি r-ও পাশাপাশি থাকিবে, দুইটি a-ও পাশাপাশি থাকিবে, এইরূপ বিন্যাসসমূহের সংখ্যা যেন l ;

(iii) কেবলমাত্র দুইটি r পাশাপাশি থাকিবে, কিন্তু দুইটি a পাশাপাশি থাকিবে না, এইরূপ বিন্যাসসমূহের সংখ্যা যেন m ;

(iv) কেবলমাত্র দুইটি a পাশাপাশি থাকিবে, কিন্তু দুইটি r পাশাপাশি থাকিবে না, এইরূপ বিন্যাসসমূহের সংখ্যা যেন n.

তাহা হইলে, $N+l+m+n=1260$,

বা, $N=1260-(l+m+n)$.

দুইটি r-কে এবং দুইটি a-কে বন্ধনীভুক্ত করিয়া সকল অক্ষর হইতে ভিন্ন অক্ষর মনে করিলে, $(aa), (rr), n, g, e$ এই পাঁচটি বিভিন্ন অক্ষর পাওয়া যায়, তাহাদের সবগুলিকে লইয়া গঠিত বিন্যাস-সংখ্যার সমান।

$\therefore \quad l=\lfloor 5 = 120.$ ... ... (1)

$l+m=$ যে সকল বিন্যাসে 2টি r পাশাপাশি থাকে, তাহাদের সংখ্যা

= 2টি r-কে বন্ধনীভুক্ত করিয়া অন্য সকল অক্ষর হইতে ভিন্ন একটি অক্ষর মনে করিলে, $a, (rr), a, n, g, e$ এই ছয়টি অক্ষর পাওয়া যায়, তাহাদের সবগুলি লইয়া গঠিত বিন্যাসসমূহের সংখ্যা

$=\dfrac{\lfloor 6}{\lfloor 2}=6.5.4.3=360.$ ... ... (2)

এইরূপে, $l+n=360.$ ... ... (3)

(2) ও (3)-এর যোগফল হইতে (1) বিয়োগ করিয়া,

$\therefore \quad l+m+n=(l+m)+(l+n)-l$

$=360+360-120=600.$

$\therefore \quad N=1260-(l+m+n)=1260-600=\mathbf{660}.$

উদা. 6. যদি n-সংখ্যক ব্যক্তিকে দেওয়ার জন্য x-সংখ্যক বস্তু থাকে, তবে দেখাও যে, মোট যত বিভিন্ন প্রকারে তাহাদিগকে দেওয়া যায়, তাহার সংখ্যা n^x ?

x-সংখ্যক জিনিসের যে-কোন একটি জিনিস n-সংখ্যক বিভিন্ন উপায়ে লোকগুলিকে দেওয়া যায়; কারণ n-সংখ্যক লোকের যে-কোন জনকেই জিনিসটি দেওয়া যায়। এই জিনিসটি n-সংখ্যক বিভিন্ন উপায়ের যে-কোন এক উপায়ে একজনকে দেওয়া হইলে আর একটি জিনিসও n-সংখ্যক বিভিন্ন উপায়ে লোকগুলিকে দেওয়া যায়; কারণ প্রথম জিনিসটি যে লোক পাইয়াছে, এ জিনিসটিও সেই লোকের পাইবার বাধা নাই বলিয়া, n-সংখ্যক বিভিন্ন লোকের যে-কোন জনকেই এই জিনিসটিও দেওয়া যায়। এখন, প্রথম জিনিসটি দিবার n-সংখ্যক বিভিন্ন উপায়ের প্রত্যেকটির সহিত দ্বিতীয় জিনিসটি দিবার n-সংখ্যক বিভিন্ন উপায়ের প্রত্যেকটিকে সংযুক্ত করিলে দুইটি জিনিস $n \times n$ বা n^2 বিভিন্ন উপায়ে দেওয়া যায়; এইরূপে দুইটি জিনিস দিবার n^2 বিভিন্ন উপায়ের প্রত্যেক উপায়ের সহিত তৃতীয় একটি জিনিস দিবার n-সংখ্যক উপায়ের প্রত্যেকটিকে সংযুক্ত করিলে, তিনটি জিনিস $n^2 \times n$ বা n^3 বিভিন্ন উপায়ে দেওয়া যায়।

এইরূপে অগ্রসর হইয়া দেখা যায় যে, n-সংখ্যক লোকের মধ্যে x-সংখ্যক জিনিস যত উপায়ে দেওয়া যায় তাহাদের সংখ্যা $= n^x$.

উদা. 7. কালো এবং সাদা এই দুই রঙের, প্রত্যেক রঙের অন্ততঃ 4টি করিয়া বল থাকিলে 4টি বিভিন্ন বাক্সের প্রত্যেকটিতে কত বিভিন্ন প্রকারে একটি বল রাখা যাইতে পারে ?

কালো অথবা সাদা যে-কোন একটিকেই প্রথম বাক্সে রাখা যায় বলিয়া প্রথম বাক্সে দুই উপায়ে একটি বল রাখা যায় ; আবার প্রথম বাক্সে কালো অথবা সাদা যে-কোন রঙের বলই রাখা হউক না কেন, দ্বিতীয় বাক্সেও সাদা অথবা কালো অর্থাৎ দুই উপায়ে একটি বল রাখা যায়। এখন, প্রথম বাক্সে বল রাখার দুই উপায়ের প্রত্যেক উপায়ের সহিত দ্বিতীয় বাক্সে বল রাখার দুই উপায়ের প্রত্যেক উপায় সংযুক্ত করিলে দুইটি বাক্সে 2×2 বা 2^2 বিভিন্ন উপায়ে বল রাখা যায়। আবার, প্রথম দুই বাক্সে 2^2 বিভিন্ন উপায়ের যে-কোন এক উপায়ে বল রাখা হইলে, তৃতীয় বাক্সে 2 উপায়ে বল রাখা যায়, এবং প্রথম দুই বাক্সে 2^2 উপায়ে বল রাখার প্রত্যেকটি উপায়ের সহিত তৃতীয় বাক্সে বল রাখার 2 উপায়ের প্রত্যেকটি উপায় সংযুক্ত করিলে ঐ তিনটি বাক্সে $2^2 \times 2$ বা 2^3 বিভিন্ন উপায়ে একটি একটি বল রাখা যায়। সবশেষে তিনটি বাক্সে বল রাখিবার 2^3 বিভিন্ন উপায়ের প্রত্যেকটির সহিত চতুর্থ বাক্সটিতে একটি বল রাখিবার 2টি বিভিন্ন উপায়ের প্রত্যেকটিকে সংযুক্ত করিয়া যত বিভিন্ন উপায়ে চারিটি বাক্সে একটি করিয়া বল রাখা যায় তাহাদের সংখ্যা

$$= 2^3 \times 2 = 2^4 = 16.$$

প্রশ্নমালা 31

1. *India* শব্দটির অক্ষরসমূহের বিন্যাস-সংখ্যা নির্ণয় কর। [Calcutta, 1918, '20]

2. *Calcutta* শব্দটির সবগুলি অক্ষর একযোগে লইয়া কতগুলি বিন্যাস গঠন করা যাইতে পারে ? [Calcutta, 1916]

3. যে অক্ষরসমূহ *Allahabad* শব্দটি গঠন করে, সেই অক্ষরসমূহ লইয়া কতগুলি বিন্যাস গঠন করা যায় ? ঐ বিন্যাসগুলির মধ্যে কতগুলিতে স্বরবর্ণগুলি যুগ্ম স্থানে বসিবে ?

4. কোন গ্রন্থাগারে একখানা বইয়ের পাঁচখানা, অপর দুইখানা বইয়ের প্রত্যেকের 4 খানা, অপর তিনখানা বইয়ের প্রত্যেকের 6 খানা এবং অপর 8 খানা বইয়ের একখানা করিয়া আছে। সব বইগুলি কতপ্রকারে সাজানো যাইতে পারে ?

5. *Orion* শব্দটির অক্ষরসমূহ দ্বারা, যদি ধরিয়া লওয়া হয় যে, (i) অক্ষরগুলি যে-কোন ক্রমে থাকিতে পারিবে এবং (ii) ব্যঞ্জনবর্ণদ্বয় একত্র থাকিবে না, তবে কতগুলি শব্দ গঠন করা যাইতে পারে ?

6. *rationalisation* শব্দটির অক্ষরসমূহের কতপ্রকারে পুনর্বিন্যাস হইতে পারে? এই পুনর্বিন্যাসের কতগুলির মধ্যে t দুইটি একত্র থাকিবে? আর কতগুলিতে a তিনটি প্রথম তিনটি পর পর স্থানে বসিবে?

7. কোন স্বরবর্ণের অবস্থানের পরিবর্তন না করিয়া *utilitarianism* শব্দটির অক্ষরগুলির কতপ্রকারে পুনর্বিন্যাস করা যায়?

8. স্বরবর্ণ এবং ব্যঞ্জনবর্ণের আপেক্ষিক অবস্থানের পরিবর্তন না করিয়া *Civilisation* শব্দটির অক্ষরগুলিকে কতপ্রকারে পুনর্বিন্যাস করা যাইতে পারে।

9. তোমাকে 12টি বল দেওয়া হইল, তন্মধ্যে 4টি লাল, 3টি কালো এবং 5টি সাদা; কতপ্রকারে তুমি বলগুলি সাজাইতে পার, যেন 2টি সাদা বল পাশাপাশি না বসানো হয়?

10. একখানা ট্রেনের 12 খানা বগি (carriage) আছে; তন্মধ্যে 5 খানা প্রথম শ্রেণীর, 4 খানা দ্বিতীয় শ্রেণীর এবং অবশিষ্ট তৃতীয় শ্রেণীর। বগিগুলিকে কত বিভিন্ন প্রকারে সাজানো যাইতে পারে? সবগুলি প্রথম শ্রেণীর বগি একত্র রাখিয়া বগিগুলিকে কত বিভিন্ন প্রকারে সাজানো যাইতে পারে?

11. 121,202 সংখ্যাটির অঙ্কগুলির সাহায্যে 6 অঙ্কের কতগুলি বিভিন্ন সংখ্যা গঠন করা যাইতে পারে?

12. 9, 8, 5, 2, 3, 4, 3, 2, 5, 8, 5, 2, 3 অঙ্কগুলির সবগুলি একযোগে লইয়া, যুগ্ম স্থানে যুগ্ম অঙ্ক বসাইয়া কতগুলি সংখ্যা গঠন করা যাইতে পারে?

13. 15টি বলের কয়েকটি সাদা এবং বাকিগুলি কালো। সাদা বল কয়টি হইলে ঐসব বলগুলি লইয়া গঠিত সমবায়সমূহের সংখ্যা বৃহত্তম হইবে?

14. যে-কোন বালক যে-কোন পুরস্কার পাইতে পারিলে, 3টি পুরস্কার 7টি বালকের মধ্যে কতপ্রকারে বিতরণ করা যাইতে পারে?

15. একন অধ্যাপকের পদের জন্য 3 জন প্রার্থী। 5 জনের ভোটে একজন নির্বাচিত হইবেন; নির্বাচনে কতপ্রকারে ভোট দেওয়া যাইতে পারে?

16. কলিকাতা হইতে চাঁদবালির মধ্যে 4 খানা স্টীমার যাতায়াত করে। 4 খানা স্টীমার কলিকাতা হইতে একই সময়ে ছাড়িলে, কোন ভদ্রলোকে কত বিভিন্ন প্রকারে কলিকাতা হইতে চাঁদবালি 7 বার ভ্রমণ করিতে পারেন?

17. 16-নং প্রশ্নে, ভদ্রলোকের তৃতীয়বার ভ্রমণের সময় যদি একখানা স্টীমার আর পঞ্চমবার ভ্রমণের সময় যদি 2 খানা স্টীমার মেরামতের জন্য ডকে (dock) থাকিয়া যাইত এবং অন্যান্যবার ভ্রমণের সময় 4 খানা স্টীমারই যাতায়াত করিত, তবে উত্তর কত হইত?

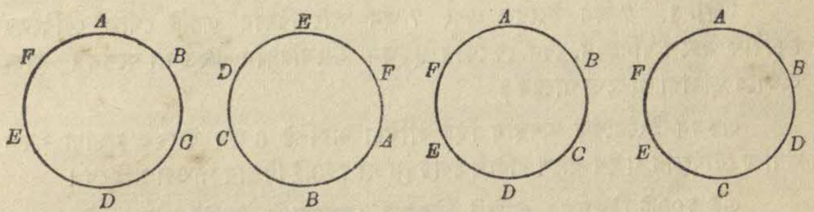
18. দৌড়, সন্তরণ এবং অশ্বারোহণ প্রতিযোগিতায় 15 জন লোক প্রতিদ্বন্দ্বিতা

করেন। যদি দৌড়ের জন্য 1টি, সন্তরণের জন্য 2টি এবং অশ্বারোহণের জন্য 3টি পুরস্কার হয়, তবে বিভিন্ন মূল্যের এই 6টি পুরস্কারের দ্বারা কতপ্রকারে তালিকা রচিত হইতে পারে ?

19. কোন অভিভাবক তাঁহার 6টি সন্তানকে আইন বা চিকিৎসা বা স্থপতিবিদ্যা পড়াইতে ইচ্ছুক। প্রত্যেকটি সন্তানই যদি ঐ তিনটি বিষয়ের যে-কোনটি পড়িবার উপযুক্ত হয়, তবে তিনি তাহাদিগকে কতপ্রকারে শিক্ষা দিতে মনস্থ করিতে পারেন ?

20. m-সংখ্যক লোক আর n-সংখ্যক বানর আছে। m-এর মান অপেক্ষা n-এর মান বৃহত্তর। যদি একজন লোক যে-কোন সংখ্যক বানর পাইতে পারে, তবে প্রত্যেকটি বানর কত প্রকারে একজন মনিব পাইতে পারে ?

8·10. বৃত্তাকারে সজ্জিত বস্তুসমূহের বিন্যাস (Circular Permutations) : n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তুকে বৃত্তাকার সাজাইলে যে সকল বিভিন্ন বিন্যাস পাওয়া যায় তাহাদের সংখ্যা নির্ণয়।



(1) (2) (3) (4)

A হইতে আরম্ভ করিয়া, ঘড়ির কাঁটা যেদিকে চলে সেদিকে বৃত্তটির পাশে পাশে চলিলে চিত্র (1) ও (2) নম্বর চিত্রে পরপর একই অক্ষর পাওয়া যায় বলিয়া বিন্যাস-দুইটিকে অভিন্ন বিন্যাসরূপে গণ্য করা হয়, কিন্তু চিত্র (3) ও (4)-এ এরূপ পাওয়া যায় না বলিয়া, উহাদিগকে দুইটি ভিন্ন বিন্যাসরূপে গণ্য করা হয়।

অতএব, কতকগুলি বিভিন্ন বস্তুকে বৃত্তাকারে সজ্জিত করিয়া বিভিন্ন বিন্যাস পাইতে হইলে, ঐ সকল বস্তুর যে-কোন একটির অবস্থান স্থির রাখিয়া অবশিষ্ট সকলগুলিকে সম্ভাব্য সকলপ্রকার বিভিন্ন উপায়ে সাজাইতে হয়।

অতএব, n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তুর একটির অবস্থান স্থির রাখিয়া অবশিষ্ট $(n-1)$-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু দ্বারা যে $|\underline{n-1}$-সংখ্যক বিন্যাস রচনা করা যায়, তাহাই হইল n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তুকে বৃত্তাকারে সাজাইবার মোট বিন্যাস-সংখ্যা।

দ্রষ্টব্য 1. অনেক বীজগণিতে সারিতে সারিতে সাজানোকে রৈখিক বিন্যাস (Linear permutations) এবং বৃত্তাকারে সাজানোকে বৃত্তাকার বিন্যাস (Circular permutations) বলা হইয়াছে।

দ্রষ্টব্য 2. উপরের অনুচ্ছেদে, ঘড়ির কাঁটা যেদিকে ঘুরে সেদিকে এবং ইহার উল্টাদিকে একই অক্ষরসমূহ দ্বারা গঠিত বিন্যাস-দুইটিকে স্বতন্ত্র গণ্য করা হইয়াছে ; কিন্তু উহাদিগকে অভিন্ন মনে করিলে মোট বিন্যাস হইবে $\frac{1}{2}\,\underline{|n-1}$. যেমন, n-সংখ্যক বিভিন্ন আকারের বা বিভিন্ন রঙের ফুল লইয়া মালা রচনা করিলে $\frac{1}{2}\,\underline{|n-1}$-সংখ্যক বিভিন্ন নমুনা পাওয়া যাইবে ; কারণ, কোন নমুনায়, ঘড়ির কাঁটা যেদিকে ঘুরে সেদিকে ফুলগুলি যে-ক্রমে সজ্জিত থাকে, অন্য এক নমুনায় যদি অনুরূপ ফুলগুলি ঘড়ির কাঁটা যেদিকে ঘুরে তাহার উল্টাদিকে একই ক্রমে সজ্জিত থাকে, তবে মালাটিকে ঘুরাইয়া ধরিলে নমুনা-দুইটির মধ্যে কোন পার্থক্য থাকে না বলিয়া, নমুনা-দুইটিকে অভিন্ন ধরা হয়।

দ্রষ্টব্য 3. n-সংখ্যক ব্যক্তি $\underline{|n-1}$ উপায়ে বৃত্তাকারে বসিতে পারেন, কিন্তু, n-সংখ্যক ব্যক্তি একটি গোল টেবিলের চারিপাশে বসিতে পারেন $\underline{|n}$ উপায়ে ; কারণ, এক্ষেত্রে ব্যক্তিসমূহের পরস্পরের আপেক্ষিক অবস্থান নহে, টেবিলের সহিত ঐ ব্যক্তিগণের আপেক্ষিক অবস্থান বিবেচনা করিতে হয়।

উদা. 1. 7 জন ইংরেজ এবং 7 জন আমেরিকান একটি গোল টেবিলের চতুর্দিকে এরূপে বসিবেন, যেন যে-কোন দুইজন আমেরিকান একত্র না বসেন। কত-প্রকারে তাঁহারা বসিতে পারেন ?

একজন ইংরেজের অবস্থান স্থির রাখিয়া অবশিষ্ট 6 জন ইংরেজ সম্ভাব্য সকল উপায়ে টেবিলের পাশে পাশে বসিলে মোট $\underline{|6}$ বা 720টি বিন্যাস পাওয়া যাইবে।

এই 720টি বিন্যাসের প্রতিটি বিন্যাসে পাশাপাশি উপবিষ্ট দুইজন ইংরেজের মাঝখানে একজন আমেরিকান বসিলে, 7 জন আমেরিকান ঐরূপ 7টি স্থানে বসিতে পারেন এবং আমেরিকানদেরও কোন দুইজনই একত্র বসিবেন না। এখন, 7 জন আমেরিকান ঐ 7টি স্থানে $\underline{|7}$ বিভিন্ন উপায়ে বসিতে পারেন ; এবং ইংরেজদের বসিবার প্রতিটি বিন্যাস হইতে আমেরিকানদের বসিবার $\underline{|7}$-সংখ্যক বিভিন্ন বিন্যাস পাওয়া যায়। ইংরেজদের বসিবার $\underline{|6}$-সংখ্যক বিন্যাস আছে ; অতএব, মোট বিন্যাস-সংখ্যা

$$=\underline{|6}\times\underline{|7}=3628800.$$

উদা. 2. কতপ্রকারে 8 জন লোককে একটি গোল টেবিলের চতুর্দিকে এরূপভাবে বসানো যাইবে, যেন যে-কোন দুইটি বিন্যাসে যে-কোন লোকের পাশে একই লোক না থাকে।

8 ব্যক্তিকে টেবিলের পাশে পাশে গোল করাইয়া বসাইলে $\underline{|8-1}$ বা $\underline{|7}$-সংখ্যক বিন্যাস পাওয়া যায়। এই সকল বিন্যাসের কোন একটিতে ঐ সকল লোক ঘড়ির কাঁটা যেদিকে ঘুরে সেদিকে যে-ক্রমে উপবিষ্ট থাকে, অপর একটিতে ঐ সকল লোক ঘড়ির কাঁটা যেদিকে ঘুরে তার বিপরীত দিকে একই ক্রমে উপবিষ্ট থাকে ; অতএব এই দুইটি বিন্যাসের একটির যে-কোন লোকের দুইপাশে যে দুইজন লোক থাকিবে, অপরটিতেও

ঐ লোকের দুইপাশে একই দুইজন লোক থাকিবে। সুতরাং, শর্তানুসারে, এই দুইটি বিন্যাসকে বিভিন্ন না ধরিয়া অভিন্ন মনে করিতে হইবে। এইরূপ দুইটি বিন্যাসকে অভিন্ন মনে করিলে মোট বিন্যাস-সংখ্যা হইবে $\frac{1}{2}\underline{|7}$ বা $\frac{1}{2} \times 5040 = \mathbf{2520}$.

প্রশ্নমালা 32

1. 10টি শিশু একটি আনন্দ-মেলায় কতপ্রকারে বৃত্তাকারে বসিতে পারে ?

2. যে-কোন লোকের পাশে দুইবারে একই লোকেরা না বসে, এরূপে 6 জন লোককে কতপ্রকারে একটি গোল টেবিলের চারিদিকে বসানো যাইতে পারে ?

3. একাদশ শ্রেণীর 5টি ছাত্র ও দশম শ্রেণীর 5টি ছাত্রকে একজন অন্তর একজনকে কতপ্রকারে একটি গোল টেবিলের চারপাশে বসানো যাইতে পারে ?

4. কোন ভোজসভায় $2n$-সংখ্যক অতিথির সমাবেশ হইয়াছে। বাড়ীর কর্তা ও গিন্নীর আসন সামনা-সামনি নির্দিষ্ট আছে, আর দুইজন বিশিষ্ট অতিথি আছেন যাঁহারা পাশাপাশি বসিবেন না, অতিথিগণ কতপ্রকারে আসনগ্রহণ করিতে পারেন ?

8·11. *n*-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হইতে উহাদের যতগুলি ইচ্ছা লইয়া গঠিত সমবায়সমূহের সংখ্যা নির্ণয়। [*To find the total number of combinations of n dissimilar things by taking some or all at a time.*]

n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তুকে $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n$ দ্বারা সূচিত করিলে দেখা যায় যে, উক্ত n-সংখ্যক বস্তুর একটি একটি, দুইটি দুইটি এবং সর্বশেষে সবগুলিকে লইয়া সম্ভাব্য সকল প্রকার বিভিন্ন সমবায় গঠন করিলে, এই সকল সমবায়ের যে-কোনটিতে a_1 বস্তুটি (1) থাকিতে পারে, অথবা, (2) নাও থাকিতে পারে। অতএব, দেখা যাইতেছে, প্রদত্ত শর্ত অনুসারে গঠিত সমবায়সমূহে a_1 বস্তুটি মাত্র দুই উপায়ে বিবেচিত হইতে পারে।

এইরূপে a_2 বস্তুটিও দুই উপায়ে বিবেচিত হইতে পারে ; এবং a_1-কে বিবেচনা করিবার প্রত্যেক উপায়ের সহিত a_2-কে বিবেচনা করিবার প্রত্যেকটি উপায় সংযুক্ত করা যায় বলিয়া, ঐ দুই বস্তুকে একসঙ্গে মোট 2×2, বা 2^2-সংখ্যক বিভিন্ন উপায়ে বিবেচনা করা যায়। আবার, a_3 বস্তুটিকে যে দুই উপায়ে বিবেচনা করা যায় তাহার প্রত্যেক উপায়ের সহিত a_1 এবং a_2-কে বিবেচনা করিবার 2^2-সংখ্যক উপায়ে প্রত্যেকটিকে সংযুক্ত করিলে দেখা যায় যে, a_1, a_2, a_3 বস্তু-তিনটিকে একসঙ্গে $2^2 \times 2$ বা 2^3 বিভিন্ন উপায়ে বিবেচনা করা যায়। এইরূপে অগ্রসর হইলে, দেখা যায় যে, n-সংখ্যক বস্তুকে একসঙ্গে 2^n-সংখ্যক বিভিন্ন উপায়ে বিবেচনা করা যায়। কিন্তু ঐ 2^n-সংখ্যক বিভিন্ন উপায়ের মধ্যে যেটিতে সমুদয় n-সংখ্যক বস্তুই পরিত্যক্ত হইয়াছে বলিয়া ধরা হইয়াছে, উহা হইতে কোন সমবায়ই উৎপন্ন হয় না বলিয়া উহাকে বাদ দিয়া মোট সমবায়-সংখ্যা হইবে

$$2^n - 1.$$

দ্রষ্টব্য ঃ উপরের ফল হইতে আমরা দেখিতে পাই

$$^nC_1 + {^nC_2} + {^nC_3} + \cdots + {^nC_n} = 2^n - 1.$$

8·12. সবগুলি বিভিন্ন নহে, এরূপ বস্তুসমূহের মোট সমবায়।

(p+q+r+…)-সংখ্যক বস্তুর মধ্যে p-সংখ্যক বস্তু একজাতীয় এবং পরস্পর অভিন্ন, q-সংখ্যক বস্তু ভিন্ন একজাতীয়, কিন্তু পরস্পর অভিন্ন, r-সংখ্যক বস্তুও ঐ দুইজাতীয় বস্তু হইতে ভিন্ন অন্য একজাতীয়, কিন্তু পরস্পর অভিন্ন, ইত্যাদিরূপে অন্যান্য জাতীয় বস্তুগুলিও থাকিলে এই সকল বস্তু হইতে একটি একটি করিয়া লইয়া, দুইটি দুইটি করিয়া লইয়া, ইত্যাদিরূপে সর্বশেষে সবগুলিকে লইয়া সম্ভাব্য সকল প্রকার বিভিন্ন সমবায় গঠন করিলে মোট সমবায়-সংখ্যা হইবে

$$\mathbf{(p+1)(q+1)(r+1)\cdots-1}$$

p-সংখ্যক সমজাতীয় এবং পরস্পর অভিন্ন বস্তু, প্রদত্ত শর্তমতে গঠিত সমবায় সমূহের

(1) কতকগুলিতে একটি করিয়া থাকিতে পারে,

(2) কতকগুলিতে দুইটি করিয়া থাকিতে পারে,

(3) কতকগুলিতে তিনটি করিয়া থাকিতে পারে,

… … … …

… … … …

(p) কতকগুলিতে p-সংখ্যকটি করিয়া থাকিতে পারে,

($p+1$) কতকগুলিতে ঐ বস্তুটি মোটেই না থাকিতে পারে।

অতএব, দেখা গেল, উক্ত p-সংখ্যক বস্তুকে সমবায় গঠনকালে $(p+1)$-সংখ্যক বিভিন্ন উপায়ে বিবেচনা করা যায়।

এইরূপ, q-সংখ্যক সমজাতীয় এবং পরস্পর অভিন্ন বস্তুকে সমবায় গঠনকালে $(q+1)$-সংখ্যক বিভিন্ন উপায়ে বিবেচনা করা যায়।

এখন, p-সংখ্যক সমজাতীয় বস্তুকে বিবেচনা করিবার $(p+1)$-সংখ্যক বিভিন্ন উপায়ের প্রত্যেকটির সহিত q-সংখ্যক সমজাতীয় বস্তুকে বিবেচনা করিবার $(q+1)$-সংখ্যক বিভিন্ন উপায়ের প্রত্যেকটিকে সংযুক্ত করা যায় বলিয়া, p এবং q-সংখ্যক সমজাতীয় বস্তুকে সমবায় গঠনকালে মোট $(p+1)(q+1)$-সংখ্যক বিভিন্ন উপায়ে বিবেচনা করা যায়। এইরূপে, p, q, r-সংখ্যক সমজাতীয় বস্তুকে সমবায় গঠনকালে মোট $(p+1)(q+1)(r+1)$-সংখ্যক বিভিন্ন উপায়ে বিবেচনা করা যায়।

এইরূপে অগ্রসর হইলে দেখা যায় যে, সমুদয় বস্তুকে সমবায় গঠনকালে মোট $(p+1)(q+1)(r+1)\cdots\cdots$ -সংখ্যক বিভিন্ন উপায়ে বিবেচনা করা যায়। অতএব, বস্তুগুলিকে বিবেচনা করিবার এই সকল বিভিন্ন উপায় হইতেই সবগুলি সমবায় এবং ইহাদের প্রত্যেকটি হইতেই একটি সমবায় উৎপন্ন হয় বলিয়া এবং উক্ত $(p+1)(q+1)(r+1)\cdots\cdots$ -সংখ্যক বিভিন্ন উপায়ের মধ্যে যেটিতে প্রত্যেক জাতীয় বস্তুকে উপরিবর্ণিত উপায়সমূহের শেষোক্ত উপায়ে যাহাতে ঐ সমজাতীয় বস্তুর একটিও থাকিবে না এইরূপে বিবেচনা করা হয়, সেটিতে সকল জাতীয় বস্তুই পরিত্যক্ত হওয়ায় উহা হইতে কোন সমবায়ই উৎপন্ন হয় না বলিয়া উহাকে বাদ দিয়া মোট সমবায়-সংখ্যা হইবে

$$(p+1)(q+1)(r+1)\cdots-1.$$

অনুসিদ্ধান্ত। বস্তুগুলি অভিন্ন হইলে, $p=q=r\cdots=1$ হইবে, এবং তখন $p+q+r+\cdots=n$ ধরিয়া, এই n-সংখ্যক বস্তু হইতে 1টি, 2টি, ... n-সংখ্যকটি করিয়া লইয়া গঠিত সমবায়সমূহের সংখ্যা

$=(1+1)(1+1)(1+1)\cdots$ n-সংখ্যক উৎপাদক -1

$=2.2.2\cdots$ এইরূপ n-সংখ্যক উৎপাদক -1

$=2^n-1.$ [অনু. 8·9 দ্রষ্টব্য।]

8·13. বিভিন্ন দলের বিভাগ।

(m+n)-সংখ্যক বস্তুকে কত বিভিন্ন উপায়ে যথাক্রমে m-সংখ্যক এবং n-সংখ্যক বস্তু-সংবলিত দুইটি দলে ভাগ করা যায় তাহা নির্ণয় করিতে হইবে। [*To find the number of ways in which $m+n$ things can be divided into two groups containing m and n things respectively.*]

$(m+n)$-সংখ্যক বস্তু হইতে $^{m+n}C_m$-সংখ্যক উপায়ে m-সংখ্যক বস্তু-সংবলিত এক একটি দল গঠন করা যায়, এবং যতবারই এই m-সংখ্যক বস্তু-সংবলিত দল গঠন করা যায়, ততবারের প্রত্যেকবারেই n-সংখ্যক বস্তু পড়িয়া থাকিবে, যাহা হইতে ^nC_n বা 1টি মাত্র উপায়ে n-সংখ্যক বস্তু-সংবলিত দল গঠন করা যায়। অতএব, যে সকল বিভিন্ন উপায়ে m-সংখ্যক এবং n-সংখ্যক বস্তু-সংবলিত দুইটি দুইটি দলে $(m+n)$-সংখ্যক বস্তুকে ভাগ করা যায় তাহাদের সংখ্যা

$$={}^{m+n}C_m\times 1={}^{m+n}C_m=\frac{\lfloor m+n}{\lfloor m\lfloor n}.$$

দ্রষ্টব্য ঃ $n=m$ হইলে, উপরের ফলে $n=m$ বসাইয়া $\frac{\lfloor 2n}{\lfloor m\lfloor n}$ জোড়া দল পাওয়া যায় ; কিন্তু ইহাদের প্রতি $\lfloor 2$ বা 2 জোড়ার একটিতে যে দুই দল থাকে অন্যটিতেও

ঐ তুই দলেরই স্থান অদল-বদল করা হয় মাত্র বলিয়া ঠিক সেই তুই দলই থাকে; অতএব, এক্ষেত্রে, $2m$-সংখ্যক বস্তুকে m-সংখ্যক বস্তু-সংবলিত তুইটি তুইটি দলে ভাগ করিবার বিভিন্ন উপায়-সংখ্যা হইবে

$$\frac{\lfloor 2m}{\lfloor 2 . \lfloor m \lfloor m}, \text{ বা, } \frac{1}{\lfloor 2} \cdot \frac{\lfloor 2m}{(\lfloor m)^2}.$$

উদা. 1. একটি এক পয়সা, একটি তুই পয়সা, একটি তিন পয়সা, একটি পাঁচ পয়সা, একটি দশ পয়সা, একটি বিশ পয়সা, একটি পঁচিশ পয়সা এবং একটি পঞ্চাশ পয়সা দ্বারা কতগুলি অর্থ-পরিমাণ গঠন করা যায়?

এস্থলে মোট 8টি বিভিন্ন মুদ্রা আছে; এই সকল মুদ্রা হইতে একটি করিয়া বা তুইটি করিয়া, ইত্যাদিরূপে লওয়া যায়।

∴ মোট নির্বাচন-সংখ্যা

$$= {}^8C_1 + {}^8C_2 + {}^8C_3 + {}^8C_4 + {}^8C_5 + {}^8C_6 + {}^8C_7 + {}^8C_8$$
$$= 2^8 - 1 = 256 - 1 = 255.$$

উদা. 2. 42-এর কতগুলি বিভিন্ন উৎপাদক আছে?

কোন সংখ্যার মৌলিক উৎপাদকগুলির প্রত্যেকটিই উহার উৎপাদক, আবার, এইসব মৌলিক উৎপাদকের একাধিকের গুণফলও উহার উৎপাদক।

এখন, 42-এর তিনটি মৌলিক উৎপাদক 2, 3 ও 7. এই তিনটি মৌলিক উৎপাদকের এক বা একাধিককে যত বিভিন্ন উপায়ে নির্বাচন করা যায়, 42-এর ততগুলিই উৎপাদক হইবে।

∴ মোট উৎপাদক-সংখ্যা $= {}^3C_1 + {}^3C_2 + {}^3C_3 = 2^3 - 1 = 7.$

কিন্তু এই 7টি উৎপাদকের মধ্যে 42ও আছে, সেটিকে বাদ দিয়া নির্ণেয় উৎপাদক-সংখ্যা $= 7 - 1 = 6.$

উদা. 3. 10টি বিভিন্ন বস্তুকে 2টি, 3টি ও 5টি এইরূপ তিন ভাগে কত-প্রকারে ভাগ করা যাইতে পারে?

10টি জিনিস হইতে 2টি করিয়া নির্বাচন করা যায় ${}^{10}C_2$ উপায়ে; 2টি জিনিস নির্বাচিত হইবার পরে অবশিষ্ট 8টি জিনিস হইতে 3টি করিয়া নির্বাচন করা যায় ${}^8C_3$ উপায়ে এবং 3টিকে নির্বাচন করিবার পরে অবশিষ্ট 5টি হইতে 5টি করিয়া নির্বাচন করা যায় ${}^5C_5$ উপায়ে। সুতরাং, 10টি জিনিসকে যথাক্রমে 2, 3 ও 5টি জিনিস-সংবলিত 3টি দলে ভাগ করিবার মোট উপায়-সংখ্যা

$$= {}^{10}C_2 \times {}^8C_3 \times {}^5C_5 = \frac{10 \times 9}{2 \times 1} \times \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} \times 1 = 45 \times 56 = 2520.$$

উদা. 4. (i) কত উপায়ে 15টি বিভিন্ন বস্তু 3 ব্যক্তির মধ্যে সমান ভাগে ভাগ করা যাইতে পারে ?

(ii) 15টি বিভিন্ন বস্তুকে 5টি বস্তু-সংবলিত 3টি 3টি দলে কতপ্রকারে ভাগ করা যাইতে পারে ?

(i) এস্থলে 15টি বিভিন্ন বস্তুকে 3 ব্যক্তির মধ্যে সমান ভাগে ভাগ করিয়া দিলে প্রত্যেকে 5টি করিয়া বস্তু পাইবে এবং যত বিভিন্ন উপায়ে উহাদের ভাগ করিয়া দেওয়া যায় তাহাদের সংখ্যা

$$=\frac{\lfloor 15}{(\lfloor 5)^3}=\frac{15.14.13.12.11.10.9.8.7.6.\lfloor 5}{5.4.3.2.1.5.4.3.2.1.\lfloor 5}=14.13.11.9.7.6$$

$$=756756.$$

(ii) এস্থলে, বিভিন্ন 5টি বস্তু-সংবলিত 3টি 3টি দলে 15টি বস্তুকে ভাগ করিতে হইবে বলিয়া, 3টি 3টি দলের মোট সমবায়-সংখ্যা, অর্থাৎ যত বিভিন্ন উপায়ে উহাদের লইয়া 5টি বস্তু-সংবলিত 3টি করিয়া দল গঠন করা যায়, তাহাদের সংখ্যা

$$=\frac{\lfloor 15}{(\lfloor 5)^3\lfloor 3}=\frac{756756}{6}=126126.$$

প্রশ্নমালা 33

1. একজন লোকের 6 জন বন্ধু আছেন। তিনি কতপ্রকারে তাঁহাদের একজন বা একাধিকজনকে মধ্যাহ্নভোজে নিমন্ত্রণ করিতে পারেন ? [C. U. 1950]

2. একটি থলিতে একটি সভারিন্, একটি অর্ধ সভারিন্, একটি ক্রাউন, একটি ফ্লোরিন, একটি শিলিং, একটি পেনি এবং একটি ফার্দিং আছে। কতপ্রকারে ঐ থলি হইতে কিছু পরিমাণ অর্থ তোলা যাইতে পারে ?

3. 4290-এর কয়টি বিভিন্ন উৎপাদক আছে ?

4. একই জাতীয় ফলগুলি একই আকারের হইলে, 4টি লেবু, 6টি আপেল এবং 7টি পেয়ারা হইতে কতপ্রকারে বাছাই করা সম্ভব ?

5. রবীন্দ্রনাথের 'গীতাঞ্জলি' 3 খানা, বঙ্কিমচন্দ্রের 'আনন্দমঠ' 5 খানা ও শরৎচন্দ্রের 'পথের দাবী' 7 খানা দুইটি ছাত্রের মধ্যে কতপ্রকারে ভাগ করিয়া দেওয়া যাইতে পারে ?

6. প্রমাণ কর যে, 8টি প্রদত্ত প্রশ্নের প্রত্যেকটির একটি করিয়া বিকল্প থাকিলে, তাহাদের মধ্যে এক বা একাধিক প্রশ্ন-নির্বাচনের সংখ্যা 3^n-1. [C. U. 1918]

7. প্রমাণ কর যে, *daddy did a deadly deed*-এর অক্ষরগুলির সমবায়-সমূহের সংখ্যা 1919. [B. U. 1910]

8. ৪টি বিভিন্ন প্রকারের বস্তু দুইজন লোকের মধ্যে কতপ্রকারে ভাগ করিয়া দেওয়া যায় ?

9. নিজেদের মধ্যে খেলার জন্য 22 জন খেলোয়াড়কে কতপ্রকারে 2টি ক্রিকেট-দলে (cricket team) ভাগ করা যায় ? [C. U. 1950]

10. $(p+q+r)$-সংখ্যক বস্তুর p-সংখ্যক বস্তু একই প্রকারের, q-সংখ্যক বস্তু একই প্রকারের এবং অবশিষ্ট বস্তুগুলি বিভিন্ন প্রকারের হইলে, প্রমাণ কর যে, উহাদের কতগুলি বা সবগুলি একযোগে লইয়া সমবায় গঠিত হইলে, তাহাদের সংখ্যা $=(p+1)(q+1)2^r-1$.

8·14. বিবিধ প্রশ্ন।

উদা. 1. *examination* শব্দটির অক্ষরগুলিকে 4টি 4টি করিয়া লইয়া কতগুলি বিন্যাস এবং সমবায় পাওয়া যাইবে ?

শব্দটিতে মোট 11টি অক্ষর (a, a), (i, i), (n, n), e, x, m, t, o আছে ; ইহাদের মধ্যে 2টি a, 2টি i, 2টি n, এবং 5টি অক্ষর আছে 1টি করিয়া।

এই সকল অক্ষর হইতে 4টি করিয়া লইয়া সমবায় গঠন করিলে, ইহাদের কতকগুলিতে 4টি অক্ষরই বিভিন্ন থাকিতে পারে, আবার কতকগুলিতে সেইরূপ নাও থাকিতে পারে, অতএব, ঐ সকল সমবায়কে নিম্নলিখিত 3 শ্রেণীতে বিভক্ত করা যায় :

(1) 4টি বিভিন্ন অক্ষরযুক্ত সমবায়সমূহ,

(2) 2টি একই প্রকার এবং 2টি বিভিন্ন এইরূপ 4টি অক্ষরযুক্ত সমবায়সমূহ,

(3) 2টি একপ্রকার এবং অপর দুইটি ভিন্ন অন্য একপ্রকার এইরূপ 4টি অক্ষর-যুক্ত সমবায়সমূহ।

ইহা স্পষ্টই প্রতীয়মান হয় যে, সম্ভাব্য সকলপ্রকার সমবায় উপরিউক্ত শ্রেণী তিনটিতে আছে। সুতরাং, প্রত্যেক শ্রেণীর সমবায়-সংখ্যা নির্ণয় করিয়া, সেই সংখ্যা হইতে নির্ণেয় বিন্যাস-সংখ্যা পাওয়া যাইবে।

(1) a, i, n, e, x, m, t, o এই ৪টি অক্ষর হইতে 4টি করিয়া লইয়া সমবায় গঠন করিলে এই শ্রেণীর সমবায়গুলি পাওয়া যাইবে।

অতএব, উহাদের সংখ্যা $= {}^8C_4$.

আবার, এই সকল সমবায়ের প্রত্যেকটি হইতে $\underline{|4}$-সংখ্যক বিন্যাস পাওয়া যায় বলিয়া, এই শ্রেণীর সমবায়সমূহ হইতে গঠিত বিন্যাস-সংখ্যা $= {}^8C_4 \times \underline{|4}$.

(2) (a, a)-এর সহিত i, n, e, x, m, t, o এই 7টি অক্ষরের 2টি করিয়া লইয়া

সংযুক্ত করিলে, (i, i)-এর সহিত a, n, e, x, m, t, o এই 7টি অক্ষরের দুইটি করিয়া লইয়া সংযুক্ত করিলে, এবং (n, n)-এর সহিত a, i, e, x, m, t, o এই 7টি অক্ষরের দুইটি করিয়া সংযুক্ত করিলে, এই শ্রেণীর সমবায়গুলি পাওয়া যাইবে। অতএব, এই শ্রেণীর সমবায়সমূহের মোট সংখ্যা $= 3 \times {}^7C_2$.

আবার, এই সকল সমবায়ের প্রত্যেকটি হইতে $\dfrac{\lfloor\underline{4}}{\lfloor\underline{2}}$-সংখ্যক বিন্যাস পাওয়া যায় বলিয়া, এই শ্রেণীর সমবায়সমূহ হইতে গঠিত মোট বিন্যাস-সংখ্যা $= 3 \times {}^7C_2 \times \dfrac{\lfloor\underline{4}}{\lfloor\underline{2}}$.

(3) $(a, a), (i, i)$ এবং (n, n) এই তিনজোড়া অক্ষর হইতে দুইজোড়া করিয়া লইলেই এই শ্রেণীর সমবায়গুলি পাওয়া যাইবে। অতএব, এই শ্রেণীর সমবায়-সংখ্যা $= {}^3C_2 = {}^3C_1$.

আবার, এই সকল সমবায়ের প্রত্যেকটি হইতে $\dfrac{\lfloor\underline{4}}{\lfloor\underline{2}\cdot\lfloor\underline{2}}$-সংখ্যক বিন্যাস পাওয়া যায় বলিয়া, এই শ্রেণীর সমবায়সমূহ হইতে গঠিত মোট বিন্যাস-সংখ্যা $= {}^3C_1 \times \dfrac{\lfloor\underline{4}}{\lfloor\underline{2}\,\lfloor\underline{2}}$.

$\therefore$ নির্ণেয় মোট সমবায়-সংখ্যা

$$= {}^8C_4 + 3 \times {}^7C_2 + {}^3C_1$$

$$= \frac{8.7.6.5}{4.3.2.1} + 3 \times \frac{7.6}{2.1} + 3 = 70 + 63 + 3 = 136\ ;$$

এবং নির্ণেয় মোট বিন্যাস-সংখ্যা

$$= {}^8C_4 \times \lfloor\underline{4} + 3 \times {}^7C_2 \times \frac{\lfloor\underline{4}}{\lfloor\underline{2}} + {}^3C_1 \times \frac{\lfloor\underline{4}}{\lfloor\underline{2}\,\lfloor\underline{2}}$$

$$= 70 \times 24 + 63 \times 12 + 3 \times 6$$

$$= 1680 + 756 + 18 = \mathbf{2454}.$$

উদা. 2. হাওড়া হইতে খড়্গপুরগামী একখানা ট্রেন মধ্যবর্তী 9টি স্টেশনে থামে। ছয়জন যাত্রী ছয়খানা বিভিন্ন টিকিট লইয়া ট্রেনের কামরায় উঠে। তাহাদের নিকট কত বিভিন্ন প্রকারের টিকিট থাকিতে পারে?

$$\underline{\mathrm{H}\ \mathrm{S}_1\ \mathrm{S}_2\ \mathrm{S}_3\ \mathrm{S}_4\ \mathrm{S}_5\ \mathrm{S}_6\ \mathrm{S}_7\ \mathrm{S}_8\ \mathrm{S}_9\ \mathrm{K}}$$

মধ্যবর্তী স্টেশনসমূহকে $S_1, S_2, \ldots, S_9$ দ্বারা সূচিত করিলে, স্পষ্টই দেখা যাইতেছে, খড়্গপুর অভিমুখে যাইবার জন্য, S_1 স্টেশনে 9 প্রকার বিভিন্ন টিকিট পাওয়া যায়, S_2 স্টেশনে 8 প্রকার বিভিন্ন টিকিট, S_3 স্টেশনে 7 প্রকার বিভিন্ন টিকিট এবং

এইরূপে S_4, S_5, S_6, S_7, S_8 এবং S_9 স্টেশনসমূহে যথাক্রমে 6, 5, 4, 3, 2 এবং 1 প্রকার বিভিন্ন টিকিট পাওয়া যায়। অতএব, হাওড়া হইতে খড়্গপুর যাইবার সময়ে মধ্যবর্তী স্টেশনসমূহে মোট 9+8+7+6+5+4+3+2+1, বা 45 প্রকার বিভিন্ন টিকিট পাওয়া যায়। প্রশ্নে প্রদত্ত 6 খানি বিভিন্ন টিকিট এই 45 প্রকার বিভিন্ন টিকিটেরই 6 খানি। অতএব, 45 প্রকার বিভিন্ন টিকিট হইতে 6 খানি যত প্রকারে নির্বাচন করা যায়, তাহাই হইবে নির্ণেয় সংখ্যা।

$$\therefore \text{ নির্ণেয় সংখ্যা} = {}^{45}C_6 = \frac{45.44.43.42.41.40}{6.5.4.3.2.1}$$
$$= 3 \times 11 \times 43 \times 7 \times 41 \times 20 = \mathbf{8145060}.$$

প্রশ্নমালা 34

(বিবিধ প্রশ্নমালা)

1. n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তুর r-সংখ্যক বস্তু লইয়া গঠিত বিন্যাসসমূহের মোট সংখ্যা P_r দ্বারা সূচিত হইলে, প্রমাণ কর যে,

$$P_1 + \frac{P_2}{2!} + \frac{P_3}{3!} + \frac{P_4}{4!} + \cdots + \frac{P_n}{n!} = 2^n - 1.$$

2. যদি ${}^nC_{r-1}/a = {}^nC_r/b = {}^nC_{r+1}/c$ হয়, তবে n এবং r-এর মান নির্ণয় কর।

3. একটি টেলিগ্রাফের m বাহু আছে। প্রত্যেকটি বাহুকে n বিভিন্ন অবস্থানে রাখিতে পারা যায়। সবগুলি বাহু একযোগে লইয়া একটি সঙ্কেত দিতে হইলে, টেলিগ্রাফটি দ্বারা যতগুলি সঙ্কেত দেওয়া যায়, তাহার সংখ্যা নির্ণয় কর।

4. একজন ভদ্রলোক 12 জন বন্ধুকে নৈশভোজে নিমন্ত্রণ করেন। 6 জনকে এক টেবিলে আর অপর 6 জনকে অন্য টেবিলে বসান; টেবিল দুইটি গোলাকার। তিনি অতিথিদিগকে কতপ্রকারে বসাইতে পারেন ?

[ইঙ্গিত : অনুচ্ছেদ 8·11 দ্রষ্টব্য অনুসারে সমবায়-সংখ্যা $\dfrac{\lfloor 2m}{(\lfloor m)^2}$ হয়; যেহেতু যে-কোন দলটিকে যে-কোন এক টেবিলে বসানো যায়। অতএব, নির্ণেয় সমবায়-সংখ্যা $\dfrac{\lfloor 12}{(\lfloor 6)^2}$. ইহা হইতে নির্ণেয় বিন্যাস-সংখ্যা নির্ণীত হইবে।]

5. কোন বীজগণিতীয় প্রশ্নমালার পুস্তকে সমান্তর-শ্রেণীর 15টি উদাহরণ, বিন্যাস ও সমবায়ের 20টি উদাহরণ এবং দ্বিপদ উপপাদ্যের 18টি উদাহরণ আছে। প্রত্যেক বিষয় হইতে অনধিক দুইটি করিয়া উদাহরণ একজন শিক্ষক তাঁহার ছাত্রের জন্য কতপ্রকারে বাছাই (select) করিতে পারেন ?

6. ৪টি একই প্রকারের বস্তুসহ মোট 16টি বস্তুর ৪টি করিয়া লইয়া মোট সমবায়সমূহের সংখ্যা নির্ণয় কর।

7. *length, stroke* এবং *number* শব্দ কয়টির প্রত্যেকটি হইতে অন্ততপক্ষে 4টি করিয়া অক্ষর লইয়া কতগুলি বিভিন্ন সমবায় গঠিত হইতে পারে?

8. *random, noble* এবং *integral* শব্দ কয়টির প্রত্যেকটি হইতে অন্ততপক্ষে একটি অক্ষর লইয়া কতগুলি বিভিন্ন সমবায় গঠিত হইতে পারে?

9. $2a, 3a, \ldots\ldots, na$-সংখ্যক বস্তু-সংবলিত $(n-1)$-সংখ্যক ভাগ আছে। প্রমাণ কর যে, প্রথম ভাগ হইতে a-সংখ্যক বস্তু, দ্বিতীয় ভাগ হইতে $2a$-সংখ্যক বস্তু এবং অনুরূপভাবে প্রত্যেক ভাগ হইতে লইয়া সমবায় গঠিত হইলে, মোট সমবায়ের সংখ্যা $\frac{(na)\,!}{(n\,!)^n}$.

10. (a_1, a_2, a_3, a_4), (b_1, b_2, b_3) এবং (c_1, c_2)—এই তিন শ্রেণীর অক্ষরগুলি লইয়া গঠিত সমবায়সমূহের মধ্যে যাহাতে কোন শ্রেণীর দুইটি অক্ষর থাকিবে না, সেইরূপ সমবায়সমূহের সংখ্যা নির্ণয় কর।

11. n-সংখ্যক কামরার প্রত্যেক কামরায় n-সংখ্যক কাউন্টার (counter) আছে; উহাদের যে-কোন দুইটি একই রকমে চিহ্নিত নহে। প্রমাণ কর যে, কাউন্টারগুলি লইয়া গঠিত সমবায়সমূহের সংখ্যা যাহাতে একই কামরার 2টি কাউন্টার থাকিবে না $=(n+1)^n-1$.

12. দেখাও যে, 1, 2, 3, ইত্যাদি 10টি অঙ্ক দ্বারা গঠিত 1000 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর এবং 5 দ্বারা বিভাজ্য সংখ্যাসমূহের সংখ্যা $=154$.

13. 2 খানা নীল, 1 খানা সাদা, 1 খানা লাল এবং 1 খানা কালো—এই 5 খানা পতাকার সাহায্যে কতগুলি বিভিন্ন সঙ্কেত করা যাইতে পারে?

14. এক ভদ্রলোক তাঁহার $(m+n)$-সংখ্যক বন্ধুকে নৈশভোজে নিমন্ত্রণ করেন এবং m-সংখ্যক বন্ধুকে এক গোল টেবিলে এবং n-সংখ্যক বন্ধুকে অন্য গোল টেবিলে বসান। কতপ্রকারে তিনি বন্ধুদিগকে বসাইতে পারেন, তাহার সংখ্যা নির্ণয় কর।

15. *thatch* শব্দটির অক্ষরসমূহের 3টি 3টি লইয়া গঠিত সমবায়সমূহের সংখ্যা নির্ণয় কর।

16. *toleration* শব্দটির অক্ষরসমূহের 4টি 4টি লইয়া গঠিত সমবায়সমূহের সংখ্যা নির্ণয় কর।

17. *alliteration* শব্দটির অক্ষরসমূহের 4টি 4টি লইয়া গঠিত সমবায়সমূহের সংখ্যা নির্ণয় কর।

18. *parallelogram* শব্দটির অক্ষরসমূহের 4টি 4টি লইয়া গঠিত সমবায় ও বিন্যাসসমূহের সংখ্যা নির্ণয় কর।

19. *accommodation* শব্দটির অক্ষরসমূহের 7টি 7টি লইয়া গঠিত সমবায়-সমূহের সংখ্যা নির্ণয় কর।

20. 1, 1, 2, 3, 4, 0 অঙ্কগুলির 4টি 4টি লইয়া 1000 অপেক্ষা বৃহত্তর যতগুলি সংখ্যা গঠন করা যাইতে পারে, তাহাদের সংখ্যা নির্ণয় কর।

21. 3 খানা গণিতের পুস্তক, 4 খানা বিজ্ঞানের পুস্তক এবং 5 খানা সাহিত্যের পুস্তকের মধ্য হইতে (i) প্রত্যেক বিষয়ের একখানা পুস্তক লইয়া, (ii) প্রত্যেক বিষয়ের অন্ততপক্ষে একখানা পুস্তক লইয়া গঠিত সমবায়ের সংখ্যা নির্ণয় কর।

22. কলিকাতা হইতে গোয়ালন্দগামী একখানা মেলগাড়ী মধ্যবর্তী 12টি স্টেশনে থামে। 75 জন যাত্রী মধ্যবর্তী স্টেশন হইতে একটি দ্বিতীয় শ্রেণীর কামরায় বিভিন্ন টিকিট লইয়া উঠিল। তাহাদের নিকট কতপ্রকারের টিকিট থাকিতে পারে ?

23. প্রমাণ কর যে, m এবং n এই দুই শ্রেণীর সমান্তরাল সরল রেখাসমূহের ছেদনে যে সমস্ত সামান্তরিক উৎপন্ন হইতে পারে, তাহাদের সংখ্যা

$$=\tfrac{1}{4}mn(m-1)(n-1).$$

24. কোন সমতলে অবস্থিত n-সংখ্যক বিন্দু অনির্দিষ্ট সরল রেখা দ্বারা সম্ভাব্য সকল প্রকারে যুক্ত হইলে, এবং একটি সরল রেখা আর একটির উপর সমাপতিত বা একটি সরল রেখা অপর একটি সরল রেখার সমান্তরাল না হইলে, বা মূল n বিন্দু ব্যতীত অপর কোন বিন্দুতে তিনটি সরল রেখা একবিন্দুগামী না হইলে, প্রমাণ কর যে, মূল n-বিন্দুগুলি ব্যতীত, সরল রেখাসমূহের ছেদবিন্দুর সংখ্যা হইবে

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{8}.$$

25. প্রমাণ কর যে,

$${}^{m+n}C_r={}^{m}C_r+{}^{m}C_{r-1}.{}^{n}C_1+{}^{m}C_{r-2}.{}^{n}C_2+\cdots+{}^{m}C_1.{}^{n}C_{r-1}+{}^{n}C_r.$$

[$(m+n)$-সংখ্যক বস্তুকে m-সংখ্যক এবং n-সংখ্যক বস্তু-সংবলিত দুইটি ভাগে ভাগ করিয়া, (1) m-সংখ্যকের ভাগ হইতেই r-সংখ্যকটি করিয়া লইয়া, (2) m-সংখ্যকের ভাগ হইতে $(r-1)$টি করিয়া এবং n-সংখ্যকের ভাগ হইতে 1টি করিয়া লইয়া, (3) m-সংখ্যকের ভাগ হইতে $(r-2)$টি করিয়া এবং n-সংখ্যকের ভাগ হইতে 2টি করিয়া লইয়া, ইত্যাদিরূপে সমবায়সমূহ গঠন করিলে $(m+n)$-সংখ্যক বস্তু হইতে r-সংখ্যকটি করিয়া লইয়া গঠিত সকল সমবায়ই পাওয়া যাইবে।]

নবম অধ্যায়

ধনাত্মক ও অখণ্ড সূচকের ক্ষেত্রে দ্বিপদ উপপাদ্য

(Binomial Theorem for Positive Integral Index)

9·1. দ্বিপদ রাশি : দুইটি পদযুক্ত রাশিমালাকে দ্বিপদ রাশি (Binomial) বলে। $(a+x)$, $(1+x)$, $(x+y)$, $(2x+3y)$ ইত্যাদি দ্বিপদ রাশি।

9·2. দ্বিপদ উপপাদ্য : যে বীজগণিতীয় সূত্রসাহায্যে দ্বিপদ রাশির কোন ঘাতকে বিস্তৃত করিয়া একটি শ্রেণীর আকারে প্রকাশ করা যায়, তাহাকে দ্বিপদ উপপাদ্য (Binomial Theorem) বলে এবং শ্রেণীটিকে ঐ ঘাতের বিস্তৃতি (expansion) বলা হয়।

দ্বিপদ রাশিটির ঘাতের সূচক ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হইলে, উপপাদ্যটিকে **ধনাত্মক এবং পূর্ণসূচকবিশিষ্ট ঘাত-সম্প্রসারক দ্বিপদ উপপাদ্য** (Binomial theorem for positive integral index) বলা হয়।

9·3. ধনাত্মক এবং পূর্ণসূচকবিশিষ্ট ঘাতসম্প্রসারক দ্বিপদ উপপাদ্য : n ধনাত্মক এবং পূর্ণসংখ্যা হইলে প্রমাণ করিতে হইবে যে,

$$(a+x)^n = a^n + {}^nC_1 a^{n-1}x + {}^nC_2 a^{n-2}x^2 + {}^nC_3 a^{n-3}x^3 + \cdots\cdots + {}^nC_r a^{n-r}x^r + \cdots\cdots + x^n \quad \cdots \quad (1)$$

$$= a^n + na^{n-1}x + \frac{n(n-1)}{\lfloor 2} a^{n-2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{\lfloor 3} a^{n-3}x^3 + \cdots\cdots + \frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)}{\lfloor r} a^{n-r}x^r + \cdots\cdots + x^n. \quad \cdots \quad (2)$$

$(a+x)^n = n$-সংখ্যক $(a+x)$-এর ক্রমিক গুণফল,

$= (a+x)(a+x)\cdots\cdots n$-সংখ্যক গুণক পর্যন্ত।

এই n-সংখ্যক গুণকের ক্রমিক গুণফলের প্রত্যেকটি পদ হইবে উক্ত n-সংখ্যক গুণকের প্রত্যেকটি হইতে একটি করিয়া লইয়া যে n-সংখ্যক অক্ষর পাওয়া যায়, তাহাদের গুণফল। প্রতিটি গুণক হইতে একটি করিয়া লইয়া এই n-সংখ্যক অক্ষর নির্বাচনের সময়

(ক) উক্ত n-সংখ্যক গুণকের কতকগুলি হইতে x এবং বাকীগুলি হইতে a লওয়া যায় ;

(খ) সবগুলি হইতেই a লওয়া যায় ; আবার,

এবং (গ) সবগুলি হইতেই x-ও লওয়া যায়।

স্পষ্টত, এই তিনপ্রকার বিভিন্ন উপায় নির্বাচন করিলেই, উক্ত ক্রমিক গুণফলের সব কয়টি পদ পাওয়া যাইবে।

এখন, (ক) ধরা যাক n-সংখ্যক গুণকের মধ্যে r-সংখ্যক গুণকের প্রত্যেকটি হইতে যেন x এবং বাকী $(n-r)$-সংখ্যক গুণকের প্রত্যেকটি হইতে যেন a লওয়া হইল। এই সকল অক্ষরের গুণন হইতে $a^{n-r}x^r$ সম্বলিত পদটি পাওয়া যায়। কিন্তু n-সংখ্যক গুণক হইতে, r-সংখ্যক যে গুণকগুলির প্রত্যেকটি হইতে x অক্ষরটি লওয়া হইল, তাহাদের ${}^nC_r$ উপায়ে নির্বাচন করা যায় বলিয়া, ${}^nC_r$-সংখ্যক $a^{n-r}x^r$ সম্বলিত পদ পাওয়া যাইবে; অতএব, উক্ত ক্রমিক গুণফলে $a^{n-r}x^r$ পদটির সহগ হইবে ${}^nC_r$; তাহা হইলে পদটি হইল ${}^nC_ra^{n-r}x^r$. স্পষ্টই, r-এর মান 0 হইতে n পর্যন্ত যে-কোন সংখ্যাই হইতে পারে; কিন্তু ইহার মান কখনই n অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে না। r-এর এই সকল বিভিন্ন মানের জন্য ${}^nC_ra^{n-r}x^r$-জাতীয় বিভিন্ন পদ পাওয়া যাইবে।

(খ) উপরে (ক)-এ $r=0$ ধরিলে, কোন গুণক হইতেই x অক্ষরটি লওয়া হইবে না, n-সংখ্যক গুণকের সবগুলি হইতে a অক্ষরটি লওয়া হইবে। অতএব, এক্ষেত্রে, পদটি হইবে a^n কেননা, ইহার সহগ হইবে ${}^nC_0$ বা 1. স্পষ্টই, ${}^nC_ra^{n-r}x^r$-এ $r=0$ বসাইয়া, সহগ-সমেত a^n-সম্বলিত পদটি পাওয়া যায়।

(গ) $r=n$ ধরিলে, (ক) হইতে দেখা যায়, কোন গুণক হইতেই a অক্ষরটি লওয়া হইবে না, n-সংখ্যক গুণকের সবগুলি হইতে x অক্ষরটি লওয়া হইবে। অতএব, এক্ষেত্রে, x^n পদটি পাওয়া যাইবে, কেননা, ইহার সহগ হইবে ${}^nC_n$ বা 1. ইহাও ${}^nC_ra^{n-r}x^r$-এ $r=n$ বসাইয়া পাওয়া যায়।

অতএব, দেখা গেল উক্ত ক্রমিক গুণফলের সহগ-সমেত সকল পদই ${}^nC_ra^{n-r}x^r$-এ পর পর $r=0, 1, 2, \cdots, n$ বসাইয়া পাওয়া যায়।

$$\begin{aligned}\therefore\quad (a+x)^n &= a^n + {}^nC_1a^{n-1}x + {}^nC_2a^{n-2}x^2 + {}^nC_3a^{n-3}x^3 + \cdots\cdots \\ &\qquad + {}^nC_ra^{n-r}x^r + \cdots\cdots x^n \\ &= a^n + na^{n-1}x + \frac{n(n-1)}{\lfloor 2}\, a^{n-2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{\lfloor 3}\, a^{n-3}x^3 \\ &\qquad + \cdots\cdots + \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{\lfloor r}\, a^{n-r}x^r + \cdots + x^n.\end{aligned}$$

বিকল্প প্রমাণ :

প্রকৃত গুণন দ্বারা দেখা যায়,

$$\begin{aligned}(a+x)^2 &= a^2 + 2ax + x^2 = a^2 + {}^2C_1a^{2-1}x + x^2, \\ (a+x)^3 &= a^3 + 3a^2x + 3ax^2 + x^3 \\ &= a^3 + {}^3C_1a^{3-1}x + {}^3C_2a^{3-2}x^2 + x^3.\end{aligned}$$

$n=2$ এবং 3-এর ক্ষেত্রে দ্বিপদ উপপাদ্যটি সত্য প্রমাণিত হইল।

এখন, ধরা যাক, n-এর কোন বিশেষ মান m-এর জন্য উপপাদ্যটি সত্য। তাহা হইলে,

$$(a+x)^m = a^m + {}^mC_1a^{m-1}x + {}^mC_2a^{m-2}x^2 + {}^mC_3a^{m-3}x^3 + \cdots + {}^mC_ra^{m-r}x^r + \cdots\cdots + x^m. \quad \cdots \quad (A)$$

(A)-এর উভয় পক্ষকে $(a+x)$ দ্বারা গুণ করিলে,

$$(a+x)^{m+1} = (a+x)\{a^m + {}^mC_1a^{m-1}x + {}^mC_2a^{m-2}x^2 + {}^mC_3a^{m-3}x^3 + \cdots + {}^mC_ra^{m-r}x^r + \cdots + x^m\}$$

$$= a^{m+1} + ({}^mC_1 + 1)a^mx + ({}^mC_2 + {}^mC_1)a^{m-1}x^2 + ({}^mC_3 + {}^mC_2)a^{m-2}x^3 + \cdots + ({}^mC_r + {}^mC_{r-1})a^{m-r+1}x^r + \cdots + x^{m+1}.$$

এখন, ${}^mC_r + {}^mC_{r-1} = {}^{m+1}C_r$. [অনুচ্ছেদ 8·4 দ্রষ্টব্য] ইহার উভয় পক্ষে $r = 1, 2, 3, \cdots, m$ বসাইলে,

${}^mC_1 + {}^mC_0$ অর্থাৎ ${}^mC_1 + 1 = {}^{m+1}C_1$, ${}^mC_2 + {}^mC_1 = {}^{m+1}C_2$, ${}^mC_3 + {}^mC_2 = {}^{m+1}C_3$, ইত্যাদি।

$$\therefore \quad (a+x)^{m+1} = a^{m+1} + {}^{m+1}C_1a^mx + {}^{m+1}C_2a^{m-1}x^2 + {}^{m+1}C_3a^{m-2}x^3 + \cdots\cdots + {}^{m+1}C_ra^{m-r+1}x^r + \cdots\cdots + x^{m+1}.$$

অতএব, দেখা গেল উপপাদ্যটিকে $n = m$-এর জন্য সত্য মনে করিলে, উহা $n = m+1$-এর জন্যও সত্য। কিন্তু দেখা গিয়াছে, উপপাদ্যটি $n = 3$-এর জন্য সত্য; অতএব, উহা $n = 3+1$, বা 4-এর জন্যও সত্য; আবার, উপপাদ্যটি $n = 4$-এর জন্য সত্য বলিয়া, $n = 4+1$ বা 5-এর জন্যও সত্য। এইরূপ অগ্রসর হইলে দেখা যায়, n-এর সকল ধনাত্মক এবং পূর্ণ মানের জন্যই উপপাদ্যটি সত্য। অতএব, n একটি ধনাত্মক এবং পূর্ণসংখ্যা হইলে,

$$(a+x)^n = a^n + {}^nC_1a^{n-1}x + {}^nC_2a^{n-2}x^2 + {}^nC_3a^{n-3}x^3 + \cdots\cdots + {}^nC_ra^{n-r}x^r + \cdots\cdots + x^n$$

$$= a^n + na^{n-1}x + \frac{n(n-1)}{\lfloor 2}a^{n-2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{\lfloor 3}a^{n-3}x^3 + \cdots + \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{\lfloor r}a^{n-r}x^r + \cdots + x^n.$$

অনুসিদ্ধান্ত। (1) এবং (2)-এর দক্ষিণ পক্ষ $(a+x)^n$-এর বিস্তৃতি। ${}^nC_ra^{n-r}x^r$-এ r-এর বিভিন্ন মান বসাইয়া এই বিস্তৃতির পদগুলি পাওয়া গিয়াছে। এখন, r-এর মান $0, 1, 2, \ldots, n$ এই $(n+1)$-সংখ্যক সংখ্যা হইতে পারে বলিয়া বিস্তৃতির মোট পদ-সংখ্যা হইবে **n+1.**

দ্রষ্টব্য। $(a+x)^n$-এর বিস্তৃতির ${}^nC_0, {}^nC_1$ প্রভৃতি সহগগুলিকে **দ্বিপদ সহগ** (Binomial coefficients) বলা হয়।

9·4. $(1+x)^n$-এর বিস্তৃতি নির্ণয়।

কোন সূত্রের সাহায্য না লইয়া প্রমাণ কর যে, n একটি ধনাত্মক এবং পূর্ণসংখ্যা হইলে,

$$(1+x)^n = 1 + {}^nC_1x + {}^nC_2x^2 + {}^nC_3x^3 + \cdots + {}^nC_rx^r + \cdots + x^n \quad \cdots \quad (1)$$

$$= 1 + nx + \frac{n(n-1)}{\lfloor 2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{\lfloor 3}x^3 + \cdots$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{\lfloor r}x^r + \cdots\cdots + x^n. \quad \cdots \quad (2)$$

প্রকৃত গুণন দ্বারা দেখা যায়,

$$(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2 = 1 + {}^2C_1x + x^2,$$

$$(1+x)^3 = 1 + 3x + 3x^2 + x^3 = 1 + {}^3C_1x + {}^3C_2x^2 + x^3.$$

$\therefore$ দেখা গেল, $n = 2$ এবং 3-এর ক্ষেত্রে দ্বিপদ উপপাদ্যটি সত্য।

এখন, ধরা যাক, n-এর কোন বিশেষ মান m-এর জন্য উপপাদ্যটি সত্য। তাহা হইলে,

$$(1+x)^m = 1 + {}^mC_1x + {}^mC_2x^2 + {}^mC_3x^3 + \cdots\cdots$$
$$+ {}^mC_rx^r + \cdots + x^m. \quad \cdots \quad \cdots \quad (3)$$

(3)-এর উভয় পক্ষকে $(1+x)$ দ্বারা গুণ করিলে,

$$(1+x)^{m+1} = (1+x)\{1 + {}^mC_1x + {}^mC_2x^2 + {}^mC_3x^3 + \cdots\cdots$$
$$+ {}^mC_rx^r + \cdots + x^m\}$$

$$= 1 + ({}^mC_1 + 1)x + ({}^mC_2 + {}^mC_1)x^2 + ({}^mC_3 + {}^mC_2)x^3$$
$$+ \cdots + ({}^mC_r + {}^mC_{r-1})x^r + \cdots\cdots + x^{m+1}.$$

এখন, ${}^mC_r + {}^mC_{r-1} = {}^{m+1}C_r$. ইহার উভয় পক্ষে $r = 1, 2, 3, \ldots, m$ বসাইলে,
${}^mC_1 + {}^mC_0$, অর্থাৎ ${}^mC_1 + 1 = {}^{m+1}C_1$, ${}^mC_2 + {}^mC_1 = {}^{m+1}C_2$,
${}^mC_3 + {}^mC_2 = {}^{m+1}C_3$, ইত্যাদি।

$$\therefore \quad (1+x)^{m+1} = 1 + {}^{m+1}C_1x + {}^{m+1}C_2x^2 + {}^{m+1}C_3x^3 + \cdots$$
$$+ {}^{m+1}C_rx^r + \cdots\cdots + x^{m+1}.$$

অতএব, দেখা গেল, উপপাদ্যটিকে $n = m$-এর জন্য সত্য মনে করিলে, উহা $n = m+1$-এর জন্যও সত্য। কিন্তু দেখা গিয়াছে, উপপাদ্যটি $n = 3$-এর জন্য সত্য; অতএব, উহা $n = 3+1$ বা 4-এর জন্যও সত্য; আবার উপপাদ্যটি $n = 4$-এর জন্যও

সত্য বলিয়া, $n=4+1$, বা, 5-এর জন্যও সত্য। এইরূপে অগ্রসর হইলে দেখা যায়, n-এর সকল ধনাত্মক এবং পূর্ণ মানের জন্যই উপপাদ্যটি সত্য। অতএব, n একটি ধনাত্মক এবং পূর্ণসংখ্যা হইলে,

$$(1+x)^n = 1 + {}^nC_1x + {}^nC_2x^2 + {}^nC_3x^3 + \cdots + {}^nC_rx^r + \cdots + x^n$$
$$= 1 + nx + \frac{n(n-1)}{\lfloor 2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{\lfloor 3}x^3 + \cdots$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{\lfloor r}x^r + \cdots + x^n.$$

দ্রষ্টব্য। ইহা স্পষ্ট যে, $(a+x)^n$ ও $(1+x)^n$-এর বিস্তৃতি-দুইটিতে সহগগুলি অভিন্ন। প্রকৃতপক্ষে, $a=1$ বসাইলে, বিশেষ ক্ষেত্রে $(a+x)^n$-এর রূপই হয় $(1+x)^n$; সুতরাং, $(1+x)^n = 1 + {}^nC_1x + {}^nC_2x^2 + \cdots + {}^nC_rx^r + \cdots + x^n.$

অনুসিদ্ধান্ত। $(a+x)^n$ এবং $(1+x)^n$-এর বিস্তৃতি নির্ণয়-কালে x এবং a-র মানের উপর কোন বিধি-নিষেধ আরোপ করা হয় নাই। বিস্তৃতি-দুইটি a এবং x-এর সকল মানের জন্যই সত্য। অতএব, x-এর স্থলে $-x$ লিখিয়া,

$$(a-x)^n = a^n - {}^nC_1a^{n-1}x + {}^nC_2a^{n-2}x^2 - {}^nC_3a^{n-3}x^3 + \cdots$$
$$+ (-1)^r\,{}^nC_ra^{n-r}x^r + \cdots\cdots + (-1)^nx^n.$$
$$(1-x)^n = 1 - {}^nC_1x + {}^nC_2x^2 - {}^nC_3x^3 + \cdots + (-1)^r\,{}^nC_rx^r$$
$$+ \cdots + (-1)^nx^n.$$

দেখা যাইতেছে :

(1) $(a+x)^n$ এবং $(a-x)^n$-এর সহগগুলি একই সাংখ্যমান (numerical value)-বিশিষ্ট ; আবার, $(1+x)^n$ এবং $(1-x)^n$-এর সহগগুলিও একই সাংখ্যমান-বিশিষ্ট।

(2) $(a-x)^n$ ও $(1-x)^n$ উভয়েরই প্রথম পদ হইতে আরম্ভ করিয়া একান্তর পদগুলি ধনাত্মক এবং দ্বিতীয় পদ হইতে আরম্ভ করিয়া একান্তর পদগুলি ঋণাত্মক।

(3) n যুগ্মসংখ্যা হইলে, $(a-x)^n$ ও $(1-x)^n$ উভয় ক্ষেত্রেই শেষ পদটি ধনাত্মক এবং অযুগ্ম হইলে, উভয় ক্ষেত্রেই শেষ পদটি ঋণাত্মক।

9·5. বিস্তৃতির সাধারণ পদ।

${}^nC_ra^{n-r}x^r$-এ r-এর বিভিন্ন মান বসাইয়া বিস্তৃতির সকল পদই পাওয়া যায় বলিয়া, ${}^nC_ra^{n-r}x^r$-কে বিস্তৃতির সাধারণ পদ (general term) বলা হয়।

এখন, প্রথম পদ $= a^n = {}^nC_0a^{n-0}x^0$; স্পষ্টই, ইহা সাধারণ পদ ${}^nC_ra^{n-r}n^r$-এ, $r=0$ বসাইয়া পাওয়া গেল ;

দ্বিতীয় পদ $= {}^nC_1a^{n-1}x$; স্পষ্টই ইহা সাধারণ পদে

$r=1$ বসাইয়া পাওয়া যায় ;

তৃতীয় পদ $= {}^nC_2a^{n-2}x^2$; " " " " $r=2$ " " " ;

চতুর্থ পদ $= {}^nC_3a^{n-3}x^3$; " " " " $r=3$ " " " ;

ইত্যাদি, ইত্যাদি, ইত্যাদি।

অতএব, দেখা গেল, $r=0$ হইলে, পদটি হয় প্রথম, অর্থাৎ $(0+1)$-তম ;

$r=1$ " " " দ্বিতীয়, অর্থাৎ $(1+1)$-তম ;

$r=2$ " " " তৃতীয়, অর্থাৎ $(2+1)$-তম ;

$r=3$ " " " চতুর্থ, অর্থাৎ $(3+1)$-তম ;

ইত্যাদি, ইত্যাদি, ইত্যাদি।

অতএব, $\mathbf{{}^nC_ra^{n-r}x^r}$ পদটি হইবে বিস্তৃতির $\mathbf{(r+1)}$-তম পদ।

অতএব, **$(r+1)$-তম** পদটি $(a+x)^n$-এর বিস্তৃতির সাধারণ পদ, এবং এই **সাধারণ পদ**

$$= {}^nC_ra^{n-r}x^r = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{\lfloor r} a^{n-r}x^r.$$

এইরূপে, $(1+x)^n$-এর বিস্তৃতির **সাধারণ পদ**

= ইহার $(r+1)$-তম পদ

$$= {}^nC_rx = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)}{\lfloor r} x^r.$$

অনুসিদ্ধান্ত। $(a-x)^n$-এর বিস্তৃতির সাধারণ পদ

= ইহার $(r+1)$-তম পদ $=(-1)^r\,{}^nC_ra^{n-r}x^r$;

এবং $(1-x)^n$-এর বিস্তৃতির সাধারণ পদ

= ইহার $(r+1)$-তম পদ $=(-1)^r\,{}^nC_rx^r$.

দ্রষ্টব্য। বিস্তৃতির সাধারণ পদ ${}^nC_ra^{n-r}x^r$-টিকে লক্ষ্য করিলে বুঝা যায় :

(1) বিস্তৃতির প্রত্যেক পদে a এবং x-এর সূচক-সমষ্টি n ;

(2) বিস্তৃতির প্রত্যেক পদে

(ক) সহগ ${}^nC_r$-এ r-এর মান হইবে পদটির ক্রমিক সংখ্যা (ordinal number of the term) অপেক্ষা 1 কম ;

(খ) দ্বিপদ রাশিটির দ্বিতীয় পদের x-এর সূচক হইবে ${}^nC_r$-এর r-এর সমান, অর্থাৎ পদটির ক্রমিক সংখ্যা অপেক্ষা 1 কম ; এবং

(গ) দ্বিপদ রাশিটির প্রথম পদ a-এর সূচক হইবে সহগ ^nC_r-এর n হইতে r-এর বিয়োগফল $(n-r)$, অথবা, বলা চলে, x-এর সূচক n হইতে r-এর বিয়োগফল।

যেমন, $(a+x)^n$-এর বিস্তৃতির

$$20\text{-তম পদ} = {}^nC_{19}a^{n-19}x^{19},$$

$$33\text{-তম পদ} = {}^nC_{32}a^{n-32}x^{32}.$$

$\left(2x+\dfrac{3}{y}\right)^{19}$-এর বিস্তৃতির

অষ্টম পদটি হইবে ${}^{19}C_7(2x)^{19-7}\left(\dfrac{3}{y}\right)^7,$

অর্থাৎ, ${}^{19}C_7(2x)^{12}\left(\dfrac{3}{y}\right)^7,$

অর্থাৎ, $\dfrac{19.18.17.16.15.14.13}{7.6.5.4.3.2.1}2^{12}.x^{12}.3^7.\dfrac{1}{y^7},$

অর্থাৎ, $451373285376\dfrac{x^{12}}{y^7}.$

9·6. বিস্তৃতির মধ্যপদ।

$(a+x)^n$-এর বিস্তৃতির মধ্যপদ (middle term) নির্ণয় করিতে হইবে।

[*To find the middle term (or terms) in the expansion of* $(a+x)^n$.]

(ক) n যেন একটি যুগ্মসংখ্যা এবং ইহা $=2m$; তাহা হইলে, $m=\dfrac{n}{2}$.

এক্ষেত্রে, বিস্তৃতির পদ-সংখ্যা $=n+1=2m+1$; স্পষ্টই $(2m+1)$ একটি বিযুগ্মসংখ্যা। অতএব, বিস্তৃতির **একটিমাত্র** মধ্যপদ থাকিবে, এবং বিস্তৃতির $(m+1)$-তম পদ, অর্থাৎ, $\left(\dfrac{n}{2}+1\right)$-তম পদ।

$\therefore$ n একটি যুগ্মসংখ্যা হইলে, বিস্তৃতির মধ্যপদ $={}^nC_{\frac{1}{2}n}a^{n-\frac{1}{2}n}x^{\frac{1}{2}n}$

$$=\frac{\lfloor n}{(\lfloor \tfrac{1}{2}n)^2}a^{\frac{1}{2}n}x^{\frac{1}{2}n}.$$

(খ) এখন, n যেন একটি অযুগ্মসংখ্যা এবং ইহা $=2m+1$; তাহা হইলে,

$$m=\frac{n-1}{2}.$$

এক্ষেত্রে, বিস্তৃতির পদ-সংখ্যা $=n+1=2m+2$; স্পষ্টই $(2m+2)$ একটি যুগ্মসংখ্যা। অতএব, বিস্তৃতির দুইটি মধ্যপদ থাকিবে, এবং ইহারা বিস্তৃতির

$(m+1)$-তম এবং $(m+2)$-তম পদ, অর্থাৎ, $\left(\frac{n-1}{2}+1\right)$-তম এবং $\left(\frac{n-1}{2}+2\right)$-তম পদ, অর্থাৎ, $\left(\frac{n-1}{2}+1\right)$-তম এবং $\left(\frac{n+1}{2}+1\right)$-তম পদ।

$\therefore$ n অযুগ্মসংখ্যা হইলে, বিস্তৃতির দুইটি মধ্যপদ থাকিবে, এবং ইহারা

$$^nC_{\frac{n-1}{2}}\, a^{n-\frac{n-1}{2}}\, x^{\frac{n-1}{2}} \text{ এবং } ^nC_{\frac{n+1}{2}}\, a^{n-\frac{n+1}{2}}\, x^{\frac{n+1}{2}},$$

$$\text{অর্থাৎ, } \frac{\lfloor n}{\lfloor\frac{n-1}{2}\,\lfloor\frac{n+1}{2}}\, a^{\frac{n+1}{2}}\, x^{\frac{n-1}{2}} \text{ এবং } \frac{\lfloor n}{\lfloor\frac{n+1}{2}\,\lfloor\frac{n-1}{2}}\, a^{\frac{n-1}{2}}\, x^{\frac{n+1}{2}}.$$

দ্রষ্টব্য। n অযুগ্মসংখ্যা হইলে, লক্ষ্য করিতে হইবে, মধ্যপদ-দুইটির সহগ-দুইটি একই।

n অযুগ্মসংখ্যা হইলে, $(a-x)^n$-এর বিস্তৃতির মধ্যপদ-দুইটির সহগ-দুইটির একটি ধনাত্মক এবং অন্যটি ঋণাত্মক হইবে, কিন্তু তাহাদের সাংখ্যমান একই হইবে।

9·7. সমদূরবর্তী পদযুগ্ম।

$(a+x)^n$-এর বিস্তৃতিতে প্রথম এবং শেষ হইতে সমদূরবর্তী পদযুগ্মের সহগদ্বয় সমান। [*In the expansion of $(a+x)^n$, the coefficients of the terms equidistant from the beginning and the end are equal.*]

বিস্তৃতির প্রথম হইতে $(r+1)$-তম পদের সহগ ^nC_r.

এখন, বিস্তৃতিটিতে মোট $(n+1)$-সংখ্যক পদ থাকায়, শেষ হইতে $(r+1)$-তম পদটির পূর্বে $\{(n+1)-(r+1)\}$, অর্থাৎ $(n-r)$-সংখ্যক পদ থাকিবে; অতএব এই পদটি বিস্তৃতিটির প্রথম হইতে $(n-r+1)$-তম পদ, এবং সেইজন্য ইহার সহগ $^nC_{n-r}$.

কিন্তু, $^nC_r = {}^nC_{n-r}$.

$\therefore$ বিস্তৃতিটির প্রথম হইতে $(r+1)$-তম পদের সহগ = বিস্তৃতিটির শেষ হইতে $(r+1)$-তম পদের সহগ।

উদা. 1. $(2x-3y)^5$-এর বিস্তৃতি নির্ণয় কর।

$$(2x-3y)^5 = (2x)^5 + 5.(2x)^4(-3y). + \frac{5.4}{1.2}(2x)^3.(-3y)^2$$
$$+ \frac{5.4.3}{1.2.3}(2x)^2(-3y)^3 + \frac{5.4.3.2}{1.2.3.4}(2x)(-3y)^4 + \frac{5.4.3.2.1}{1.2.3.4.5}(-3y)^5$$
$$= 32x^5 - 240x^4y + 720x^3y^2 - 1080x^2y^3 + 810xy^4$$
$$-243y^5.$$

উদা. 2. $(\frac{1}{2}x-2y)^7$-এর বিস্তৃতি নির্ণয় কর।

$$(\tfrac{1}{2}x-2y)^7=\left\{\frac{x}{2}\left(1-\frac{4y}{x}\right)\right\}^7=\left(\frac{x}{2}\right)^7\left(1-\frac{4y}{x}\right)^7$$

$$=\frac{x^7}{128}\left\{1+{}^7C_1\left(-\frac{4y}{x}\right)+{}^7C_2\left(-\frac{4y}{x}\right)^2+{}^7C_3\left(-\frac{4y}{x}\right)^3\right.$$

$$+{}^7C_4\left(-\frac{4y}{x}\right)^4+{}^7C_5\left(-\frac{4y}{x}\right)^5+{}^7C_6\left(-\frac{4y}{x}\right)^6$$

$$\left.+{}^7C_7\left(-\frac{4y}{x}\right)^7\right\}$$

$$=\frac{x^7}{128}\left\{1-7\left(\frac{4y}{x}\right)+\frac{7.6}{1.2}\left(\frac{4y}{x}\right)^2-\frac{7.6.5}{1.2.3}\left(\frac{4y}{x}\right)^3\right.$$

$$\left.+\frac{7.6.5}{1.2.3}\left(\frac{4y}{x}\right)^4-\frac{7.6}{1.2}\left(\frac{4y}{x}\right)^5+7\left(\frac{4y}{x}\right)^6-\left(\frac{4y}{x}\right)^7\right\}$$

$$=\frac{x^7}{128}\left\{1-\frac{7.4.y}{x}+\frac{21.4^2.y^2}{x^2}-\frac{35.4^3.y^3}{x^3}\right.$$

$$\left.+\frac{35.4^4.y^4}{x^4}-\frac{21.4^5.y^5}{x^5}+\frac{7.4^6.y^6}{x^6}-\frac{4^7.y^7}{x^7}\right\}$$

$$=\frac{x^7}{128}-\frac{7}{32}x^6y+\frac{21}{8}x^5y^2-\frac{35}{2}x^4y^3+70x^3y^4$$

$$-168x^2y^5+224xy^6-128y^7.$$

উদা. 3. $(a^3+3ab)^9$-এর বিস্তৃতিতে সপ্তম পদ নির্ণয় কর।

নির্ণেয় পদ $={}^9C_6.(a^3)^3.(3ab)^6={}^9C_3(a^3)^3.(3ab)^6$

$$=\frac{9.8.7}{1.2.3}a^9.3^6.a^6.b^6=61236a^{15}b^6.$$

উদা. 4. $(a-x)^{50}$-এর বিস্তৃতিতে 49-তম পদ নির্ণয় কর।

নির্ণেয় পদ $={}^{50}C_{48}.a^2.(-x)^{48}={}^{50}C_2.a^2(-x)^{48}$

$$=\frac{50.49}{1.2}\cdot a^2.(-x)^{48}=1225a^2x^{48}.$$

উদা. 5. $\left(y^2+\frac{c^3}{y}\right)^5$-এর বিস্তৃতিতে y-এর সহগ নির্ণয় কর।

মনে কর, বিস্তৃতিটির $(r+1)$-তম পদে y আছে।

এখন, $(r+1)$-তম পদ $={}^5C_r(y^2)^{5-r}\left(\frac{c^3}{y}\right)^r={}^5C_r.c^{3r}y^{10-3r}.$

এই পদটিতে y থাকিলে, অর্থাৎ y-এর সূচক 1 হইলে, অবশ্যই $10-3r=1$;

$\therefore \quad r=3.$

অতএব, নির্ণেয় সহগ $= {}^5C_3\, c^{3\times 3} = {}^5C_3 c^9 = 10c^9.$

উদা. 6. $\left(x^4 - \dfrac{1}{x^3}\right)^{15}$-এর বিস্তৃতিতে (i) x^{32} এবং (ii) x^{-17}-এর সহগ নির্ণয় কর।

(i) মনে কর, বিস্তৃতিটির $(r+1)$-তম পদে x^{32} আছে।

এখন, $(r+1)$-তম পদ $= {}^{15}C_r (x^4)^{15-r}\left(-\dfrac{1}{x^3}\right)^r$

$$= {}^{15}C_r x^{60-4r}.\frac{(-1)^r}{x^{3r}} = (-1)^r\, {}^{15}C_r x^{60-7r}.$$

এই পদটিতে x^{32} থাকিলে, অর্থাৎ x-এর সূচক 32 হইলে, অবশ্যই $60-7r=32$, বা $7r=60-32$, বা $7r=28$;

$\therefore \quad r=4.$

$\therefore$ নির্ণেয় সহগ $= (-1)^r\, {}^{15}C_r = (-1)^4.{}^{15}C_4$

$$= 1 \times \frac{15.14.13.12}{4.3.2.1}$$

$$= \mathbf{1365.}$$

(ii) মনে কর, বিস্তৃতিটির $(r+1)$-তম পদে x^{-17} আছে।

এখন, $(r+1)$-তম পদ $= {}^{15}C_r (x^4)^{15-r}\left(-\dfrac{1}{x^3}\right)^r$

$$= {}^{15}C_r x^{60-4r}.\frac{(-1)^r}{x^{3r}} = (-1)^r\, {}^{15}C_r x^{60-7r}.$$

এই পদটিতে x^{-17} থাকিলে, অর্থাৎ x-এর সূচক -17 হইলে, অবশ্যই $60-7r=-17$, বা, $7r=77$; $\therefore \quad r=11.$

$\therefore$ নির্ণেয় সহগ $= (-1)^{11}.{}^{15}C_{11} = -1.{}^{15}C_4$

$$= -\frac{15.14.13.12}{4.3.2.1}$$

$$= \mathbf{-1365.}$$

উদা. 7. $\left(x - \dfrac{1}{x^2}\right)^{3n}$-এর বিস্তৃতিতে x-বর্জিত পদটি নির্ণয় কর।

মনে কর, বিস্তৃতিটির $(r+1)$-তম পদে x নাই, অর্থাৎ ঐ পদে x-এর সূচক 0.

এখন, $(r+1)$-তম পদ $= {}^{3n}C_r x^{3n-r}\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)^r = (-1)^r.{}^{3n}C_r x^{3n-3r}.$

এই পদে x না থাকিলে, অর্থাৎ x-এর সূচক 0 হইলে, অবশ্যই $3n-3r=0$;

$\therefore \quad r=n.$

$\therefore$ নির্ণেয় পদ $=(-1)^n\, {}^{3n}C_n=(-1)^n \cdot \dfrac{(3n)!}{n!\,(2n)!}$.

উদা. 8. $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^n$-এর বিস্তৃতিতে যদি x^r-সংবলিত একটি পদ থাকে, প্রমাণ কর যে, উহার সহগ $=\dfrac{\lfloor n}{\lfloor \frac{1}{2}(n-r)\, \lfloor (n+r)}$.

মনে কর, x^r-সংবলিত পদটি বিস্তৃতিটির $(p+1)$-তম পদ।

এখন, $(p+1)$-তম পদ $={}^nC_p x^{n-p}\left(\dfrac{1}{x}\right)^p={}^nC_p x^{n-2p}$. এই পদে x^r থাকিলে, অর্থাৎ x-এর সূচক r হইলে,

$$n-2p=r\ ; \quad \therefore \quad p=\tfrac{1}{2}(n-r).$$

$$\therefore \quad \text{নির্ণেয় সহগ} = {}^nC_p=\frac{\lfloor n}{\lfloor p\, \lfloor n-p}=\frac{\lfloor n}{\lfloor \frac{1}{2}(n-r)\, \lfloor \frac{1}{2}(n+r)}.$$

উদা. 9. $(2x-y)^6$-এর বিস্তৃতিটির মধ্যপদটি নির্ণয় কর।

বিস্তৃতিটিতে 7টি পদ থাকায় উহার একটিমাত্র মধ্যপদ থাকিবে এবং $(\frac{6}{2}+1)$-তম বা চতুর্থ পদটিই হইবে এই মধ্যপদ।

$$\therefore \quad \text{নির্ণেয় মধ্যপদ} = {}^6C_3(2x)^{6-3}(-y)^3$$

$$=(-1)^3.{}^6C_3 2^3.x^3y^3=-1\cdot\frac{6.5.4}{3.2.1}\cdot 8.x^3y^3$$

$$=-160x^3y^3.$$

উদা. 10. x-এর ঘাত-এর ঊর্ধ্বক্রম অনুসারে $(1+2x-3x^2)^8$-এর বিস্তৃতির প্রথম চারিটি পদ নির্ণয় কর।

বিস্তৃতিটিকে x-এর শক্তির ঊর্ধ্বক্রম অনুসারে সাজাইলে প্রথম পদটি হইবে 1, দ্বিতীয়, তৃতীয়, চতুর্থ পদ যথাক্রমে x, x^2 এবং x^3-সংবলিত হইবে ; সুতরাং, এস্থলে বিস্তৃতিটির x^3-সংবলিত পদ পর্যন্তই মাত্র নির্ণয় করিতে হইবে।

$2x-3x^2$-এর পরিবর্তে y বসাইলে,

$$(1+2x-3x^2)^8=(1+y)^8$$

$$=1+8y+\frac{8.7}{2.1}y^2+\frac{8.7.6}{3.2.1}y^3+\cdots\cdots$$

$$=1+8(2x-3x^2)+28(2x-3x^2)^2+56(2x-3x^2)^3+$$
$\cdots x^3$ অপেক্ষা x-এর উচ্চতর ঘাত-সংবলিত পদসমূহ
[y-এর স্থলে $2x-3x^2$ বসাইয়া]

$$=1+8(2x-3x^2)+28(4x^2-12x^3+9x^4)$$
$$+56(8x^3-\cdots)+\cdots\cdots$$
$$=1+16x+88x^2+112x^3\cdots\cdots$$

প্রশ্নমালা 32

1. (a) নিম্নলিখিত রাশিমালাসমূহের বিস্তৃতি নির্ণয় কর (Expand the following):

(i) $(a+2b)^6$; (ii) $(a-3x)^6$;

(iii) $\left(a+\dfrac{1}{a}\right)^6$; (iv) $\left(\dfrac{2x}{3}-\dfrac{3}{2x}\right)^6$.

(b) বিস্তৃতি নির্ণয়পূর্বক সরল কর :
$(x+x\sqrt{y})^5+(x-x\sqrt{y})^5$.

2. মান নির্ণয় কর :
(i) $\{a+\sqrt{a^2-1}\}^6+\{a-\sqrt{a^2-1}\}^6$;
(ii) $(2+3\sqrt{-1})^4+(2-3\sqrt{-1})^4$.

3. $(2x-y)^{11}$-এর বিস্তৃতির দশম পদ নির্ণয় কর।

4. $(x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{3}{2}})^{10}$-এর বিস্তৃতির অষ্টম পদ নির্ণয় কর।

5. $\left(\dfrac{x}{a}-\dfrac{a}{x}\right)^{10}$-এর বিস্তৃতির চতুর্থ পদ নির্ণয় কর।

6. $(x-x^2)^{10}$-এর বিস্তৃতিতে x^{15}-এর সহগ নির্ণয় কর।
[C. U., 1926]

7. $(ax^4-bx)^9$-এর বিস্তৃতিতে x^{18}-এর সহগ নির্ণয় কর।

8. $\left(y+\dfrac{c^3}{y^2}\right)^{10}$-এর বিস্তৃতিতে $\dfrac{1}{y^2}$-এর সহগ নির্ণয় কর।

9. m এবং n ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হইলে, প্রমাণ কর যে, $(1+x)^{m+n}$-এর বিস্তৃতিতে x^m ও x^n-এর সহগদ্বয় সমান। [C. U., 1923,'35]

10. $(x+y)^n$-এর বিস্তৃতিতে x^m-এর সহগ কত ?

11. $\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^{2n+1}$-এর বিস্তৃতিতে x^{2r+1}-এর সহগ নির্ণয় কর।

12. $\left(x-\frac{1}{x}\right)^{3n}$-এর বিস্তৃতিতে $(2n+1)$-তম পদটি নির্ণয় কর।

13. দেখাও যে, $(1+x)^{2n}$-এর বিস্তৃতিতে x^n-এর সহগ $(1+x)^{2n-1}$-এর বিস্তৃতিতে x^{n-1}-এর সহগের দ্বিগুণ। [C. U., 1947]

14. $\left(x-\frac{1}{x}\right)^{4n+1}$-এর বিস্তৃতিতে x^{2n-1}-এর সহগ নির্ণয় কর।

15. $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{10}$-এর বিস্তৃতিতে x-বর্জিত পদটি নির্ণয় কর।

[C. U., 1910, '21, 27]

16. (i) $(1-x)^3\left(x-\frac{1}{x}\right)^5$; (ii) $(1+x)^m\left(1+\frac{1}{x}\right)^n$-এর বিস্তৃতিতে x-বর্জিত পদটি নির্ণয় কর। [Utkal, 1947]

17. $(1+x+x^2)(1-x)^{15}$-এর বিস্তৃতিতে x^{10}-এর সহগ নির্ণয় কর।

[Madras, 1920]

18. $(1-2x+3x^2-4x^3+5x^5)\left(1+\frac{1}{x}\right)^7$-তে x^2-এর সহগ নির্ণয় কর।

19. (i) নিম্নলিখিত বিস্তৃতিগুলির মধ্যপদ (বা মধ্যপদদ্বয়) নির্ণয় কর :

(a) $(a+b)^8$; (b) $\left(x-\frac{1}{x}\right)^9$; (c) $\left(x-\frac{1}{x}\right)^{2n}$.

(ii) $(1+x)^{100}$-এর বিস্তৃতির পদসংখ্যা নির্ণয় কর এবং দেখাও যে, ইহার মধ্যপদ $=\frac{\lfloor 100}{\lfloor 50\lfloor 50}x^{50}$.

20. বিশেষতঃ সাধারণ পদ ও মধ্যপদদ্বয় নির্ণয় করিয়া $\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)^{2n+1}$-এর বিস্তৃতি নির্ণয় কর। [C. U., 1932]

21. $(1+x)^{10}$-এর বিস্তৃতিতে যদি $(4r+5)$-তম পদের সহগ $(2r+1)$-তম পদের সহগের সমান হয়, তবে r-এর মান নির্ণয় কর। [C. U., 1949]

22. $(x+1)^{20}$-এর বিস্তৃতিতে r-তম পদের সহগ $(r+4)$-তম পদের সহগের সমান হইলে, r-এর মান নির্ণয় কর। [C. U., 1946]

23. $(1+x)^{2n+1}$-এর বিস্তৃতিতে x^r এবং x^{r+1}-এর সহগ সমান হইলে, r-এর মান নির্ণয় কর। [C. U., 1930]

24. দেখাও যে, $(1+x)^{2n}$-এর বিস্তৃতির মধ্যপদের সহগ, $(1+x)^{2n-1}$-এর বিস্তৃতির মধ্যপদদ্বয়ের সহগের সমষ্টির সমান। [Cal., 1918 ; Pat., 1942]

25. x-এর শক্তির উর্ধ্বক্রম অনুসারে $(1-x+x^2)^n$-এর বিস্তৃতির প্রথম চারিটি পদ নির্ণয় কর।

26. দেখাও যে,

(a) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{2n}$-এর বিস্তৃতির মধ্যপদ $\frac{1.3.5\cdots\cdots(2n-1)}{n!}2^n$;

[Pat., 1942]

(b) $\left(x-\frac{1}{x}\right)^{2n}$-এর বিস্তৃতির মধ্যপদ $\frac{1.3.5\cdots\cdots(2n-1)}{n!}(-2)^n$.

27. $(x-x^{-2})^{4n}$-এর বিস্তৃতিতে যদি x^{4r} থাকে, প্রমাণ কর যে,

$$\text{উহার সহগ} = \frac{\lfloor 4n}{\lfloor \frac{4}{3}(n-r) \lfloor \frac{4}{3}(2n+r)}.$$

9·8. বৃহত্তম সহগ।

$(a+x)^n$ অথবা $(1+x)^n$-এর বিস্তৃতির বৃহত্তম সহগ নির্ণয়। [*To find the greatest coefficient in the expansion of* $(a+x)^n$ *or* $(1+x)^n$.]

সহগগুলি হইতেছে, ${}^nC_0$, ${}^nC_1$, ${}^nC_2$, ${}^nC_3$, ..., ${}^nC_n$. ইহাদের মধ্যে কোন্‌টি বৃহত্তম, তাহাই নির্ণয় করিতে হইবে।

বিন্যাস ও সমবায় অধ্যায় হইতে আমরা জানি,

(1) n যুগ্ম সংখ্যা হইলে, যখন $r=\frac{n}{2}$ হয়, তখন ${}^nC_r$ বৃহত্তম হয়;

আর, (2) n অযুগ্ম সংখ্যা হইলে, যখন $r=\frac{n-1}{2}$, বা, $\frac{n+1}{2}$ হয়, তখন ${}^nCr$ বৃহত্তম হয়।

অতএব, n যুগ্ম হইলে, ${}^nC_{\frac{n}{2}}$ বিস্তৃতির বৃহত্তম সহগ;

আর, n অযুগ্ম হইলে, ${}^nC_{\frac{n-1}{2}}$ এবং ${}^nC_{\frac{n+1}{2}}$ সহগ-দুইটি সমমানবিশিষ্ট হয় এবং তখনই ইহারাই বিস্তৃতির বৃহত্তম সহগ।

9·9. বৃহত্তম পদ।

$(a+x)^n$-এর বিস্তৃতির বৃহত্তম পদ নির্ণয়। [*To find the greatest term in the expansion of* $(a+x)^n$.]

বিস্তৃতির r-তম এবং $(r+1)$-তম পদ-দুইটিকে যথাক্রমে T_r এবং T_{r+1} দ্বারা সূচিত করিলে,

$$T_{r+1}={}^nC_ra^{n-r}x^r=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+2)(n-r+1)}{r(r-1)(r-2)\cdots3.2.1}\cdot a^{n-r}x^r,$$

এবং $T_r = {}^nC_{r-1}a^{n-r+1}x^{r-1} = \dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+2)}{(r-1)(r-2)\cdots 3.2.1}\cdot a^{n-r+1}x^{r-1}.$

অতএব, $\dfrac{T_{r+1}}{T_r} = \dfrac{n-r+1}{r}\cdot\dfrac{x}{a}.$

$\therefore$ $T_{r+1} >, =,$ বা, $< T_r$ হইবে,

যদি $(n-r+1)x >, =,$ বা $< ra$ হয়,

অর্থাৎ, যদি $(n+1)x >, =,$ বা $< ra + rx$, বা $r(a+x)$ হয়,

অর্থাৎ, যদি $\dfrac{(n+1)x}{a+x} >, =,$ বা $< r$ হয়,

অর্থাৎ, যদি $r <, =,$ বা $> \dfrac{(n+1)x}{a+x}$ হয়।

এখন, $\dfrac{(n+1)x}{a+x}$ (i) পূর্ণসংখ্যা হইতে পারে, আবার (ii) ভগ্নাঙ্কও হইতে পারে।

(i) $\dfrac{(n+1)x}{a+x}$ পূর্ণসংখ্যা হইলে, উহা যেন $= p$.

তাহা হইলে, r-এর 1, 2, 3 প্রভৃতি $(p-1)$ পর্যন্ত সকল মানের জন্য $T_{r+1} > T_r$, অর্থাৎ, $T_1, T_2, T_3, \cdots\cdots, T_{p-1}$ এবং T_p পদগুলির প্রত্যেকটি ইহার পূর্ববর্তীটি অপেক্ষা বৃহত্তর; সুতরাং, T_pই এই পদগুলির মধ্যে বৃহত্তম পদ।

$r = p$ হইলে, $T_{r+1} = T_r$, অর্থাৎ $T_{p+1} = T_p$.

$r > p$ হইলে, $T_{r+1} < T_r$, অর্থাৎ $T_{p+1}, T_{p+2}, T_{p+3}, \ldots\ldots, T_n, T_{n+1}$ পদগুলির প্রত্যেকটি ইহার পূর্ববর্তীটি অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর; সুতরাং, T_{p+1}ই এই পদগুলির মধ্যে বৃহত্তম।

অতএব, দেখা গেল, এক্ষেত্রে $T_p = T_{p+1}$, অর্থাৎ বিস্তৃতির p-তম পদটি $(p+1)$-তম পদটির সমান এবং ইহারাই বিস্তৃতির বৃহত্তম পদদ্বয়।

(ii) $\dfrac{(n+1)x}{a+x}$ পূর্ণসংখ্যা না হইয়া ভগ্নাঙ্ক হইলে, এই ভগ্নাঙ্কটি যেন $= q$ পূর্ণসংখ্যা + একটি প্রকৃত ভগ্নাংশ, অর্থাৎ q এই ভগ্নাঙ্কটির পূর্ণ অংশ। তাহা হইলে, r-এর 1, 2, 3 প্রভৃতি q পর্যন্ত সকল মানের জন্য $r < \dfrac{(n+1)x}{a+x}$; অতএব, $T_{r+1} > T_r$, অর্থাৎ $T_1, T_2, T_3, \ldots T_q, T_{q+1}$ পদগুলির প্রত্যেকটি ইহার পূর্ববর্তীটি অপেক্ষা বৃহত্তর; সুতরাং, T_{q+1}ই ঐ পদগুলির বৃহত্তম পদ।

আবার, r-এর $q+1, q+2, \ldots, n$ পর্যন্ত সকল মানের জন্যই $r > \dfrac{(n+1)x}{a+x}$; অতএব, $T_{r+1} < T_r$, অর্থাৎ, $T_{q+1}, T_{q+2}, T_{q+3}, \ldots, T_n, T_{n+1}$ পদগুলির

প্রত্যেকটি ইহার পূর্ববর্তীটি অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর ; সুতরাং, T_{q+1}ই এই পদগুলির মধ্যে বৃহত্তম পদ।

অতএব, দেখা গেল, এক্ষেত্রে T_{q+1} অর্থাৎ বিস্তৃতিটির $(q+1)$-তম পদই বৃহত্তম পদ।

দ্রষ্টব্য 1. দ্বিতীয় ক্ষেত্রে $r=\frac{(n+1)x}{a+x}$ হইতে পারে না।

দ্রষ্টব্য 2. $(a+x)^n$-এর বিস্তৃতির বৃহত্তম পদও a-এর স্থলে 1 বসাইয়া অনুরূপ যুক্তি-সাহায্যেই নির্ণয় করা যায়।

দ্রষ্টব্য 3. $(a-x)^n$-এর বিস্তৃতির পদগুলি এবং $(a+x)^n$-এর বিস্তৃতির পদগুলি একই সাংখ্যমানবিশিষ্ট বলিয়া, উভয়ের বিস্তৃতির বৃহত্তম পদদ্বয় একই সাংখ্যমানবিশিষ্ট হইবে। সুতরাং, $(a-x)^n$-এর বিস্তৃতির চিহ্ন-নিরপেক্ষ বৃহত্তম পদ (numerically greatest term) নির্ণয় করিতে হইলে, পদগুলির ঋণ-চিহ্ন বর্জন করিয়া উপরের অনুচ্ছেদে বর্ণিত পদ্ধতিতে অগ্রসর হইতে হয়।

উদা. 1. (i) $(1+x)^{10}$, (ii) $(2-3x)^7$-এর বিস্তৃতিতে বৃহত্তম সাংখ্য-সহগটি নির্ণয় কর।

(i) এস্থলে সহগগুলি হইতেছে ${}^{10}C_0$, ${}^{10}C_1$, ${}^{10}C_2$, ..., ${}^{10}C_{10}$; ইহাদের মধ্যে বৃহত্তমটি নির্ণয় করিতে হইবে।

এখন, ${}^{10}C_r=\frac{\lfloor 10}{\lfloor r \lfloor 10-r}$; এবং ${}^{10}C_{r-1}=\frac{\lfloor 10}{\lfloor r-1 \lfloor 10-r+1}$;

$\therefore \frac{{}^{10}C_r}{{}^{10}C_{r-1}}=\frac{10-r+1}{r}$, বা, ${}^{10}C_r=\frac{10-r+1}{r}\,{}^{10}C_{r-1}$;

$\therefore {}^{10}C_r >, =$ বা $< {}^{10}C_{r-1}$ হইবে,

যদি $10-r+1 >, =,$ বা $< r$ হয়,

অর্থাৎ যদি $11 >, =,$ বা $< 2r$ হয়,

অর্থাৎ যদি $r <, =,$ বা $> \frac{11}{2}$ অর্থাৎ $5\frac{1}{2}$ হয়।

$\therefore$ নির্ণেয় বৃহত্তম সহগ $= {}^{10}C_5=\frac{10.9.8.7.6}{5.4.3.2.1}=\mathbf{252}$.

(ii) $(2-3x)^7=2^7(1-\frac{3}{2}x)^7$; অতএব, চিহ্ন-নিরপেক্ষ $(1-\frac{3}{2}x)^7$-এর বৃহত্তম সহগকে 2^7 দ্বারা গুণ করিলে বৃহত্তম সহগটি পাওয়া যাইবে।

এখন, $(1-\frac{3}{2}x)^7$-এর চিহ্ন-নিরপেক্ষ সহগগুলি হইতেছে ${}^7C_0$, $(\frac{3}{2})\,{}^7C_1$, $(\frac{3}{2})^2\,{}^7C_2$, $(\frac{3}{2})^3\,{}^7C_3$, $(\frac{3}{2})^4\,{}^7C_4$, $(\frac{3}{2})^5\,{}^7C_5$, $(\frac{3}{2})^6\,{}^7C_6$, $(\frac{3}{2})^7\,{}^7C_7$; ইহাদের বৃহত্তমটি নির্ণয় করিতে হইবে।

এখন, $\frac{(r+1)\text{-তম সহগ}}{r\text{-তম সহগ}}=\frac{(\frac{3}{2})^r.{}^7C_r}{(\frac{3}{2})^{r-1}.{}^7C_{r-1}}=\frac{3}{2}.\frac{(7-r+1)}{r}=\frac{24-3r}{2r}$.

$\therefore$ $(r+1)$-তম সহগ $>, =,$ বা $<$ r-তম সহগ হইবে,

যদি $24-3r >, =,$ বা $< 2r$ হয়,

অর্থাৎ যদি $24 >, =,$ বা $< 5r$ হয়,

অর্থাৎ যদি $r <, =,$ বা $> \frac{24}{5}$ অর্থাৎ $4\frac{4}{5}$ হয়।

$\therefore$ পঞ্চম সহগটি বৃহত্তম ;

$\therefore$ নির্ণেয় চিহ্ন-নিরপেক্ষ বৃহত্তম সহগ

$$=2^7.(\tfrac{3}{2})^4\ {}^7C_4$$

$$=2^3.3^4.{}^7C_3$$

$$=8\times 81\times\frac{7.6.5}{3.2.1}=\mathbf{22680.}$$

উদা. 2. $x=\frac{5}{6}$ হইলে, $(2+3x)^{12}$-এর বিস্তৃতির বৃহত্তম পদটি নির্ণয় কর।

r-তম এবং $(r+1)$-তম পদ-দুইটিকে যথাক্রমে T_r এবং T_{r+1} দ্বারা সূচিত করিলে,

$$\frac{T_{r+1}}{T_r}=\frac{12-r+1}{r}.\frac{3x}{2}=\frac{13-r}{r}.\frac{5}{4};$$

$\therefore$ $T_{r+1} >, =,$ বা $< T_r$ হইবে,

যদি $5(13-r) >, =,$ বা $< 4r$ হয়,

অর্থাৎ, যদি $65-5r >, =,$ বা $< 4r$ হয়,

অর্থাৎ, যদি $65 >, =,$ বা $< 9r$ হয়,

অর্থাৎ, যদি $r <, =,$ বা $> 7\frac{2}{9}$ হয়।

$\therefore$ অষ্টম পদটি বৃহত্তম পদ এবং ইহার মান

$$={}^{12}C_7.2^5.(3x)^7={}^{12}C_5.2^5.(\tfrac{5}{2})^7$$

$$=\mathbf{15468750.}$$

উদা. 3. $x=\frac{1}{5}$ হইলে, $(3-5x)^{11}$-এর বিস্তৃতিতে বৃহত্তম সাংখ্যমানের পদটি নির্ণয় কর।

r-তম এবং $(r+1)$-তম পদদ্বয়কে যথাক্রমে T_r এবং T_{r+1} দ্বারা সূচিত করিলে,

$$\frac{T_{r+1}}{T_r}=\frac{11-r+1}{r}.\frac{5x}{3}=\frac{12-r}{r}.\frac{1}{3}.$$

$\therefore$ $T_{r+1} >, =,$ বা $< T_r$ হইবে,

যদি $12-r >, =,$ বা $< 3r$ হয়,

অর্থাৎ, যদি $12 >, =,$ বা $< 4r$ হয়,

অর্থাৎ, যদি $r <, =,$ বা > 3 হয়।

অতএব, T_3, T_4 অর্থাৎ বিস্তৃতির তৃতীয় এবং চতুর্থ পদ-দুইটির চিহ্ন-নিরপেক্ষ মান বা পরম মান সমান এবং এই পদ-দুইটিই বৃহত্তম এবং এই মান

$$= {}^{11}C_2.3^9.(5x)^2 = \frac{11.10}{2.1}\cdot 3^9 = 1082565.$$

প্রশ্নমালা 33

1. (i) $(1+x)^{14}$, (ii) $(3-2x)^9$-এর বিস্তৃতিতে বৃহত্তম সহগ নির্ণয় কর।

2. $\left(3ax - \dfrac{2b^2}{x}\right)^{14}$-এর বিস্তৃতিতে বৃহত্তম সাংখ্য-সহগ নির্ণয় কর।

3. নিম্নলিখিত বিস্তৃতি-দুইটির প্রত্যেকের বৃহত্তম পদ কোন্‌টি, তাহা নির্ণয় কর :

(i) $\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{y}{3}\right)^{15}$, যখন $x = 8, y = 9$;

(ii) $(\frac{3}{4}m - \frac{2}{3}n)^{19}$, যখন $m = 8, n = 3$.

4. নিম্নলিখিত বিস্তৃতিসমূহের প্রত্যেকের বৃহত্তম পদ নির্ণয় কর :

(i) $(1+x)^6$, যখন $x = \frac{1}{2}$; (ii) $(2+3x)^{14}$, যখন $x = \frac{2}{3}$;

(iii) $(a+x)^n$, যখন $a = \frac{1}{2}, x = \frac{1}{3}, n = 9$.

9·10. দ্বিপদ সহগের ধর্ম।

(i) **$(1+x)^n$-এর বিস্তৃতির সহগসমূহের সমষ্টি 2^n.** [*The sum of the coefficients of the terms in the expansion of* $(1+x)^n$ *is* 2^n.]

আমরা জানি, $(1+x)^n = 1 + {}^nC_1\, x + {}^nC_2\, x^2 + {}^nC_3\, x^3 + \cdots\cdots\cdots$
$+ {}^nC_n\, x^n$;

উভয় পক্ষে $x = 1$ বসাইলে, $2^n = 1 + {}^nC_1 + {}^nC_2 + {}^nC_3 + \cdots\cdots + {}^nC_n$;

অতএব, সহগসমূহের সমষ্টি $= 2^n$.

অনুসিদ্ধান্ত। ${}^nC_1 + {}^nC_2 + {}^nC_3 + \cdots {}^nC_n = 2^n - 1$, অর্থাৎ n-সংখ্যক বস্তু হইতে একসঙ্গে উহাদের 1, 2, 3, ⋯ n-সংখ্যকটি করিয়া লইয়া গঠিত সমবায়সমূহের সংখ্যা $= 2^n - 1$.

দ্রষ্টব্য। ${}^nC_0$, ${}^nC_1$, ${}^nC_2$, প্রভৃতি দ্বিপদ সহগগুলিকে সংক্ষেপে $C_0, C_1, C_2, \cdots$ প্রভৃতি রূপেও লেখা হয়।

(ii) $(1+x)^n$-এর বিস্তৃতিতে অযুগ্ম পদসমূহের সহগ-সমষ্টি উহার যুগ্ম পদসমূহের সহগ-সমষ্টির সমান, এবং সমষ্টিদ্বয়ের প্রত্যেকটি হইতেছে 2^{n-1}.
[*In the expansion of* $(1+x)^n$, *the sum of the coefficients of the odd terms is equal to the sum of the cofficients of the even terms, each being equal to* 2^{n-1}.]

$$(1+x)^n = 1 + {}^nC_1 x + {}^nC_2\, x^2 + {}^nC_3\, x^3 + \cdots\cdots + {}^nC_n\, x^n,$$

উভয় পক্ষে $x=-1$ বসাইলে,

$$0 = 1 - {}^nC_1 + {}^nC_2 - {}^nC_3 + \cdots + (-1)^n\, {}^nC_n.$$

$$\therefore\quad 1 + {}^nC_2 + {}^nC_4 + \cdots = {}^nC_1 + {}^nC_3 + {}^nC_5 + \cdots;$$

$$\text{প্রত্যেকটি} = \tfrac{1}{2}(1 + {}^nC_1 + {}^nC_2 + {}^nC_3 + {}^nC_4 + \cdots + {}^nC_n)$$
$$= \tfrac{1}{2}.2^n = 2^{n-1}.$$

9·11. বিভিন্ন প্রশ্নের সমাধান।

উদা. 1. $(a+x)^n$-এর বিস্তৃতিতে অযুগ্ম পদগুলির সমষ্টি A এবং যুগ্ম পদগুলির সমষ্টি B হইলে, প্রমাণ কর যে,

$$A^2 - B^2 = (a^2 - x^2)^n.$$

$(a+x)^n$-এর বিস্তৃতির পদগুলিকে t_0, t_1, t_2, ইত্যাদি দ্বারা সূচিত করিলে,

$$(a+x)^n = t_0 + t_1 + t_2 + t_3 + \cdots\cdots + t_n$$
$$= (t_0 + t_2 + t_4 + \cdots) + (t_1 + t_3 + t_5 + \cdots)$$
$$= A + B;$$

$$(a-x)^n = t_0 - t_1 + t_2 - t_3 + t_4 - t_5 + \cdots\cdots + (-1)^n\, t_n$$
$$= (t_0 + t_2 + t_4 + \cdots) - (t_1 + t_3 + t_5 + \cdots\cdots)$$
$$= A - B.$$

$$\therefore\quad A^2 - B^2 = (A+B)(A-B) = (a+x)^n(a-x)^n = (a^2 - x^2)^n.$$

উদা. 2. যদি $t_0, t_1, t_2, t_3, \cdots$ ইত্যাদি $(a+x)^n$-এর বিস্তৃতির পদ নির্দেশ করে, তাহা হইলে, প্রমাণ কর যে,

$$(t_0 - t_2 + t_4 - \cdots)^2 + (t_1 - t_3 + t_5 - \cdots)^2 = (a^2 + x^2)^n.$$

$$(a+x)^n = a^n + {}^nC_1\, a^{n-1}\, x + {}^nC_2\, a^{n-2}\, x^2 + {}^nC_3\, a^{n-3}\, x^3 + \cdots + {}^nC_n\, x^n$$

$$= t_0 + t_1 + t_2 + t_3 + \cdots\cdots + t_n.$$

উভয় পক্ষে x-এর স্থলে ix বসাইলে,

$$(a+ix)^n = a^n + {}^nC_1\, a^{n-1}ix + {}^nC_2\, a^{n-2}i^2x^2 + {}^nC_3\, a^{n-3}\, i^3x^3 + {}^nC_4\, a^{n-4}\, i^4x^4 + \cdots$$

$$= a^n + i\,{}^nC_1a^{n-1}x - {}^nC_2a^{n-2}x^2 - i\,{}^nC_3a^{n-3}x^3 + {}^nC_4a^{n-4}x^4 + i\,{}^nC_5a^{n-5}x^5 - {}^nC_6a^{n-6}x^6 - i\,{}^nC_7a^{n-7}x^7 + \cdots\cdots$$

$$= t_0 + it_1 - t_2 - it_3 + t_4 + it_5 - t_6 - it_7 + t_8 + it_9 - \cdots$$

$$= (t_0 - t_2 + t_4 - t_6 + \cdots) + i(t_1 - t_3 + t_5 - t_7 + \cdots) \cdots \quad (1)$$

আবার, $(a-ix)^n = a^n - {}^nC_1a^{n-1}ix + {}^nC_2a^{n-2}i^2x^2 - {}^nC_3a^{n-3}i^3x^3 + {}^nC_4a^{n-4}i^4x^4 - {}^nC_5a^{n-5}i^5x^5 + \cdots\cdots$

$$= a^n - i\,{}^nC_1a^{n-1}x - {}^nC_2a^{n-2}x^2 + i\,{}^nC_3a^{n-3}x^3 + {}^nC_4a^{n-4}x^4 - i\,{}^nC_5a^{n-5}x^5 + \cdots\cdots$$

$$= t_0 - it_1 - t_2 + it_3 + t_4 - it_5 - t_6 + it_7 + t_8 - \cdots$$

$$= (t_0 - t_2 + t_4 - t_6 + \cdots) - i(t_1 - t_3 + t_5 - t_7 + \cdots) \cdots \quad (2)$$

$\therefore$ (1) এবং (2) হইতে,

$$(a+ix)^n(a-ix)^n = \{(t_0 - t_2 + t_4 - t_6 + \cdots) + i(t_1 - t_3 + t_5 - t_7 + \cdots)\} \times \{(t_0 - t_2 + t_4 - t_6 + \cdots) - i(t_1 - t_3 + t_5 - t_7 + \cdots)\}$$

বা, $(a^2+x^2)^n = (t_0 - t_2 + t_4 - t_6 + \cdots)^2 + (t_1 - t_3 + t_5 - t_7 + \cdots)^2.$

উদা. 3. যদি কোন দ্বিপদ রাশিমালার বিস্তৃতিতে a, b, c, d যে-কোন চারিটি ক্রমিক সহগ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $(bc+ad)(b-c) = 2(ac^2 - b^2d)$.

মনে কর, a, b, c, d $(1+x)^n$-এর বিস্তৃতির যথাক্রমে $(r-1)$-তম, r-তম, $(r+1)$-তম, $(r+2)$-তম পদ।

এখন, $\dfrac{{}^nC_r}{{}^nC_{r-1}} = \dfrac{n-r+1}{r}$;

$\therefore$ (i) $\dfrac{b}{a} = \dfrac{{}^nC_{r-1}}{{}^nC_{r-2}} = \dfrac{n-(r-1)+1}{r-1} = \dfrac{n-r+2}{r-1}$;

(ii) $\dfrac{c}{b} = \dfrac{{}^nC_r}{{}^nC_{r-1}} = \dfrac{n-r+1}{r}$;

(iii) $\dfrac{d}{c} = \dfrac{{}^nC_{r+1}}{{}^nC_r} = \dfrac{n-(r+1)+1}{r+1} = \dfrac{n-r}{r+1}$.

(i) হইতে, $\frac{b}{a}(r-1)=n-r+2 \quad \cdots \quad (\alpha)$

(ii) „ $\frac{c}{b}r=n-r+1 \quad \cdots \quad (\beta)$

(iii) „ $\frac{d}{c}(r+1)=n-r. \quad \cdots \quad (\gamma)$

(α) হইতে (β) বিয়োগ দ্বারা,

$\frac{b}{a}(r-1)-\frac{c}{b}r=1$, বা, $r\left(\frac{b}{a}-\frac{c}{b}\right)=\frac{b}{a}+1$; $\therefore \quad r-\frac{b(a+b)}{b^2-ac}$;

এইরূপে, (β) এবং (γ) হইতে,

$$\left(\frac{c}{b}-\frac{d}{c}\right)=\frac{d}{c}+1 \,; \quad \therefore \quad r=\frac{b(c+d)}{c^2-bd}.$$

অতএব, $\frac{c+d}{c^2-bd}=\frac{a+b}{b^2-ac}$;

বা, $b^2c-ac^2+b^2d-acd=ac^2-abd+bc^2-b^2d$;

বা, $b^2c+abd-bc^2-acd=2(bc^2-b^2d)$;

বা, $(bc+ad)(b-c)=2(ac^2-b^2d)$.

উদা. 4. $(1+x)^n=C_0+C_1x+C_2x^2+C_3x^3+\cdots\cdots+C_nx^n$ হইলে, $C_0+\frac{C_1}{2}+\frac{C_2}{3}+\frac{C_3}{4}+\cdots+\frac{C_n}{n+1}$-এর মান নির্ণয় কর।

[C. U., 1945 ; Delhi, 1950]

দ্বিপদ উপপাদ্য হইতে,

$$(1+x)^n=1+{}^nC_1x+{}^nC_2x^2+{}^nC_3x^3+\cdots+{}^nC_nx^n \,;$$

$\therefore \quad C_0=1,\ C_1={}^nC_1,\ C_2={}^nC_2$, ইত্যাদি।

$\therefore$ প্রদত্ত রাশিমালা

$$=1+\frac{{}^nC_1}{2}+\frac{{}^nC_2}{3}+\frac{{}^nC_3}{4}+\cdots\cdots+\frac{{}^nC_n}{n+1}$$

$$=1+\frac{n}{\underline{|2}}+\frac{n(n-1)}{3\underline{|2}}+\frac{n(n-1)(n-2)}{4\underline{|3}}+\cdots\cdots+\frac{1}{n+1}$$

$$=1+\frac{n}{\underline{|2}}+\frac{n(n-1)}{\underline{|3}}+\frac{n(n-1)(n-2)}{\underline{|4}}+\cdots\cdots+\frac{1}{n+1}$$

$$=\frac{1}{n+1}\Big\{(n+1)+\frac{(n+1)n}{\underline{|2}}+\frac{(n+1)n(n-1)}{\underline{|3}}$$

$$+\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{\underline{|4}}+\cdots\cdots+1\Big\}$$

$$=\frac{1}{n+1}\left\{{}^{n+1}C_1+{}^{n+1}C_2+{}^{n+1}C_3+{}^{n+1}C_4+\cdots+{}^{n+1}C_{n+1}\right\}$$

$$=\frac{1}{n+1}\left(2^{n+1}-1\right).$$

উদা. 5. $(1+x)^n=C_0+C_1x+C_2x^2+\cdots\cdots+C_nx^n$ হইলে, $C_1+2C_2+3C_3+\cdots+nC_n$-এর মান নির্ণয় কর। [C. U., 1938]

দ্বিপদ উপপাদ্য অনুসারে,

$$(1+x)^n=1+{}^nC_1x+{}^nC_2x^2+\cdots\cdots+{}^nC_nx^n;$$

$\therefore\ C_0=1,\ C_1={}^nC_1,\ C_2={}^nC_2,$ ইত্যাদি।

$\therefore$ প্রদত্ত রাশিমালা

$$={}^nC_1+2.{}^nC_2+3.{}^nC_3+\cdots\cdots+n.{}^nCn$$

$$=n+\frac{2n(n-1)}{\lfloor 2}+\frac{3n(n-1)(n-2)}{\lfloor 3}+\cdots+n$$

$$=n+n(n-1)+\frac{n(n-1)(n-2)}{\lfloor 2}+\cdots\cdots+n$$

$$=n\left\{1+(n-1)+\frac{(n-1)(n-2)}{\lfloor 2}+\cdots\cdots+1\right\}$$

$$=n\{{}^{n-1}C_0+{}^{n-1}C_1+{}^{n-1}C_2+\cdots\cdots+{}^{n-1}C_{n-1}\}$$

$$=n(1+1)^{n-1}$$

$$=n.2^{n-1}.$$

উদা. 6. $(1+x)^n=C_0+C_1x+C_2x^2+\cdots\cdots+C_nx^n$ হইলে, $C_0{}^2+C_1{}^2+C_2{}^2+\cdots\cdots C_n{}^2$-এর মান নির্ণয় কর। [C. U., 1941]

$$(1+x)^n=C_0+C_1x+C_2x^2+\cdots\cdots+C_nx^n. \quad\cdots\ (1)$$

x-এর স্থলে $\frac{1}{x}$ বসাইয়া,

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^n=C_0+\frac{C_1}{x}+\frac{C_2}{x^2}+\cdots\cdots+\frac{C_n}{x^n}. \quad\cdots\ (2)$$

(1) এবং (2) হইতে গুণন দ্বারা,

$$(1+x)^n.\left(1+\frac{1}{x}\right)^n=(1)\text{ এবং }(2)\text{-এর শ্রেণী-দুইটির গুণফল,}$$

বা, $\dfrac{(1+x)^{2n}}{x^n}=(1)$ এবং (2)-এর শ্রেণী-দুইটির গুণফল। $\cdots$ (i)

স্পষ্টই, (1) এবং (2)-এর দক্ষিণ-পক্ষস্থ শ্রেণী-দুইটির গুণফলের x-বর্জিত রাশিটিই প্রদত্ত রাশিমালা।

$\therefore$ প্রদত্ত রাশিমালা $= \dfrac{(1+x)^{2n}}{x^n}$-এর x-বর্জিত রাশি

$= (1+x)^{2n}$-এর বিস্তৃতির x^n-এর সহগ

$$= {}^{2n}C_n = \frac{\lfloor 2n}{\lfloor n \lfloor n}.$$

দ্রষ্টব্য। উপরের সমাধান (i)-এর সমীকরণটি একটি অভেদ, অর্থাৎ উহা x-এর সকল মানের জন্যই সত্য বলিয়া, ইহার এক পক্ষের x-এর যে-কোন ঘাতের সহগ অপর পক্ষের x-এর সমঘাতের সহগের সমান ধরা হইয়াছে।

বিকল্প পদ্ধতি : $(1+x)^n = C_0 + C_1x + C_2x^2 + \cdots\cdots + C_nx^n$ $\quad\cdots$ (1)

আবার, $(x+1)^n = C_0x^n + C_1x^{n-1} + C_2x^{n-2} + \cdots + C_n$ $\quad\cdots$ (2)

(1) এবং (2)-এর গুণন দ্বারা, উপরে বর্ণিত পদ্ধতিতেও প্রদত্ত রাশিমালার মান নির্ণয় করা যায়।

উদা. 7. $(1+x)^n$-এর বিস্তৃতিতে $(r+1)$-তম পদের সহগ n_r হইলে, প্রমাণ কর যে,

$$(n+p)_r = n_r + n_{r-1}p_1 + n_{r-2}p_2 + \cdots + n_1p_{r-1} + p_r.$$

$n_r = (1+x)^n$-এর বিস্তৃতির $(r+1)$-তম পদের সহগ ;

$\therefore$ $p_r = (1+x)^p$-এর বিস্তৃতির $(r+1)$-তম পদের সহগ,

এবং $(n+p)_r = (1+x)^{n+p}$-এর বিস্তৃতির $(r+1)$-তম পদের সহগ।

$\therefore$ $(1+x)^n = 1 + n_1x + n_2x^2 + n_3x^3 + \cdots + n_rx^r + \cdots + x^n.$

$(1+x)^p = 1 + p_1x + p_2x^2 + p_3x^3 + \cdots + p_rx^r + \cdots + x^p,$

এবং $(1+x)^{n+p} = 1 + (n+p)_1x + (n+p)_2x^2 + (n+p)_3x^3 + \cdots + (n+p)_rx^r + \cdots + x^{n+p}.$

$$\therefore\ 1 + (n+p)_1x + (n+p)_2x^2 + \cdots + (n+p)_rx^r + \cdots + x^{n+p}$$
$$\equiv (1 + n_1x + n_2x^2 + \cdots + n_rx^r + \cdots + x^n)$$
$$\times (1 + p_1x + p_2x^2 + \cdots + p_rx^r + \cdots + x^p).$$

উভয় পক্ষের x^r-এ সহগ সমিত করিয়া,

$$(n+p)_r = n^r + n_{r-1}p_1 + n_{r-2}p_2 + \cdots + n_1p_{r-1} + p_r.$$

দ্রষ্টব্য। এই ফলটি ভেণ্ডারমণ্ডির (Vendermonde's) উপপাদ্য নামে খ্যাত।

উদা. 8. $a-(a+b)n+(a+2b)\frac{n(n-1)}{1.2}-(a+3b)\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$
$+\cdots$-এর মান নির্ণয় কর।

প্রদত্ত রাশিমালা

$=a\{1-n+\frac{n(n-1)}{\lfloor 2}-\frac{n(n-1)(n-2)}{\lfloor 3}+\cdots\cdots$
$(n+1)$-সংখ্যক পদ পর্যন্ত }

$-b\{n-n(n-1)+\frac{n(n-1)(n-2)}{\lfloor 2}-\cdots\cdots n$-সংখ্যক পদ পর্যন্ত }

$=a(1-1)^n-bn\{1-(n-1)+\frac{(n-1)(n-2)}{\lfloor 2}-\cdots$
n-সংখ্যক পদ পর্যন্ত }

$=a(1-1)^n-bn(1-1)^{n-1}=\mathbf{0}.$

উদা. 9. প্রমাণ কর যে, n-এর মান 1 অপেক্ষা বৃহত্তর যে-কোন ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হইলে, 4^n-3n-1, 9 দ্বারা বিভাজ্য।

$$4^n-3n-1=(1+3)^n-3n-1$$
$$=1+n.3+{}^nC_2.3^2+{}^nC_3.3^3+\cdots-3n-1$$
$$={}^nC_2.3^2+{}^nC_3.3^3+\cdots\cdots$$

এখন দক্ষিণ পক্ষস্থ সমস্ত পদই 3^2 বা 9 দ্বারা বিভাজ্য ;

অতএব, 4^n-3n-1ও 9 দ্বারা বিভাজ্য।

উদা. 10. দ্বিপদ উপপাদ্য প্রয়োগ করিয়া 99^3-এর মান নির্ণয় কর।

$$99^3=(100-1)^3=100^3-{}^3C_1100^2.1+{}^3C_2100.1^2-1^3$$
$$=100^3-3.100^2+3.100-1$$
$$=1000000-30000+300-1$$
$$=\mathbf{970299}.$$

প্রশ্নমালা 34

1. ${}^{20}C_1+{}^{20}C_2+{}^{20}C_3+\cdots\cdots+{}^{20}C_{20}$-এর মান নির্ণয় কর।

2. (*a*) ${}^{26}C_1+{}^{26}C_3+{}^{26}C_5+{}^{26}C_7+\cdots+{}^{26}C_{25}$-এর মান নির্ণয় কর।

(*b*) দেখাও যে $(1+x)^{2n}$-এর বিস্তৃতিতে অযুগ্ম পদসমূহের সহগের সমষ্টি 2^{2n-1}. [C. U. 1917]

3. $(1+x)^n$-এর বিস্তৃতিতে তিনটি ক্রমিক সহগ 165, 330 ও 462 হইলে, n-এর মান নির্ণয় কর। [P. U., 1945]

4. $(1+x)^n$-এর বিস্তৃতির প্রথম পদ-তিনটি সমান্তর-শ্রেণীভুক্ত হইলে দেখাও যে, $2-4nx+n(n-1)x^2=0$.

5. যদি $(1+x)^n$-এর বিস্তৃতিতে r-তম, $(r+1)$-তম এবং $(r+2)$-তম সহগগুলি সমান্তর-শ্রেণীভুক্ত হয়, তাহা হইলে দেখাও যে,

$$n^2-n(4r+1)+4r^2-2=0.$$

6. $(a+x)^n$-এর বিস্তৃতিতে দ্বিতীয়, তৃতীয় এবং চতুর্থ পদ যথাক্রমে 240, 720 এবং 1080 হইলে, a, x এবং n-এর মান নির্ণয় কর।

7. $(x+a)^n$-এর বিস্তৃতিতে তৃতীয়, চতুর্থ ও পঞ্চম পদ যথাক্রমে 84, 280 এবং 560 হইলে, x, a এবং n-এর মান নির্ণয় কর। [Pat., 1947 ; C. U., 1955]

8. $(1+x)$-এর কোন ঘাতের বিস্তৃতিতে তিনটি ক্রমিক সহগ a, b, c হইলে, প্রমাণ কর যে, ঘাতের সূচক $\dfrac{2ac+b(a+c)}{b^2-ac}$ এবং $\dfrac{a(b+c)}{b^2-ac}$-তম পদটির সহগ a.

[Pat., 1941]

9. কোন দ্বিপদ রাশির বিস্তৃতিতে দুইটি ক্রমিক সহগ সমান হইলে, প্রমাণ কর যে, উহাদের ঠিক পূর্ববর্তী এবং পরবর্তী সহগ-দুইটিও সমান।

10. যদি $(x+A)^n$-এর বিস্তৃতিতে a, b, c, d যথাক্রমে তৃতীয়, চতুর্থ, পঞ্চম এবং ষষ্ঠ পদ হয়, এবং n একটি ধনাত্মক পূর্ণরাশি হইলে, দেখাও যে,

$$\frac{b^2-ac}{c^2-bd}=\frac{5a}{3c}.$$ [C. U., 1957]

11. কোন দ্বিপদরাশির বিস্তৃতিতে a_1, a_2, a_3, a_4 চারিটি ক্রমিক সহগ হইলে, দেখাও যে, $\dfrac{a_1}{a_1+a_2}+\dfrac{a_3}{a_3+a_4}=\dfrac{2a_2}{a_2+a_3}$. [Pat., 1950]

12. যদি P_n $(1+x)^n$-এর বিস্তৃতির সহগসমূহের গুণফল নির্দেশ করে, তাহা হইলে, দেখাও যে, $\dfrac{P_{n+1}}{P_n}=\dfrac{(n+1)^n}{\underline{|n}}$.

13. যদি n-সংখ্যক বস্তুর একযোগে r-সংখ্যকটি লইয়া গঠিত সমবায়-সংখ্যা C_r দ্বারা সূচিত হয়, তাহা হইলে, দেখাও যে,

$$\frac{C_1}{2}+\frac{C_3}{4}+\frac{C_5}{6}+\cdots=\frac{2^n-1}{n+1}.$$

14. যদি $(1+x)^n=C_0+C_1x+C_2x^2+\cdots+C_nx^n$, প্রমাণ কর যে,

(i) $\dfrac{C_0}{1}+\dfrac{C_2}{3}+\dfrac{C_4}{5}+\dfrac{C_6}{7}+\cdots=\dfrac{2^n}{n+1}$.

(ii) $C_0+2C_1+C_2+2C_3+C_4+2C_5+\cdots=3.2^{n-1}$.

15. যদি $(1+x)^n = C_0 + C_1x + C_2x^2 + \cdots + C_nx^n$, প্রমাণ কর যে,

(i) $C_0 + 2C_1 + 3C_2 + \cdots + (n+1)C_n = (n+2)2^{n-1}$. [C. U., 1929]

(ii) $C_0 + 3C_1 + 5C_2 + \cdots + (2n+1)C_n = (n+1)2^n$.

(iii) $C_2 + 2C_3 + 3C_4 + \cdots + (n-1)C_n = (n-2).2^{n-1} + 1$.

(iv) $C_1 - 2C_2 + 3C_3 - \cdots + (-1)^{n-1}nC_n = 0$.

[C. U., 1942 ; Gau., 1949]

(v) $C_0 - 2C_1 + 3C_2 - \cdots + (-1)^n(n+1)C_n = 0$.

(vi) $2C_0 - 3C_1 + 4C_2 - 5C_3 + \cdots (n+1)$-সংখ্যক পদ পর্যন্ত $= 0$.

(vii) $C_0 - \frac{C_1}{2} + \frac{C_2}{3} - \frac{C_3}{4} + \cdots + (-1)^n \frac{C_n}{n+1} = \frac{1}{n+1}$. [Pat., 1944]

(viii) $\frac{C_1}{C_0} + \frac{2C_2}{C_1} + \frac{3C_3}{C_2} + \cdots + \frac{nC_n}{C_{n-1}} = \frac{n(n+1)}{2}$.

(ix) $(C_0 + C_1)(C_1 + C_2)\cdots(C_{n-1} + C_n) = \frac{C_0C_1C_2\cdots C_n(n+1)^n}{n!}$.

(x) $2C_0 + \frac{2^2C_1}{2!} + \frac{2^3C_2}{3!} + \frac{2^4C_3}{4!} + \cdots + \frac{2^{n+1}C_n}{(n+1)!} = \frac{3^{n+1}-1}{n+1}$.

(xi) $C_0C_1 + C_1C_2 + C_2C_3 + \cdots + C_{n-1}C_n = \frac{(2n)!}{(n+1)!\,(n-1)!}$.

(xii) $C_0C_2 + C_1C_3 + C_2C_4 + \cdots + C_{n-2}C_n = \frac{(2n)!}{(n+2)!\,(n-2)!}$.

(xiii) $C_0C_n + C_1C_{n-1} + C_2C_{n-2} + \cdots + C_nC_0 = \frac{(2n)!}{n!\,n!}$.

(xiv) $C_0C_r + C_1C_{r+1} + C_2C_{r+2} \cdots + C_{n-r}C_n = \frac{(2n)!}{(n-r)!\,(n+r)!}$.

(xv) n-এর মান অযুগ্ম বা যুগ্ম হইলে, যথাক্রমে

$$C_0^2 - C_1^2 + C_2^2 - C_3^2 + \cdots + (-1)^nC_n^2 = 0,$$

$$\text{বা, } (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{n!}{\left(\frac{n}{2}!\right)^2}.$$

(xvi) $C_1^2 + 2C_2^2 + 3C_3^2 + \cdots + nC_n^2 = \frac{(2n-1)!}{((n-1)!)^2}$.

(xvii) $C_0^2 + 2C_1^2 + 3C_2^2 + \cdots + (n+1)C_n^2 = \frac{(n+2)\,(2n-1)!}{(n-1)!\,n!}$.

16. দেখাও যে, (a) $(C_0 + C_1 + C_2 + \cdots + C_n)^p = {}^{pn}C_0 + {}^{pn}C_1 + {}^{pn}C_2 + \cdots + {}^{pn}C_{pn}$, যখন p একটি ধনাত্মক পূর্ণরাশি।

$$(b)\ \left\{1+3n+\frac{3n(3n-1)}{\lfloor 2}+\frac{3n(3n-1)(3n-2)}{\lfloor 3}+\cdots\right\}$$
$$\times\left\{1+4n+\frac{4n(4n-1)}{\lfloor 2}+\frac{4n(4n-1)(4n-2)}{\lfloor 3}+\cdots\right\}$$
$$=1+7n+\frac{7n(7n-1)}{\lfloor 2}+\frac{7n(7n-1)(7n-2)}{\lfloor 3}+\cdots$$

17. যদি $(1+x+x^2)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{2n}x^{2n}$, দেখাও যে,
(i) $a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{2n}=3^n$, (ii) $a_0-a_1+a_2-\cdots+a_{2n}=1$.
ইহা হইতে প্রমাণ কর যে, (i) $a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{2n}=\frac{1}{2}(3^n+1)$,
(ii) $a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1}=\frac{1}{2}(3^n-1)$.

18. দেখাও যে,
$$\left(\frac{1+x}{1+4x}\right)^n=1-{}^nC_1\left(\frac{3x}{1+4x}\right)+{}^nC_2\left(\frac{3x}{1+4x}\right)^2-\cdots+(-1)^n\left(\frac{3x}{1+4x}\right)^n.$$

19. দেখাও যে, n একটি ধনাত্মক পূর্ণরাশি হইলে,
$$2^n-n.2^{n-1}+\frac{n(n-1)}{\lfloor 2}\,2^{n-2}-\cdots+(-1)^n=1.$$

20. দেখাও যে,
$$x-{}^nC_1(x-y)+{}^nC_2(x-2y)-{}^nC_3(x-3y)+\cdots+(-1)^n(x-ny)=0.$$

21. n একটি ধনাত্মক পূর্ণরাশি হইলে, প্রমাণ কর যে,
$$1-n\cdot\frac{1+x}{1+nx}+\frac{n(n-1)}{1.2}\cdot\frac{1+2x}{(1+nx)^2}-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\cdot\frac{1+3x}{(1+nx)^3}+\cdots=0.$$

22. দেখাও যে,
$$\frac{x^n}{\lfloor n}+\frac{x^{n-1}y}{\lfloor n-1\,\lfloor 1}+\frac{x^{n-2}y^2}{\lfloor n-2\,\lfloor 2}+\cdots+\frac{xy^{n-1}}{\lfloor 1\,\lfloor n-1}+\frac{y^n}{\lfloor n}=\frac{(x+y)^n}{\lfloor n}.$$

23. দেখাও যে, যদি n একটি ধনাত্মক পূর্ণরাশি হয়,
$$(1-x)^n=(1+x)^n-2nx(1+x)^{n-1}+\frac{2n(2n-2)}{\lfloor 2}\,x^2(1+x)^{n-2}-\cdots.$$

24. প্রমাণ কর যে, 1 অপেক্ষা বৃহত্তর n-এর যে-কোন অখণ্ড ধনাত্মক মানের জন্য $5^{2n}-24n-1$, 576 দ্বারা বিভাজ্য।

25. প্রমাণ কর যে, 1 অপেক্ষা বৃহত্তর n-এর যে-কোন অখণ্ড ধনাত্মক মানের জন্য $3^{3n}-26n-1$, 676 দ্বারা বিভাজ্য।

26. দ্বিপদ উপপাদ্য প্রয়োগ করিয়া, (i) $(99)^4$, (ii) $(\cdot 999)^4$-এর শুদ্ধ মান তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত নির্ণয় কর।

দশম অধ্যায়

অসীম গুণোত্তর-শ্রেণী এবং ঋণাত্মক বা ভগ্নাঙ্ক সূচক-বিশিষ্ট দ্বিপদ উপপাদ্য

(Infinite Geometric Series and Binomial Theorem for negative or fractional index)

10·1. 'প্রগতি' অধ্যায়ে সমান্তর-শ্রেণী ও গুণোত্তর-শ্রেণীর আলোচনা হইয়াছে। তাহাতে যে সকল শ্রেণীর আলোচনা হইয়াছে, সেগুলি সসীম (finite) শ্রেণী ; কেননা তাহাদের পদ-সংখ্যা নির্দিষ্ট। এরূপ শ্রেণীর যোগফলও নির্দিষ্ট এবং নির্ণয় করা সম্ভব।

এক্ষণে যে শ্রেণীর পদ-সংখ্যা অসীম অর্থাৎ যে শ্রেণীর পদগুলি অনন্ত পর্যন্ত বিস্তৃত তাহার আলোচনা করা হইতেছে। যে শ্রেণীর পদ-সংখ্যার সীমা নাই অর্থাৎ অসীম, তাহাকে **অসীম শ্রেণী** (infinite series) বলে।

10·2. n একটি অখণ্ড ধন-সংখ্যা ও r একটি প্রকৃত ভগ্নাংশ হইলে, প্রমাণ করিতে হইবে যে, n-এর মান যতই বাড়িতে থাকিবে, r^n-এর মান ততই কমিতে থাকিবে।

ধরা যাক, $r=\frac{3}{7}$. এখন যেহেতু কোন সংখ্যার $\frac{3}{7}$-তম অংশ স্পষ্টতঃ ঐ সংখ্যা অপেক্ষা ছোট, অতএব,

$(\frac{3}{7})^2$-এর মান $\frac{3}{7}$ অপেক্ষা ছোট ; কারণ, $(\frac{3}{7})^2=(\frac{3}{7})$-এর $\frac{3}{7}$;

$(\frac{3}{7})^3$-এর মান $(\frac{3}{7})^2$ অপেক্ষা ছোট ; কারণ, $(\frac{3}{7})^3=(\frac{3}{7})^2$-এর $\frac{3}{7}$;

$(\frac{3}{7})^4$-এর মান $(\frac{3}{7})^3$ অপেক্ষা ছোট ; কারণ, $(\frac{3}{7})^4=(\frac{3}{7})^3$-এর $\frac{3}{7}$।

সুতরাং, দেখা যাইতেছে যে, $\frac{3}{7}, (\frac{3}{7})^2, (\frac{3}{7})^3, (\frac{3}{7})^4, \ldots\ldots$ শ্রেণীতে, যে-কোন পদ উহার পূর্ববর্তী পদ অপেক্ষা ছোট ; অর্থাৎ n-এর মান যতই বাড়িতে থাকিবে, $(\frac{3}{7})^n$-এর মান ততই কমিতে থাকিবে।

এইপ্রকারে যে-কোন প্রকৃত ভগ্নাংশের ক্ষেত্রে উপরিউক্ত সিদ্ধান্তের সত্যতা প্রতিপন্ন করা যাইতে পারে।

সুতরাং, r-এর মান এক অপেক্ষা ছোট যে-কোন সংখ্যাই হউক না কেন, n-এর মান যতই বড় হইতে থাকিবে, r^n-এর মান ততই কমিতে থাকিবে।

টীকা। উপরিউক্ত দৃষ্টান্ত হইতে স্পষ্টই বুঝা যায় যে, r যে-কোন প্রকৃত ভগ্নাংশ সূচিত করিলে, n যদি অসীম হয়, তবে r^n-এর মান নগণ্য হইবে।

10·3. কোন গুণোত্তর-শ্রেণীর পদ-সংখ্যা অসীম হইলে, ঐ শ্রেণীর পদসমূহের সমষ্টি নির্ণয়।

a, ar, ar^2, ar^3 ইত্যাদি শ্রেণীটির বিষয় বিবেচনা করা যাক। ইহার প্রথম n-সংখ্যক পদের সমষ্টি S দ্বারা সূচিত করিলে, স্পষ্টতঃ,

$$S=\frac{a(1-r^n)}{r-r}=\frac{a}{1-r}-\frac{ar^n}{1-r}.$$

এখন, r এক প্রকৃত ভগ্নাংশ হইলে, n-এর মান যতই বাড়িতে থাকিবে, r^n $\left(\text{অতএব, } \frac{ar^n}{1-r}\right)$-এর মান ততই ক্ষুদ্রতর হইতে থাকিবে। সুতরাং, n (অর্থাৎ প্রদত্ত শ্রেণীর পদ-সংখ্যা)-এর মান ক্রমশঃ বর্ধিত করিয়া $\frac{ar^n}{1-r}$-এর মানকে যে-কোন অতিক্ষুদ্র সংখ্যা অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর করা যায়। অতএব, n-কে সীমাতীতরূপে বর্ধিত করিতে থাকিলে, n-সংখ্যক পদের সমষ্টিকে $\frac{a}{1-r}$-এর যতদূর ইচ্ছা সন্নিকটবর্তী করা যায়।

এই সিদ্ধান্তকেই সাধারণতঃ নিম্নলিখিতরূপে প্রকাশ করা হয়ঃ যে-কোন গুণোত্তর-শ্রেণীর সাধারণ অনুপাত এক প্রকৃত ভগ্নাংশ এবং পদ-সংখ্যা অসীম হইলে, উক্ত পদসমূহের সমষ্টি $\frac{a}{1-r}$-এর সমান হয়। অথবা, সংক্ষেপে, **অসীম-সংখ্যক পদবিশিষ্ট গুণোত্তর-শ্রেণীর পদসমূহের সমষ্টি** $=\frac{a}{1-r}$, অর্থাৎ, $\frac{\text{প্রথম পদ}}{1-(\text{ সাধারণ অনুপাত })}$।

দৃষ্টান্তঃ $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$ ইত্যাদি গুণোত্তর-শ্রেণীর বিষয় বিবেচনা করা যাক।

এক্ষেত্রে, $a=1, r=\frac{1}{2}$; $\therefore$ প্রথম n-সংখ্যক পদের সমষ্টি

$$=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)=2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)=2-\frac{1}{2^{n-1}}.$$

এখন, n-কে সীমাতীতরূপে বাড়াইতে থাকিলে, 2^{n-1} সীমাতীতরূপে বাড়িতে থাকিবে, এবং কাজেই, $\frac{1}{2^{n-1}}$ ক্রমশঃ কমিতে কমিতে নগণ্য হইয়া যাইবে।

সুতরাং, উপরিউক্ত শ্রেণীর পদ-সংখ্যা অসীম হইতে থাকিলে, পদসমূহের সমষ্টি ক্রমশঃ 2-এর সন্নিকটবর্তী হইতে থাকিবে ; অর্থাৎ,

উক্ত শ্রেণীর অসীম-সংখ্যক পদের সমষ্টি $=2$.

টীকা। লক্ষ্য করিবার বিষয় এই যে, কোন গুণোত্তর-শ্রেণীর n-সংখ্যক পদের সমষ্টি, n সীমাতীতরূপে বাড়িতে থাকিলে, ক্রমশঃ এক নির্দিষ্ট সসীম সংখ্যার সন্নিকটবর্তী হইতে থাকে, যদি উক্ত শ্রেণীর সাধারণ অনুপাত এক অপেক্ষা ছোট হয়। কিন্তু সাধারণ অনুপাত যদি এক অপেক্ষা বড় হয়, তাহা হইলে উপরিউক্ত সমষ্টির কোন নির্দিষ্ট সসীম মান থাকে না।

10·4. আবৃত্ত দশমিক (Recurring Decimals)। আবৃত্ত দশমিক অসীম গুণোত্তর-শ্রেণী দ্বারা উৎপন্ন রাশিমালার উৎকৃষ্ট দৃষ্টান্ত। যথা,

$$\cdot 2\dot{3}\dot{4} = \cdot 234343434\cdots\cdots$$

$$\left.\begin{aligned} &= \cdot 2 \\ &+ \cdot 034 \\ &+ \cdot 00034 \\ &+ \cdot 0000034 \\ &+ \cdots \text{ইত্যাদি} \end{aligned}\right\} = \frac{2}{10} + \frac{34}{10^3} + \frac{34}{10^5} + \frac{34}{10^7} + \cdots \text{ইত্যাদি।}$$

এক্ষেত্রে, $\frac{2}{10}$-এর পরবর্তী পদসমূহ এরূপ এক গুণোত্তর-শ্রেণী উৎপন্ন করিয়াছে, যাহার প্রথম পদ $\dfrac{34}{10^3}$ এবং সাধারণ অনুপাত $\dfrac{1}{10^2}$.

$$\text{অতএব, } \cdot 2\dot{3}\dot{4} = \frac{2}{10} + \frac{34}{10^3} \div \left(1 - \frac{1}{10^2}\right) = \frac{2}{10} + \frac{34}{990} = \frac{232}{990},$$

$$\left[\text{অর্থাৎ, } \frac{234-2}{990}\right].$$

উদা. 1. অসীম-সংখ্যক পদবিশিষ্ট কোন গুণোত্তর-শ্রেণীর পদসমূহ ক্রমশঃ কমিতে থাকিলে, উহার যে-কোন পদ এবং উক্ত পদের পরবর্তী পদসমূহের সমষ্টির অনুপাত এক ধ্রুবক-সংখ্যা হইবে।

মনে কর, উল্লিখিত গুণোত্তর-শ্রেণীটি $a, ar, ar^2, ar^3, \cdots\cdots$, ইত্যাদি দ্বারা সূচিত হইতেছে। এখন, ঐ শ্রেণীর n-তম পদ $= ar^{n-1}$;

এবং উক্ত n-তম পদের পরবর্তী পদসমূহের সমষ্টি

$$= ar^n(1 + r + r^2 + r^3 + \cdots\cdots \infty)$$

$$= ar^n \frac{1}{1-r},$$

$$\therefore\ (n\text{-তম পদ}) : (\text{উহার পরবর্তী পদসমূহের সমষ্টি}) \ \frac{ar^{n-1}}{ar^n \dfrac{1}{1-r}} = \frac{1-r}{r}$$

= এক ধ্রুবক-সংখ্যা, কারণ, n-এর মান যাহাই হউক না কেন, $\dfrac{1-r}{r}$-এর মান সকল ক্ষেত্রে একই থাকিবে।

[অসীম-সংখ্যক পদবিশিষ্ট গুণোত্তর-শ্রেণীকে সংক্ষেপে **অসীম গুণোত্তর-শ্রেণী** বলা হয়।]

উদা. 2. নিম্নলিখিত রাশিমালার মান নির্ণয় কর :

$\frac{3}{2}-\frac{2}{3}+\frac{8}{27}-\cdots\cdots$ অসীম-সংখ্যক পদ পর্যন্ত।

এক্ষেত্রে, $a=\frac{3}{2}$, এবং $r=-\frac{2}{3}\div\frac{3}{2}=-\frac{4}{9}$.

$$\therefore \quad \text{নির্ণেয় মান}=\frac{\frac{3}{2}}{1-(-\frac{4}{9})}=\frac{\frac{3}{2}}{1+\frac{4}{9}}=\frac{3}{2}\times\frac{9}{13}=\frac{27}{26}.$$

উদা. 3. $x<1$ হইলে, $1+2x+3x^2+4x^3+\cdots\cdots$ অসীম-সংখ্যক পদ পর্যন্ত রাশিমালার যোগফল নির্ণয় কর।

মনে কর, নির্ণেয় যোগফল $=S$; তাহা হইলে,

$$S=1+2x+3x^2+4x^3+\cdots\cdots\infty \qquad \cdots \quad (1)$$

এবং $\therefore \quad Sx= \quad x+2x^2+3x^3+\cdots\cdots\infty \qquad \cdots \quad (2)$

(1) হইতে (2) বিয়োগ করিয়া,

$$S(1-x)=1+x+x^2+x^3+\cdots\cdots\infty$$

$$=\frac{1}{1-x}.$$

$$\therefore \quad S=\frac{1}{(1-x)^2}.$$

প্রশ্নমালা 35

নিম্নলিখিত অসীম-সংখ্যক পদবিশিষ্ট রাশিমালাসমূহের মান নির্ণয় কর (Sum to infinity each of the following series) :

1. $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots$ ইত্যাদি। 2. $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\cdots$ ইত্যাদি।

3. $\frac{5}{8}+\frac{1}{2}+\frac{2}{5}+\frac{8}{25}+\cdots$ ইত্যাদি। 4. $1-\frac{2}{3}+\frac{4}{9}-\cdots$ইত্যাদি।

5. $3\frac{3}{8}+2\frac{1}{4}+1\frac{1}{2}+\cdots$ ইত্যাদি।

6. $\frac{2}{5}+\frac{3}{5^2}+\frac{2}{5^3}+\frac{3}{5^4}+\cdots$ ইত্যাদি।

7. $\frac{4}{7}+\frac{5}{7^2}+\frac{4}{7^3}+\frac{5}{7^4}+\cdots$ ইত্যাদি।

8. $\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3\sqrt{3}}+\cdots$ ইত্যাদি।

9. $(\sqrt{2}+1)+1+(\sqrt{2}-1)+\cdots$ ইত্যাদি।

10. কোন অসীম গুণোত্তর-শ্রেণীর প্রত্যেক পদ উহার পরবর্তী পদসমূহের সমষ্টির দশগুণের সমান। উহার সাধারণ অনুপাত নির্ণয় কর।

11. অসীম গুণোত্তর-শ্রেণীর যোগফল নির্ণয়ের প্রণালীতে নিম্নলিখিত সংখ্যাগুলির মান নির্ণয় কর :

(i) $\cdot 02\dot{7}$; (ii) $1\cdot 1\dot{4}\dot{5}$; (iii) $\cdot 21\dot{5}0\dot{1}$; (iv) $\cdot\dot{1}4285\dot{7}$.

নিম্নলিখিত অসীম-সংখ্যক পদবিশিষ্ট রাশিমালাসমূহের সমষ্টি নির্ণয় কর :

12. $1+3x+5x^2+7x^3+\cdots$ইত্যাদি।

13. $1.2x+2.4x^2+3.8x^3+\cdots$ ইত্যাদি।

14. $1.3x+4.9x^2+7.27x^3+\cdots$ ইত্যাদি।

15. $1-3x+5x^2-7x^3+\cdots$ ইত্যাদি।

16. $\frac{1}{3}+\frac{3}{9}+\frac{5}{27}+\cdots$ ইত্যাদি।

17. r এবং a প্রকৃত ভগ্নাংশ হইলে, $1+(1+a)r+(1+a+a^2)r^2+(1+a+a^2+a^3)r^3+\cdots\cdots$ অসীম পদ পর্যন্ত রাশিমালার মান নির্ণয় কর।

10·5. অসীম শ্রেণীগুলিকে ইহাদের যোগফলের প্রকৃতি অনুসারে সাধারণতঃ তিনভাগে ভাগ করা যায় :

(ক) যে শ্রেণীর পদ-সংখ্যা (n) অসীম পর্যন্ত হইলেও উহার n পদসমূহের যোগফল (s_n) কোন নির্দিষ্ট মান অতিক্রম করিতে পারে না, তাহাকে **অভিসারী** (convergent) **অসীম শ্রেণী** বলে। যথা,

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots\cdots\infty.$$

এই শ্রেণীর যোগফল 2-কে অতিক্রম করে না। এক্ষেত্রে দেখা যায় যে, n-এর মান যতই বৃদ্ধি পায়, যোগফল ততই 2-এর নিকটবর্তী হয়।

n-এর মান অসীমের দিকে অগ্রসর হইতেছে বুঝাইবার জন্য '$n \to \infty$' প্রতীকটি ব্যবহৃত হয়।

r যদি অসীমের দিকে অগ্রসর হয় ($r \to \infty$), তবে $\frac{1}{r}$-এর সীমাস্থ মান শূন্য (0) হয়।

r-এর মান 1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইলে ($|r| < 1$), ঐ অসীম শ্রেণীটি অভিসারী হয়।

(খ) যে শ্রেণীর পদ-সংখ্যা (n) অনন্তের দিকে অগ্রসর হইলে, উহার n-তম পদ অসীম হইয়া পড়ে এবং S_n-এর সীমাস্থ মানও অসীম হইয়া পড়ে—এরূপ শ্রেণীকে **অপসারী** (divergent) **অসীম শ্রেণী** বলে।

যথা, $1+2+3+4+\cdots\cdots\infty$, $1+2+2^2+2^3+\cdots\cdots\infty$. এরূপ শ্রেণীর যোগফল নির্ণয় করা সম্ভব নহে। এরূপ ক্ষেত্রে সাধারণ অন্তর বা অনুপাত কখনও 1-এর চেয়ে ক্ষুদ্রতর নহে।

(গ) উপরিউক্ত (ক) ও (খ) শ্রেণী ভিন্নও আর একপ্রকার অসীম শ্রেণী আছে, যাহার সমষ্টি বিভিন্ন ক্ষেত্রে বিভিন্ন হয়। এরূপ শ্রেণীকে **দোলায়মান** (oscillatory) **অসীম শ্রেণী** বলে। যথা,

$$1-1+1-1+1-\cdots\cdots\infty.$$

এক্ষেত্রে, শ্রেণীটিকে $(1-1)+(1-1)+(1-1)-\cdots\cdots\infty$ ধরিলে, ইহার সমষ্টি $=0$.

আবার, শ্রেণীটিকে $1-(1-1)-(1-1)-\cdots\cdots\infty$ ধরিলে, ইহার যোগফল $=1$.

10·6. ঋণাত্মক অথবা ভগ্নাঙ্ক সূচক-বিশিষ্ট দ্বিপদ উপপাদ্য (Binomial Theorem for negative or fractional index)।

x-এর সাংখ্যমান বা পরম মান 1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইলে, অর্থাৎ $|x|<1$ হইলে, ঋণাত্মক অথবা ভগ্নাঙ্ক n-এর জন্য, *

$$(1+x)^n=1+nx+\frac{n(n-1)}{\underline{|2}}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{\underline{|3}}x^3+\cdots\cdots$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{\underline{|r}}x^r+\cdots\cdots \text{অসীম পর্যন্ত।}$$

x-এর সাংখ্যমান বা পরম মান 1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইলে, x সংখ্যাটি -1 এবং 1-এর অন্তর্বর্তী শূন্য ভিন্ন (কারণ x শূন্য হইলে, $1+x$ দ্বিপদ হইবে না) কোন সংখ্যা হইবে। উহা -1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর, বা, 1 অপেক্ষা বৃহত্তর কোন সংখ্যা হইতে পারে না; অতএব, শর্তটিকে '$-1<x<1$ হইলে', এইরূপেও লেখা চলে। লক্ষণীয় যে, দক্ষিণ পক্ষস্থ শ্রেণীটির $(r+1)$-তম পদ হইতেছে

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{\underline{|r}}x^r;$$

স্পষ্টই, ইহার লব, n ঋণাত্মক অথবা ভগ্নাঙ্ক বলিয়া, r-এর কোন ধনাত্মক পূর্ণ মানের জন্যই শূন্য হইতে পারে না; অতএব, শ্রেণীটির কোন পদই শূন্য হইবে না। সুতরাং, শ্রেণীটি **অসীম পর্যন্ত** বিস্তৃত হইবে। মনে রাখিতে হইবে, n ঋণাত্মক অথবা ভগ্নাঙ্ক না হইয়া ধনাত্মক এবং পূর্ণসংখ্যা হইলেও $(1+x)^n$-এর বিস্তৃতির $(r+1)$-তম পদ হইবে

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{\underline{|r}}x^r,$$

* x-এর সাংখ্যমান 1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর বলিতে চিহ্ন-বর্জিত x-এর মান 1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর—এই অর্থ বুঝায়। সাংখ্যমান ও পরম মান সমার্থক। সুতরাং সাংকেতিক ভাষায় $|x|<1$ দ্বারা x-এর সাংখ্যমান 1 হইতে ক্ষুদ্রতর—এই অর্থ বুঝায়।

কিন্তু, এক্ষেত্রে, $(n+1)$, $(n+2)$, প্রভৃতি n অপেক্ষা বৃহত্তর r-এর যে-কোন ধনাত্মক, পূর্ণ মানের জন্যই পদটির লব শূন্য হইবে বলিয়া, বিস্তৃতিটিতে $(n+1)$-তম পদের পরে আর কোন পদই থাকিবে না, অর্থাৎ, এক্ষেত্রে শ্রেণীটি **সসীম** (finite) এবং ইহার পদ-সংখ্যা $n+1$.

অতএব একমাত্র, $-1 < x < 1$ হইলেই উপপাদ্যটি সত্য হয়, অন্যথা, $(1+x)^n$ দক্ষিণ পক্ষস্থ বিস্তৃতিটির সমান হইবে না। উদাহরণস্বরূপ,

x-এর স্থলে $-x$ এবং n-এর স্থলে -1 ধরিয়া বিস্তৃতিটির পদগুলি সরল করিয়া রাখিলে, নিম্নলিখিত বিস্তৃতিটি পাওয়া যায় :

$$(1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \qquad \cdots \quad (1)$$

x-এর স্থলে 2 বসাইলে,

বাম পক্ষ $= (1-2)^{-1} = (-1)^{-1} = -1$;

দক্ষিণ পক্ষ $= 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots$;

পূর্বেই দেখানো হইয়াছে ইহা একটি অপসারী শ্রেণী ; ইহার সমষ্টি কখনই -1 হইতে পারে না। অতএব, দেখা গেল, যখন $x>1$, অর্থাৎ যখন $-1<x<1$ নহে, তখন (1)-এর বাম পক্ষ ও দক্ষিণ পক্ষ সমান হয় না।

10·7. সাধারণ পদ।

বিস্তৃতির সাধারণ পদ $(r+1)$-তম পদকে t_{r+1} দ্বারা সূচিত করা হয়।

এখন, $$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{\lfloor 2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{\lfloor 3}x^3 + \cdots$$

$$\therefore \; \mathbf{t_{r+1} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{\lfloor r}\, x^r}.$$

10·8. কতিপয় প্রয়োজনীয় বিস্তৃতি।

(1) $$\mathbf{(1-x)^n} = 1 + n(-x) + \frac{n(n-1)}{\lfloor 2}(-x)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{\lfloor 3}(-x)^3 + \cdots + \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{\lfloor r}(-x)^r + \cdots$$

$$\mathbf{= 1 - nx + \frac{n(n-1)}{\lfloor 2}x^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{\lfloor 3}x^3 + \cdots + (-1)^r \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{\lfloor r}x^r + \cdots}.$$

(2) $$(1+x)^{-n}=1+(-n)x+\frac{-n(-n-1)}{\lfloor 2}x^2+\frac{-n(-n-1)(-n-2)}{\lfloor 3}x^3+\cdots+\frac{-n(-n-1)(-n-2)\cdots(-n-r+1)}{\lfloor r}x^r+\cdots$$

$$=1-nx+\frac{n(n+1)}{\lfloor 2}x^2-\frac{n(n+1)(n+2)}{\lfloor 3}x^3+\cdots+(-1)^r\frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+r-1)}{\lfloor r}x^r+\cdots.$$

(3) $(1-x)^{-n}$

$$=1+(-n)(-x)+\frac{(-n)(-n-1)}{\lfloor 2}(-x)^2+\cdots+\frac{(-n)(-n-1)(-n-2)}{\lfloor 3}(-x)^3+\cdots+\frac{(-n)(-n-1)(-n-2)\cdots(-n-r+1)}{\lfloor r}(-x)^r+\cdots$$

$$=1+nx+\frac{n(n+1)}{\lfloor 2}x^2+\frac{n(n+1)(n+2)}{\lfloor 3}x^3+\cdots+\frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+r-1)}{\lfloor r}x^r+\cdots$$

(4) $(1+x)^{-1}=1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^r x^r+\cdots$

(5) $(1-x)^{-1}=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^r+\cdots$

(6) $(1+x)^{-2}=1-2x+3x^2-4x^3+\cdots+(-1)^r(r+1)x^r+\cdots$

(7) $(1-x)^{-2}=1+2x+3x^2+4x^3+\cdots+(r+1)x^r+\cdots$

(8) $$(1+x)^{-3}=1-3x+6x^2-10x^3+\cdots+(-1)^r\frac{(r+1)(r+2)}{\lfloor 2}x^r+\cdots$$

(9) $$(1-x)^{-3}=1+3x+6x^2+10x^3+\cdots+\frac{(r+1)(r+2)}{\lfloor 2}x^r+\cdots$$

অনুসি. (1) $(1-x)^n$-এর বিস্তৃতির সাধারণ পদ

$$t_{r+1}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{\lfloor r}(-x)^r$$

$$=(-1)^r\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{\lfloor r}x^r.$$

(2) $(1+x)^{-n}$-এর বিস্তৃতির সাধারণ পদ

$$t_{r+1}=\frac{-n(-n-1)(-n-2)\cdots(-n-r+1)}{\lfloor r}x^r$$
$$=(-1)^r\frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+r-1)}{\lfloor r}x^r.$$

(3) $(1-x)^{-n}$-এর বিস্তৃতির সাধারণ পদ

$$t_{r+1}=\frac{-n(-n-1)(-n-2)\cdots(-n-r+1)}{\lfloor r}(-x)^r$$
$$=(-1)^r\frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+r-1)}{\lfloor r}(-1)^r x^r$$
$$=(-1)^{2r}\frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+r-1)}{\lfloor r}x^r$$
$$=\frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+r-1)}{\lfloor r}x^r.$$

দ্রষ্টব্য। (3)-এর সাধারণ পদের আকার হইতে বুঝা যায় $(1-x)^{-n}$-এর বিস্তৃতির সকল পদই ধনাত্মক।

10·9. ভগ্নাঙ্ক অথবা ঋণাত্মক সূচক-বিশিষ্ট (a + x)-এর n-তম ঘাত : (a + x)ⁿ-এর বিস্তৃতি।

(1) $x < a$ হইলে, $\frac{x}{a} < 1$;

$$\therefore\ (a+x)^n=\left\{a\left(1+\frac{x}{a}\right)\right\}^n$$
$$=a^n\left(1+\frac{x}{a}\right)^n$$
$$=a^n\left\{1+\frac{nx}{a}+\frac{n(n-1)}{\lfloor 2}\left(\frac{x}{a}\right)^2+\cdots\right\}$$
$$=a^n+na^{n-1}x+\frac{n(n-1)}{\lfloor 2}a^{n-2}x^2+\cdots.$$

(2) $x > a$ হইলে, $\frac{a}{x} < 1$;

$$\therefore\ (a+x)^n=\left\{x\left(1+\frac{a}{x}\right)\right\}^n$$
$$=x^n\left\{1+\frac{na}{x}+\frac{n(n-a)}{\lfloor 2}\left(\frac{a}{x}\right)^2+\cdots\right\}$$
$$=x^n+nx^{n-1}a+\frac{n(n-1)}{\lfloor 2}x^{n-2}a^2+\cdots.$$

উদা 1. $\dfrac{1}{(2-3x^2)^{\frac{4}{5}}}$-এর বিস্তৃতির প্রথম চারিটি পদ নির্ণয় কর।

[C. U., 1876]

$$\frac{1}{(2-3x^2)^{\frac{4}{5}}}=\frac{1}{2^{\frac{4}{5}}\left(1-\frac{3x^2}{2}\right)^{\frac{4}{5}}}=\frac{1}{2^{\frac{4}{5}}}\left(1-\frac{3x^2}{2}\right)^{-\frac{4}{5}}$$

$$=\frac{1}{2^{\frac{4}{5}}}\left\{1+(-\tfrac{4}{5})\cdot\left(-\frac{3x^2}{2}\right)+\frac{(-\frac{4}{5})(-\frac{4}{5}-1)}{\lfloor 2}\cdot\left(-\frac{3x^2}{2}\right)^2\right.$$

$$\left.+\frac{(-\frac{4}{5})(-\frac{4}{5}-1)(-\frac{4}{5}-2)}{1.2.3}\left(\frac{-3x^2}{2}\right)^3+\cdots\right\}$$

$$=\frac{1}{2^{\frac{4}{5}}}\left\{1+\frac{4}{5}\cdot\frac{3x^2}{2}+\frac{4.9}{5^2.2}\cdot\frac{9x^4}{4}+\frac{4.9.14}{5^3.2.3}\cdot\frac{27x^6}{8}+\cdots\right\}$$

$$=\frac{1}{\sqrt[5]{16}}\left\{1+\frac{6}{5}x^2+\frac{81}{50}x^4+\frac{567}{250}x^6+\cdots\right\}.$$

উদা. 2. $(1+x)^{\frac{1}{2}}$-এর বিস্তৃতির $(r+1)$-তম পদটি নির্ণয় কর।

$$(r+1)\text{-তম পদ}=\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)\cdots(\frac{1}{2}-r+1)}{\lfloor r}x^r$$

$$=\frac{1(-1)(-3)\cdots(-2r+3)}{2^r.\lfloor r}x^r$$

$$=(-1)^{r-1}.\frac{1.3.5.\cdots(2r-3)}{2^r.\lfloor r}x^r.$$

[লব হইতে উহার $(r-1)$-সংখ্যক গুণকের প্রত্যেকটি হইতে -1 বাহির করিয়া লইয়া।]

উদা 3. $(1-x)^{-4}$-এর বিস্তৃতির $(r+1)$-তম পদটি নির্ণয় কর।

[C. U., 1912, '16]

$$(r+1)\text{-তম পদ}=\frac{(-4)(-4-1)(-4-2)\cdots(-4-r+1)}{\lfloor r}\cdot(-x)^r$$

$$=\frac{(-4)(-5)(-6)\cdots(-r-3)}{\lfloor r}\cdot(-x)^r$$

$$=(-1)^r.\frac{4.5.6.\cdots(r+3)}{\lfloor r}\cdot(-1)^r.x^r$$

$$=(-1)^{2r}.\frac{4.5.6.\cdots(r+3)}{1.2.3.\cdots r}\cdot x^r$$

$$=\frac{(r+1)(r+2)(r+3)}{1.2.3}\cdot x^r.$$

(লব ও হর হইতে সমান পদগুলি অপসারণ করিয়া)

[মনে রাখিতে হইবে, n ভগ্নাঙ্ক, অথবা ঋণাত্মক হইলে, $(r+1)$-তম পদের সহগ ${}^nC_r$ নহে।]

উদা. 4. $(1-x)^{\frac{3}{2}}$-এর বিস্তৃতির r-তম পদ নির্ণয় কর। [C. U., 1878]

$$r\text{-তম পদ}=\frac{\frac{3}{2}(\frac{3}{2}-1)(\frac{3}{2}-2)\cdots(\frac{3}{2}-r+2)}{\underline{|r-1}}\cdot(-x)^{r-1}$$

$$=\frac{3.1.(-1)(-3)\cdots(-2r+7)}{2^{r-1}\underline{|r-1}}\cdot(-x)^{r-1}$$

$$=(-1)^{r-3}.\frac{3.1.1.3.5.\cdots(2r-7)}{2^{r-1}\underline{|r-1}}\cdot(-1)^{r-1}.x^{r-1}$$

[$r > 3$ ধরিয়া এবং লক্ষ্য করিয়া যে, লবের $(r-1)$-সংখ্যক গুণকের 2টি ভিন্ন সবগুলিই ঋণাত্মক]

$$=(-1)^{2r-4}.\frac{3.1.1.3.5.\cdots(2r-7)}{2^{r-1}\underline{|r-1}}\cdot x^{r-1}$$

$$=3\times\frac{1.3.5.\cdots(2r-7)}{2^{r-1}\underline{|r-1}}\cdot x^{r-1}.$$

উদা 5. দেখাও যে, $(1+x)^{\frac{5}{3}}$-এর বিস্তৃতিতে x^r-এর সহগ

$$\frac{10}{3^r}\cdot\frac{1.4.7\cdots(3r-8)}{r\,!}(-1)^{r-2}.$$

$(1+x)^{\frac{5}{3}}$-এর বিস্তৃতিতে ইহার $(r+1)$-তম পদে x^r থাকিবে।

$$\therefore\ \text{নির্ণেয় সহগ}=\frac{\frac{5}{3}(\frac{5}{3}-1)(\frac{5}{3}-2)(\frac{5}{3}-3)\cdots(\frac{5}{3}-r+1)}{r\,!}$$

$$=\frac{5.2.(-1)(-4)(-7)\cdots(-3r+8)}{3^r.r\,!}$$

$$=(-1)^{r-2}.\frac{5.2.1.4.7\cdots(3r-8)}{3^r.r\,!}$$

[লবের r-সংখ্যক গুণকের মাত্র 2টি ধনাত্মক, বাকী সবগুলিই ঋণাত্মক বলিয়া]

$$=\frac{10}{3r}\cdot\frac{1.4.7\cdots(3r-8)}{r\,!}(-1)^{r-2}.$$

উদা. 6. দেখাও যে, $(1-2x)^{-\frac{1}{2}}$-এর বিস্তৃতিতে $(r+1)$-তম পদটির সহগ

$$\frac{\lfloor 2r}{2^r(\lfloor r)^2}. \qquad [\text{C. U., 1938}]$$

$$(r+1)\text{-তম পদ} = \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)(\frac{1}{2}+2)\cdots(\frac{1}{2}+r-1)}{\lfloor r}.(2x)^r$$

$$= \frac{1.3.5\cdots(2r-1)}{2^r \lfloor r}.2^r.x^r$$

$$= \frac{1.3.5\cdots(2r-1)}{\lfloor r} x^r.$$

$$\therefore \quad (r+1)\text{-তম পদের সহগ} = \frac{1.3.5\cdots(2r-1)}{\lfloor r}$$

$$= \frac{1.3.5\cdots(2r-1).2.4.6\cdots 2r}{2.4.6\cdots 2r \lfloor r}$$

$$= \frac{\lfloor 2r}{2^r \lfloor r \lfloor r} = \frac{\lfloor 2r}{2^r(\lfloor r)^2}.$$

উদা. 7. x-এর শক্তির ঊর্ধ্বক্রম অনুসারে x^4 পর্যন্ত $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$-এর বিস্তৃতি নির্ণয় কর।

$$\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \sqrt{\frac{(1+x)^2}{1-x^2}} = \frac{1+x}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}} = (1+x)(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= (1+x)(1+\tfrac{1}{2}x^2+\tfrac{3}{8}x^4+\cdots)$$

$$= 1+x+\tfrac{1}{2}x^2+\tfrac{1}{2}x^3+\tfrac{3}{8}x^4.$$

প্রশ্নমালা 36

1. বিস্তৃতি নির্ণয় কর :

   (a) $\sqrt{1+x}$. (b) $\sqrt[3]{1-x}$. [C. U., 1911]

2. পাঁচটি পদ পর্যন্ত বিস্তৃতি নির্ণয় কর (Expand to 5 terms) :

   (a) $(1-2x)^{-3}$. (b) $(1-x)^{-\frac{1}{2}}$. (c) $(1-3x)^{-\frac{1}{3}}$.

3. চারিটি পদ পর্যন্ত $\left(1+\frac{2x}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$-এর বিস্তৃতি নির্ণয় কর।

4. চারিটি পদ পর্যন্ত $(9-6x)^{-\frac{3}{2}}$-এর বিস্তৃতি নির্ণয় কর।

5. পাঁচটি পদ পর্যন্ত বিস্তৃতি নির্ণয় কর :

(a) $(3a^{-2} - 2x)^{-1}$. (b) $\frac{1}{(1+\sqrt[3]{x})^6}$.

6. x-এর শক্তির ঊর্ধ্বক্রম অনুসারে x^6 পর্যন্ত $\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$-এর বিস্তৃতি নির্ণয় কর।

7. সহগ নির্ণয় কর :

(a) $(1-5x)^{-\frac{3}{4}}$-এর বিস্তৃতিতে x^7-এর। (b) $(1-2x)^{-1}$-এর বিস্তৃতিতে x^r-এর।

8. (a) $(1-4x)^{\frac{1}{2}}$ [C. U., 1923] এবং (b) $(1-\frac{1}{2}x)^{-\frac{1}{2}}$-এর বিস্তৃতির প্রথম চারিটি পদ নির্ণয় কর।

9. $(2-2x)^{\frac{11}{2}}$-এর বিস্তৃতির একাদশ পদটি নির্ণয় কর।

10. $(1-px)^{\frac{1}{p}}$-এর বিস্তৃতিতে $(r+1)$-তম পদটি নির্ণয় কর।

11. $\frac{1}{\sqrt[4]{1-x}}$-এর বিস্তৃতিতে $(r+1)$-তম পদটি নির্ণয় কর।

12. $(1-2x)^{-\frac{7}{2}}$-এর বিস্তৃতিতে $(r+1)$-তম পদটি নির্ণয় কর।

13. $(a^2+x^2)^{-2}$ এবং $(1-x^2)^{-\frac{1}{3}}$-এর বিস্তৃতিতে r-তম পদটি নির্ণয় কর।

14. $(a^5-b^3x^2)^{\frac{5}{2}}$-এর বিস্তৃতিতে x^{12}-এর সহগ নির্ণয় কর।

15. $(2^{10}-2^7.x)^{\frac{13}{2}}$-এর বিস্তৃতির চতুর্দশ পদটি নির্ণয় কর।

16. পাঁচটি পদ পর্যন্ত $\frac{3a}{(a^3-x^2)^{\frac{1}{3}}}$-এর বিস্তৃতি নির্ণয় কর এবং ঐ বিস্তৃতির $(r+1)$-তম পদটি লেখ।

17. (a) $(a-x)^{-\frac{1}{n}}$-এর বিস্তৃতির r-তম পদ, [C. U., 1885]

এবং (b) $(1-nx)^{-\frac{1}{n}}$-এর বিস্তৃতির সাধারণ পদ নির্ণয় কর।

18. $(1-2x)^{-\frac{2}{3}}$-এর বিস্তৃতিতে $(r+1)$-তম পদ নির্ণয় কর।

19. দেখাও যে, $(1-x)^{-n}$-এর বিস্তৃতিতে n-তম সহগ সর্বদাই $(n-1)$-তম সহগের দ্বিগুণ।

20. (*a*) দেখাও যে, $(1-4x)^{-\frac{1}{2}}$-এর বিস্তৃতিতে x^r-এর সহগ $\frac{\lfloor 2r}{(\lfloor r)^2}$.

(*b*) দেখাও যে, যদি t_r, $(1+x)^{2r}$-এর বিস্তৃতির মধ্যপদ হয়, তাহা হইলে,

$$t_0+t_1+t_2+\cdots=(1-4x)^{-\frac{1}{2}}.$$

21. দেখাও যে, $(1-x)^{-\frac{p}{q}}$-এর বিস্তৃতিতে x^r-এর সহগ

$$\frac{p(p+q)(p+2q)\cdots\{p+(r-1)q\}}{\lfloor r . q^r}.$$

22. $(1+2x)^{\frac{1}{2}}$-এর বিস্তৃতির কোন্ পদ $(1-2x)^{-\frac{1}{2}}$-এর বিস্তৃতির সেই পদের $\frac{1}{8}$।

10·10. বৃহত্তম পদ।

n ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হইলে, যে পদ্ধতিতে বৃহত্তম পদ নির্ণয় করা হইয়াছে, ভগ্নাংঙ্ক বা ঋণাত্মক n-এর ক্ষেত্রেও সেই একই পদ্ধতিতে বৃহত্তম পদ নির্ণয় করা যায়। নিম্নে প্রদত্ত উদাহরণগুলি হইতে প্রক্রিয়া সুস্পষ্ট হইবে।

উদা. 1. $x=\frac{2}{3}$ হইলে, $(1+x)^{\frac{21}{2}}$-এর বিস্তৃতিতে কোন্‌টি বৃহত্তম পদ?

$$T_{r+1}=\left(\frac{\frac{21}{2}-r+1}{r}\cdot x\right)\times T_r=\left(\frac{\frac{23}{2}-r}{r}\cdot\frac{2}{3}\right)\times T_r.$$

$\therefore$ $T_{r+1}>,=$, অথবা, $< T_r$ হইবে,

যদি $\frac{\frac{23}{2}-r}{r}\cdot\frac{2}{3}>,=$,অথবা,$<1$ হয়,

অর্থাৎ, যদি $23-2r>,=$, অথবা, $<3r$ হয়,

অর্থাৎ, যদি $23 \quad >,=$, অথবা, $<5r$ হয়,

অর্থাৎ, যদি $r \quad <,=$, অথবা, $>4\frac{3}{5}$ হয়।

অতএব, r-এর 4 পর্যন্ত সকল মানের জন্য $T_{r+1}>T_r$ এবং r-এর 4 অপেক্ষা বৃহত্তর মানের জন্য $T_{r+1}<T_r$. অতএব, পঞ্চম পদটি বৃহত্তম পদ।

উদা. 2. $x=\frac{5}{7}$ এবং $n=3$ হইলে, $(1+x)^{-n}$-এর বিস্তৃতিতে কোন্‌টি বৃহত্তম পদ?

$$T_{r+1}=\left(\frac{-n-r+1}{r}\cdot x\right)\times T_r=-\left(\frac{n+r-1}{r}\cdot x\right)\times T_r$$

$$=-\left(\frac{2+r}{r}\cdot\frac{5}{7}\right)\times Tr.$$

$\therefore \quad |T_{r+1}| >, =,$ অথবা, $< |T_r|$,

যদি $\frac{2+r}{r}\cdot\frac{5}{7} >, =,$ অথবা, < 1 হয়,

অর্থাৎ, যদি $10+5r >, =,$ অথবা, $< 7r$ হয়,

অর্থাৎ, যদি $\quad 10 >, =,$ অথবা, $< 2r$ হয়,

অর্থাৎ, যদি $\quad r <, =,$ অথবা, > 5 হয়,

অতএব, r-এর 4 পর্যন্ত মানের জন্য, $|T_{r+1}| > |T_r|$;

$r=5$ হইলে, $|T_{r+1}| = |T_r|$; r-এর 5 অপেক্ষা বৃহত্তর মানের জন্য $|T_{r+1}| < |T_r|$.

অতএব, চিহ্ন-বর্জিত পঞ্চম ও ষষ্ঠ পদ-দুইটি পরস্পর সমান হইবে এবং উহারাই বৃহত্তম পদ হইবে।

উদা. 3. দেখাও যে, $(1+2x)^{\frac{26}{3}}$-এর বিস্তৃতিতে একাদশ পদটিই প্রথম ঋণাত্মক পদ।

মনে কর, $(1+2x)^{\frac{26}{3}}$-এর বিস্তৃতিতে উহার $(r+1)$-তম পদ প্রথম ঋণাত্মক চিহ্নযুক্ত পদ ; তাহা হইলে r-তম পদটি ধনাত্মক।

এখন, $T_{r+1} = \frac{n-r+1}{r}\cdot 2x \times T_r$

$$= \frac{\frac{26}{3}-r+1}{r}\cdot 2x \times T_r = \frac{9\frac{2}{3}-r}{r}\cdot 2x \times T_r.$$

x এবং T_r ধনাত্মক বলিয়া, $9\frac{2}{3}-r$ ঋণাত্মক হইলে, Tr_{+1} ঋণাত্মক হইবে, অর্থাৎ $r > 9\frac{2}{3}$ হইলেই T_{r+1} ঋণাত্মক পদ হইবে। অতএব, $r=10$ হইলে, T_{r+1} প্রথম ঋণাত্মক পদ হইবে।

$\therefore \quad (r+1)$-তম পদ, অর্থাৎ 11-তম পদটিই প্রথম ঋণাত্মক পদ।

প্রশ্নমালা 37

নিম্নলিখিত বিস্তৃতিগুলির বৃহত্তম পদ কোন্‌টি ? (Which is the greatest term in each of the following expansions ?)

1. $(1+x)^{-n}$, যখন $x=\frac{1}{5}$ এবং $n=12$.

2. $(1-7x)^{-\frac{11}{4}}$, যখন $x=\frac{1}{8}$. 3. $(1+x)^{\frac{3}{2}}$, যখন $x=\frac{5}{8}$.

4. $(5-4x)^{-7}$, যখন $x=\frac{1}{2}$.

5. $(12+7x)^{-n}$, যখন $x=1$ এবং $n=\frac{8}{3}$.

6. বিস্তৃতির কোন্‌টি প্রথম ঋণাত্মক পদ ?

(i) $(1+x)^{3\frac{1}{3}}$. (ii) $\left(1+\frac{7x}{2}\right)^{\frac{13}{2}}$. [P. U., 1947]

7. $(1-x)^{\frac{7}{5}}$-এর বিস্তৃতির কতগুলি পদ ধনাত্মক, তাহা নির্ণয় কর।

10·11. দ্বিপদ উপপাদ্যের প্রয়োগ।

উদা. 1. দ্বিপদ উপপাদ্য প্রয়োগ করিয়া $\sqrt{24}$-এর মান পাঁচ দশমিক স্থান পর্যন্ত নির্ণয় কর। [C. U., 1872]

$$\sqrt{24}=(24)^{\frac{1}{2}}=(5^2-1)^{\frac{1}{2}}=5\left(1-\frac{1}{5^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=5\left[1+\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{5^2}\right)+\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{1.2}\cdot\left(-\frac{1}{5^2}\right)^2+\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{1.2.3}\cdot\left(-\frac{1}{5^2}\right)^3+\cdots\right]$$

$$=5\left[1-\frac{1}{2.5^2}-\frac{1}{2^3.5^4}-\frac{1}{2^4.5^6}-\cdots\right]$$

$$=5\left[1-\frac{2}{10^2}-\frac{2}{10^4}-\frac{2^2}{10^6}-\cdots\right]$$

$$=5[1-(\cdot02+\cdot0002+\cdot000004)-\&c.]$$

$$=5(1-\cdot020204)$$

(দশমিক বিন্দুর পরে পাঁচটি স্থানেই শূন্য আসে বলিয়া অন্যান্য পদগুলি বিবেচনা না করিয়া)

$$=5\times\cdot979796=4\cdot89898.$$

উদা. 2. 5 দশমিক স্থান পর্যন্ত $\sqrt[5]{3128}$-এর মান নির্ণয় কর।

$$\sqrt[5]{3128}=(3125+3)^{\frac{1}{5}}=(5^5+3)^{\frac{1}{5}}=5\left(1+\frac{3}{5^5}\right)^{\frac{1}{5}}$$

$$=5\left[1+\frac{1}{5}\cdot\frac{3}{5^5}+\frac{\frac{1}{5}(\frac{1}{5}-1)}{1.2}\cdot\frac{9}{5^{10}}+\cdots\right]$$

$$=5\left[1+\frac{3}{5^6}-\frac{1.4}{1.2}\cdot\frac{9}{5^{12}}+\cdots\right]$$

$$=5\left[1+\frac{3.2^6}{10^6}-\frac{18.2^{12}}{10^{12}}+\cdots\right]=5\left(1+\frac{192}{1000,000}\right)$$

(দশমিক বিন্দুর পরে পাঁচটি স্থানেই শূন্য আসে বলিয়া পরবর্তী পদগুলি বাদ দিয়া)

$$=5\times1\cdot000192=5\cdot00096.$$

উদা. 3. 1-এর সহিত তুলনায় x-এর মান ক্ষুদ্র হইলে, দেখাও যে,

$$\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt[3]{(1-x)^2}}{1+x+\sqrt{1+x}}=1-\frac{5x}{6} \text{ (প্রায়)।}$$

1-এর তুলনায় x-এর মান ক্ষুদ্র বলিয়া, আসন্ন মান নির্ণয়ের সময় $x^2, x^3, \ldots$ সংবলিত পদগুলিকে প্রত্যেকটি দ্বিপদের বিস্তৃতি হইতে বর্জন করিয়া কেবলমাত্র ঐ বিস্তৃতির প্রথম দুইটি পদ রাখিলেই যথেষ্ট হইবে।

অতএব, প্রদত্ত রাশি

$$=\frac{(1+x)^{\frac{1}{2}}+(1-x)^{\frac{2}{3}}}{1+x+(1+x)^{\frac{1}{2}}}=\frac{(1+\frac{1}{2}x)+(1-\frac{2}{3}x)}{1+x+(1+\frac{1}{2}x)}=\frac{2-\frac{1}{6}x}{2+\frac{3}{2}x}=\frac{1-\frac{1}{12}x}{1+\frac{3}{4}x}$$

$$=(1-\tfrac{1}{12}x)(1+\tfrac{3}{4}x)^{-1}=(1-\tfrac{1}{12}x)(1-\tfrac{3}{4}x)$$

$$=1-\tfrac{1}{12}x-\tfrac{3}{4}x \quad [\, x^2\text{-সংবলিত পদটি বাদ দিয়া} \,]$$

$$=1-\tfrac{5}{6}x.$$

উদা. 4. যদি c এরূপ একটি ক্ষুদ্র সংখ্যা হয় যে, l^3-এর সহিত তুলনায় c^3 উপেক্ষণীয়, তাহা হইলে, দেখাও যে, $\sqrt{\frac{l}{l+c}}+\sqrt{\frac{l}{l-c}}$, $2+\frac{3c^2}{4l^2}$-এর প্রায় সমান।

[C. U., 1888]

$$\sqrt{\frac{l}{l+c}}=\sqrt{\frac{1}{1+\frac{c}{l}}}=\left(1+\frac{c}{l}\right)^{-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2}\cdot\frac{c}{l}+\frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{1.2}\cdot\frac{c^2}{l^2}$$

$$+\frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})}{1.2.3}\cdot\frac{c^3}{l^3}+\cdots\cdots$$

$$=1-\frac{1}{2}\cdot\frac{c}{l}+\frac{3}{8}\cdot\frac{c^2}{l^2}-\frac{c^3}{l^3}\times \text{একটি অভিসারী অসীম শ্রেণী}$$

(পরবর্তী প্রত্যেক পদ হইতে $\frac{c^3}{l^3}$ সাধারণ গুণনীয়কটি বাহির করিয়া লইয়া)

$$=1-\frac{1}{2}\cdot\frac{c}{l}+\frac{3}{8}\cdot\frac{c^2}{l^2} \text{ (প্রায়)।}$$

[$\frac{c^3}{l^3}$ অতি ক্ষুদ্র একটি রাশি বলিয়া পরবর্তী অংশ বর্জন করিয়া]

অনুরূপ পদ্ধতিতে,

$$\sqrt{\frac{l}{l-c}}=\left(1-\frac{c}{l}\right)^{-\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}\cdot\frac{c}{l}+\frac{3}{8}\cdot\frac{c^2}{l^2}.$$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশিমালা $=2+\frac{3}{4}\cdot\frac{c^2}{l^2}$.

প্রশ্নমালা 38

1. 5 দশমিক স্থান পর্যন্ত 127-এর সপ্তম মূল নির্ণয় কর।

2. 4 দশমিক স্থান পর্যন্ত 1·03-এর ঘনমূল নির্ণয় কর।

3. দ্বিপদ উপপাদ্যের সাহায্যে 3 দশমিক স্থান পর্যন্ত মান নির্ণয় কর :

(i) $\sqrt[7]{108}$. (ii) $\sqrt[3]{999}$. (iii) $\sqrt[3]{\dfrac{98}{101}}$.

5 দশমিক স্থান পর্যন্ত মান নির্ণয় কর :

4. $\sqrt[3]{31}$ 5. $\sqrt[3]{126}$. 6. $\sqrt[3]{998}$.

যদি x-এর মান এত ক্ষুদ্র হয় যে ইহার বর্গ ও উচ্চতর ঘাত উপেক্ষণীয়, তাহা হইলে মান নির্ণয় কর :

7. $\dfrac{\sqrt{1-3x}+\sqrt[3]{(1-x)^5}}{\sqrt{4+x}}$. 8. $\dfrac{(1-x)^{\frac{1}{3}}+(1-5x)^2}{\sqrt[4]{16-x}}$.

10·12. বিবিধ প্রশ্নের সমাধান।

উদা. 1. $1+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1.3}{4.8}+\dfrac{1.3.5}{4.8.12}+\cdots\cdots$ইত্যাদি রাশিমালার সমষ্টি নির্ণয় কর।

$$\text{প্রদত্ত রাশিমালা} = 1+\tfrac{1}{2}.(\tfrac{1}{2})+\frac{1.3}{2.4}\cdot(\tfrac{1}{2})^2+\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot(\tfrac{1}{2})^3+\cdots\cdots$$

$$=1+\tfrac{1}{2}.(\tfrac{1}{2})+\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}{1.2}\cdot(\tfrac{1}{2})^2+\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}}{1.2.3}\cdot(\tfrac{1}{2})^3+\cdots\cdots$$

$$=(1-\tfrac{1}{2})^{-\frac{1}{2}}=(\tfrac{1}{2})^{-\frac{1}{2}}=1\div(\tfrac{1}{2})^{\frac{1}{2}}=1\div\frac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}.$$

উদা. 2. $1+\dfrac{3}{4}+\dfrac{3.5}{4.8}+\dfrac{3.5.7}{4.8.12}+\cdots\cdots$ ইত্যাদি রাশিমালার মান নির্ণয় কর।

$$\text{প্রদত্ত রাশিমালা} = 1+\tfrac{3}{2}.(\tfrac{1}{2})+\frac{3.5}{2.4}\cdot\tfrac{1}{2})^2+\frac{3.5.7}{2.4.6}\cdot(\tfrac{1}{2})^3+\cdots\cdots$$

$$=1+\tfrac{3}{2}.(\tfrac{1}{2})+\frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}}{1.2}\cdot(\tfrac{1}{2})^2+\frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{7}{2}}{1.2.3}\cdot(\tfrac{1}{2})^3+\cdots\cdots$$

$$=(1-\tfrac{1}{2})^{-\frac{3}{2}}=(\tfrac{1}{2})^{-\frac{3}{2}}=1\div(\tfrac{1}{2})^{\frac{3}{2}}=2^{\frac{3}{2}}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}.$$

উদা. 3. প্রমাণ কর যে,

$$\sqrt{2}=\frac{7}{5}\left(1+\frac{1}{10^2}+\frac{1.3}{1.2}\cdot\frac{1}{10^4}+\frac{1.3.5}{1.2.3}\cdot\frac{1}{10^6}+\cdots\right).$$

$$1+\frac{1}{10^2}+\frac{1.3}{1.2}\cdot\frac{1}{10^4}+\frac{1.3.5}{1.2.3}\cdot\frac{1}{10^6}+\cdots$$

$$=1+\frac{1}{10^2}+\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}{1.2}\cdot\frac{2^2}{10^4}+\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}}{1.2.3}\cdot\frac{2^3}{10^6}+\cdots\cdots$$

$$=1+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{10^2}+\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}{1.2}\cdot\left(\frac{2}{10^2}\right)^2+\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}}{1.2.3}\cdot\left(\frac{2}{10^2}\right)^3+\cdots\cdots$$

$$=\left(1-\frac{2}{10^2}\right)^{-\frac{1}{2}}=\left(1-\frac{1}{50}\right)^{-\frac{1}{2}}=\left(\frac{49}{50}\right)^{-\frac{1}{2}}=\left(\frac{50}{49}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{7}.$$

অতএব, দক্ষিণ পক্ষ $=\frac{7}{5}(\frac{5}{7}\sqrt{2})=\sqrt{2}.$

উদা. 4. প্রমাণ কর যে,

$$\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^n=1+n\cdot\frac{2x}{1+x}+\frac{n(n+1)}{1.2}\cdot\frac{2^2x^2}{(1+x)^2}+\cdots$$

$$\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^n=\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{-n}=\left(1-\frac{2x}{1+x}\right)^{-n}$$

$$=1+n\cdot\frac{2x}{1+x}+\frac{n(n+1)}{1.2}\cdot\left(\frac{2x}{1+x}\right)^2+\cdots$$

উদা. 5. $\dfrac{1+4x^2+x^4}{(1-x)^4}$-এর বিস্তৃতিতে x^r-এর সহগ কত ?

প্রদত্ত রাশিমালা

$$=(1+4x^2+x^4)(1-x)^{-4}$$

$$=(1+4x^2+x^4)(1+p_1x+p_2x^2+\cdots+p_rx^r+\cdots),$$ মনে কর ;

অতএব, x^r-এর সহগ $=p_r+4p_{r-2}+p_{r-4}.$

কিন্তু, $p_r=\dfrac{(r+3)(r+2)(r+1)}{1.2.3}.$ [পৃ. 235, উদা. 3]

∴ নির্ণেয় সহগ

$$=\frac{(r+3)(r+2)(r+1)}{1.2.3}+4\frac{(r+1)r(r-1)}{1.2.3}+\frac{(r-1)(r-2)(r-3)}{1.2.3}$$

$$=\frac{(r^3+6r^2+11r+6)+4(r^3-r)+(r^3-6r^2+11r-6)}{5}$$

$$=\frac{6r^3+18r}{6}=r^3+3r.$$

উদা. 6. $\dfrac{2+x+x^2}{(1+x)^3}$-এর বিস্তৃতিতে x^n-এর সহগ নির্ণয় কর।

প্রদত্ত রাশিটি $=(2+x+x^2)(1+x)^{-3}$

$=(2+x+x^2)(1+p_1x+p_2x^2+\cdots+p_nx^n+\cdots)$, মনে কর;

$\therefore$ x^n-এর সহগ $=2p_n+p_{n-1}+p_{n-2}$.

কিন্তু $p_n=(-1)^n\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$ [অনু. 10·8]

$\therefore$ নির্ণেয় সহগ $=(-1)^n.2\cdot\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}+(-1)^{n-1}.\dfrac{n(n+1)}{2}+(-1)^{n-2}.\dfrac{(n-1)n}{2}$

$$=\frac{(-1)^n}{2}\Big\{2(n+1)(n+2)-n(n+1)+(n-1)n\Big\}$$

$\left[\because\ (-1)^{n-1}=\dfrac{(-1)^n}{-1}=-(-1)^n,\text{ এবং }(-1)^{n-2}=\dfrac{(-1)^n}{(-1)^2}=(-1)^n\right]$

$$=\frac{(-1)^n}{2}(2n^2+4n+4)=(-1)^n.(n^2+2n+2).$$

উদা. 7. x-এর ঘাতের ঊর্ধ্বক্রম অনুসারে $\dfrac{3x-8}{4-4x+x^2}$-এর বিস্তৃতিতে প্রমাণ কর যে, x^4-এর সহগ $=-\frac{1}{4}$, এবং x^r-এর সহগ নির্ণয় কর।

প্রদত্ত রাশিটি $=\dfrac{3x-8}{(2-x)^2}=\dfrac{3x-8}{4\left(1-\frac{x}{2}\right)^2}=\dfrac{1}{4}\Big(3x-8\Big)\Big(1-\dfrac{x}{2}\Big)^{-2}$

$$=\frac{1}{4}\Big(3x-8\Big)\Big(1+2\cdot\frac{x}{2}+3\cdot\frac{x^2}{2^2}+4\cdot\frac{x^3}{2^3}+\cdots+r\cdot\frac{x^{r-1}}{2^{r-1}}+(r+1)\cdot\frac{x^r}{2^r}+\cdots\Big);$$

অতএব, x^r-এর সহগ

$$=\frac{1}{4}\Big[3\cdot\frac{r}{2^{r-1}}-8\cdot\frac{r+1}{2^r}\Big]=\frac{3r}{2^{r+1}}-\frac{8(r+1)}{2^{r+2}}$$

$$=\frac{6r-8(r+1)}{2^{r+2}}=-\frac{2r+8}{2^{r+2}}=-\frac{r+4}{2^{r+1}}.$$

$\therefore$ x^4-এর সহগ $=-\dfrac{4+4}{2^5}=-\dfrac{8}{32}=-\dfrac{1}{4}.$

উদা. 8. যদি $(1-x)^{-n}=p_0+p_1x+p_2x^2+\cdots+p_rx^r+\cdots$,
$p_0+p_1+p_2+\cdots+p_r$-এর মান নির্ণয় কর।

$$(1-x)^{-n}=p_0+p_1x+p_2x^2+\cdots+p_rx^r+\cdots \quad \cdots \quad (1)$$

এবং $(1-x)^{-1}=1+x+x^2+\cdots+x^r+\cdots \quad \cdots \quad (2)$

$p_0+p_1+p_2+\cdots+p_r=$ (1) এবং (2)-এর দক্ষিণপক্ষস্থ শ্রেণী-দুইটির গুণফলের x^r-এর সহগ

$=(1-x)^{-n}.(1-x)^{-1}$-এর x^r-এর সহগ

$=(1-x)^{-(n+1)}$-এর x^r-এর সহগ

$$=\frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+r)}{\lfloor r}.$$

উদা. 9. যদি $p_r=\dfrac{1.3.5\cdots(2r-1)}{2.4.6\cdots 2r}$, প্রমাণ কর যে,

$$p_{2n+1}+p_1p_{2n}+p_2p_{2n-1}+\cdots+p_{n-1}p_{n+2}+p_np_{n+1}=\tfrac{1}{2}.$$

$$p_r=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdots\frac{2r-1}{2}}{1.2.3\cdots r}=\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)(\frac{1}{2}+2)\cdots(\frac{1}{2}+r-1)}{\lfloor r}$$

$=(1-x)^{-\frac{1}{2}}$-এর x^r-এর সহগ।

অতএব, p_1, p_2, p_3,$\cdots$ যথাক্রমে $(1-x)^{-\frac{1}{2}}$-এর বিস্তৃতির x, x^2, x^3,$\cdots$ $\cdots$-এর সহগ।

$$\therefore\ (1-x)^{-\frac{1}{2}}=1+p_1x+p_2x^2+\cdots+p_{2n}x^{2n}+p_{2n+1}x^{2n+1}+\cdots$$

দুই পক্ষ বর্গ করিলে, দক্ষিণ পক্ষের x^{2n+1}-এর সহগ

$2(p_{2n+1}+p_1p_{2n}+p_2p_{2n-1}+\cdots+p_{n-1}p_{n+2}+p_np_{n+1})$

$=$ বাম পক্ষের বর্গের x^{2n+1}-এর সহগ, অর্থাৎ $\{(1-x)^{-\frac{1}{2}}\}^2$

$=(1-x)^{-1}$-এর x^{2n+1}-এর সহগ

$=1.$

$$\therefore\ p_{2n+1}+p_1p_{2n}+p_2p_{2n-1}+\cdots+p_{n-1}p_{n+2}+p_np_{n+1}=\tfrac{1}{2}.$$

উদা. 10. যদি n একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হয়, তবে দেখাও যে, $(3+\sqrt{5})^n$-এর অখণ্ড অংশ একটি অযুগ্ম সংখ্যা।

মনে কর, $(3+\sqrt{5})^n = I+f$, (I একটি পূর্ণসংখ্যা এবং f একটি প্রকৃত ভগ্নাংশ)।

$$I+f=(3+\sqrt{5})^n$$
$$=3^n+{}^nC_1.3^{n-1}.\sqrt{5}+{}^nC_2.3^{n-2}.5$$
$$+{}^nC_3 3^{n-3}(\sqrt{5})^3+\cdots \quad \cdots (1)$$

এখন, $3-\sqrt{5}$ ধনাত্মক এবং 1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর ;

$\therefore$ $(3-\sqrt{5})^n$ একটি প্রকৃত ভগ্নাংশ ; ইহাকে f' দ্বারা সূচিত কর।

তাহা হইলে,

$$f'=(3-\sqrt{5})^n=3^n-{}^nC_1 3^{n-1}.\sqrt{5}+{}^nC_2 3^{n-2}.5$$
$$-{}^nC_3 3^{n-3}.(\sqrt{5})^3+\cdots \quad \cdots (2)$$

$\therefore$ (1) ও (2) যোগ করিলে, দক্ষিণ পক্ষের অমূলদ পদগুলির মান শূন্য হইয়া যায়, এবং

$$I+f+f'=2\{3^n+{}^nC_2 3^{n-2}.5+\cdots\}$$
$$= \text{একটি যুগ্ম সংখ্যা ;}$$

$\therefore$ $f+f'$ অবশ্যই একটি পূর্ণসংখ্যা হইবে ; কিন্তু f একটি প্রকৃত ভগ্নাংশ ;

$\therefore$ $f<1$; আবার f' প্রকৃত ভগ্নাংশ বলিয়া, $f'<1$;

$\therefore$ $f+f'<2$; $\therefore$ $f+f'=1$.

অতএব, I = একটি যুগ্ম সংখ্যা -1 = একটি অযুগ্ম সংখ্যা।

প্রশ্নমালা 39

1. $(1+x+x^2+x^3+\cdots$ অসীম-সংখ্যক পদ পর্যন্ত$)^{-11}$-এর বিস্তৃতিতে x^{11}-এর সহগ নির্ণয় কর।

2. $(1+2x+3x^2+4x^3+\cdots$ অসীম-সংখ্যক পদ পর্যন্ত$)^{-3}$-এর বিস্তৃতিতে x^7-এর সহগ নির্ণয় কর।

3. $(1+3x+6x^2+10x^3+\cdots$ অসীম-সংখ্যক পদ পর্যন্ত$)^{\frac{2}{3}}$-এর বিস্তৃতিতে x^{24}-এর সহগ নির্ণয় কর।

4. $(1+2x+3x^2+\cdots$ অসীম-সংখ্যক পদ পর্যন্ত$)^2$-এর বিস্তৃতিতে x^r-এর সহগ নির্ণয় কর।

5. (i) $\dfrac{1+x}{(1-x)^3}$-এর বিস্তৃতিতে x^{10}-এর সহগ নির্ণয় কর। [C. U., 1937]

(ii) $\dfrac{1-2x}{3+2x-x^2}$-এর বিস্তৃতিতে x^7-এর সহগ নির্ণয় কর।

[C. U., 1909]

6. $\frac{1+x}{1-x}$-এ x^5-এর সহগ নির্ণয় কর। [C. U., 1919]

7. (i) $(1+x)^{-2}$-এর বিস্তৃতিতে x^4-এর সহগ নির্ণয় কর। [C. U., 1915]

(ii) $(1+x+x^2+x^3+\cdots)^{-n}$-এর বিস্তৃতিতে x^n-এর সহগ নির্ণয় কর। [C. U., 1913]

(iii) $(1-x+x^2-x^3+\cdots\cdots)^3$-এর বিস্তৃতিতে x^r-এর সহগ নির্ণয় কর।

8. (i) দেখাও যে, $(1+x+x^2+x^3+\cdots\cdots)^2$

$$=1+2x+3x^2+4x^3+\cdots$$ [C. U., 1922]

(ii) প্রমাণ কর যে, $(1+2x+3x^2+4x^3+\cdots\cdots)\times(1+x+x^2+\cdots)$

$$=\tfrac{1}{2}(1.2+2.3x+3.4x^2+4.5x^3+\cdots\cdots).$$

9. (i) যদি $y=2x+3x^2+4x^3+\cdots\cdots$ হয়, তাহা হইলে y-এর ঊর্ধ্বক্রমিক ঘাতবিশিষ্ট এক শ্রেণীর মাধ্যমে x-এর মান প্রকাশ কর।

(ii) যদি $y=3x-6x^2+10x^3-\cdots\cdots$,

প্রমাণ কর যে, $x=\frac{1}{3}y+\frac{1.4}{\lfloor 2}\left(\frac{y}{3}\right)^2+\frac{1.4.7}{\lfloor 3}\left(\frac{y}{3}\right)^3+\cdots$

10. $1+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{2.5}{3.6}\cdot\frac{1}{2^2}+\frac{2.5.8}{3.6.9}\cdot\frac{1}{2^3}+\cdots$-এর মান নির্ণয় কর।

11. $1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{3^2}-\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1}{3^3}+\cdots$-এর মান নির্ণয় কর।

12. দেখাও যে, $\sqrt{3}=1+\frac{1}{3}+\frac{1.3}{3.6}+\frac{1.3.5}{3.6.9}+\frac{1.3.5.7}{3.6.9.12}+\cdots$

13. প্রমাণ কর যে, $1+\frac{1}{6}+\frac{1.4}{6.12}+\frac{1.4.7}{6.12.18}+\frac{1.4.7.10}{6.12.18.24}+\cdots=\sqrt[3]{2}.$

14. দেখাও যে, (a) $\sqrt{\frac{2}{3}}=1-\frac{1}{4}+\frac{1.3}{4.8}-\frac{1.3.5}{4.8.12}+\cdots$

(b) $\sqrt{8}=1+\frac{3}{4}+\frac{3.5}{4.8}+\frac{3.5.7}{4.8.12}+\cdots$

অসীম-সংখ্যক পদ পর্যন্ত নিম্নলিখিত শ্রেণীসমূহের সমষ্টি নির্ণয় কর (Find the sum to infinity of the following series) :

15. $1+2\cdot\frac{1}{3^2}+\frac{2.5}{1.2}\cdot\frac{1}{3^4}+\frac{2.5.8}{1.2.3}\cdot\frac{1}{3^6}+\cdots$

16. $1+\frac{4}{6}+\frac{4.5}{6.9}+\frac{4.5.6}{6.9.12}+\cdots$ [Andhra, 1954]

17. $1+\frac{5}{8}+\frac{5.8}{8.12}+\frac{5.8.11}{8.12.16}+\cdots$ [Annamalai, 1949]

18. $1-\frac{1}{2^3}+\frac{1.3}{1.2}\cdot\frac{1}{2^6}-\frac{1.3.5}{1.2.3}\cdot\frac{1}{2^9}+\cdots$

19. $1-\frac{3}{4}+\frac{3.5}{4.8}-\frac{3.5.7}{4.8.12}+\cdots$ [Gujrat, 1952]

20. $2+\frac{5}{2!\,3}+\frac{5.7}{3!\,3^2}+\frac{5.7.9}{4!\,3^3}+\cdots$ [Allahabad, 1946]

21. $1+3\cdot\frac{3}{16}+3^2\cdot\frac{3.7}{16.32}+3^3\cdot\frac{3.7.11}{16.32.48}+\cdots$

22. দেখাও যে, $(1+x)^{-n}=\frac{1}{2^n}\left[1+n\cdot\frac{1-x}{1+x}+\frac{n(n-1)}{\underline{|2}}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2\right.$

$$\left.+\frac{n(n-1)(n-2)}{\underline{|3}}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^3+\cdots\right].$$ [C. U., 1914]

23. দেখাও যে,

$$(a-b)^n=a^n\left\{1-n\left(\frac{b}{a-b}\right)+\frac{n(n+1)}{1.2}\left(\frac{b}{a-b}\right)^2-\cdots\right\}.$$

$$\left[(a-b)^n=\left(\frac{1}{a-b}\right)^{-n}=a^n\cdot\left(\frac{a}{a-b}\right)^{-n}=a^n\cdot\left(1+\frac{b}{a-b}\right)^{-n}\right].$$

24. দেখাও যে,

(i) $\left(\frac{1+2x}{1+x}\right)^n=1+n\left(\frac{x}{1+2x}\right)+\frac{n(n+1)}{1.2}\left(\frac{x}{1+2x}\right)^2+\cdots$

(ii) $(1+x)^{-n}=(2x)^{-n}\left\{1-n\cdot\frac{1-x}{1+x}+\frac{n(n-1)}{1.2}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2-\cdots\right\}.$

25. প্রমাণ কর যে,

$$1+n\cdot\frac{2x}{1+x}+\frac{n(n+1)}{\underline{|2}}\cdot\left(\frac{2x}{1+x}\right)^2+\cdots$$

$$=1+n\cdot\frac{2x}{1-x}+\frac{n(n-1)}{\underline{|2}}\cdot\left(\frac{2x}{1-x}\right)^2+\cdots$$

26. দেখাও যে,

$$\sqrt{x}=1+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{x}\right)+\frac{1.3}{2^2\underline{|2}}\left(1-\frac{1}{x}\right)^2+\cdots$$

27. দেখাও যে,

$$\frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{2x}{1+x}+\frac{1}{2}\left(\frac{2x}{1+x}\right)^2+\frac{1.3}{2.4}\left(\frac{2x}{1+x}\right)^3+\cdots$$

28. দেখাও যে,

$$1-\frac{n+3x}{1+3x}+\frac{(n-1)(n+6x)}{(1+3x)^2\lfloor 2}-\frac{(n-1)(n-2)(n+9x)}{(1+3x)^3\lfloor 3}+\cdots=0.$$

29. প্রমাণ কর যে,

$$2^n\left\{1+\frac{1}{3}n+\frac{n(n+1)}{1.2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2+\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3+\cdots\right\}=3^n.$$

30. প্রমাণ কর যে,

$$3^n\left\{1+\frac{2n}{5}+\frac{2n(2n+2)}{5.10}+\frac{2n(2n+2)(2n+4)}{5.10.15}+\cdots\right\}$$

$$=2^n\left\{1+\frac{3n}{5}+\frac{3n(3n+3)}{5.10}+\frac{3n(3n+3)(3n+6)}{5.10.15}+\cdots\right\}.$$

31. নিম্নলিখিত বিস্তৃতিতে x^n-এর সহগ নির্ণয় কর :

(a) $\frac{(1-2x)^2}{(1+x)^3}$. (b) $\frac{x}{(1-3x)(1-4x)}$.

32. দেখাও যে, $\frac{(1-2x)^2}{(1-x)^4}$-এর বিস্তৃতিতে x^n-এর সহগ $\frac{1}{6}(n-6)(n^2-1)$.

33. $\frac{(1+x)^2}{(1-x)^2}$-এর বিস্তৃতিতে x^n-এর সহগ নির্ণয় কর। [C. U., 1939]

34. $\frac{(1+x)^2}{(1-x^2)^3}$-এর বিস্তৃতিতে x^{2n+1}-এর সহগ নির্ণয় কর।

35. $(1+x+x^2)^{-1}$-এর বিস্তৃতিতে x^{10}-এর সহগ নির্ণয় কর।

36. দেখাও যে, $(1-2x+3x^2-4x^3+\cdots)^{-n}$-এর বিস্তৃতিতে x^n-এর সহগ $\frac{1.3.5\cdots(2n-1)}{n\,!}\cdot 2^n$.

37. দেখাও যে, $(1-x)^{-4}$-এর বিস্তৃতিতে প্রথম $(r+1)$-সংখ্যক পদের সহগের সমষ্টি $\frac{(r+1)(r+2)(r+3)(r+4)}{1.2.3.4}$.

38. অসীম-সংখ্যক পদ পর্যন্ত নিম্নলিখিত শ্রেণীসমূহের সমষ্টি নির্ণয় কর :

(a) $1+\frac{1}{6}+\frac{1.6}{6.12}+\frac{1.6.11}{6.12.18}+\cdots$

(b) $1+\frac{1}{9}+\frac{1.3}{1.2}\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^2+\frac{1.3.5}{1.2.3}\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^3+\cdots$

39. দেখাও যে,

$$\frac{5}{3.6}+\frac{5.7}{3.6.9}+\frac{5.7.9}{3.6.9.12}+\cdots=\frac{1}{3}(3\sqrt{3}-2).$$

40. যদি n একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হয়, তবে দেখাও যে, $(5+2\sqrt{6})^n$-এর অখণ্ড অংশ একটি অযুগ্ম সংখ্যা।

41. যদি $(\sqrt{10}+3)^{2n+1}=I+F$, যখন I অখণ্ড অংশ এবং F একটি প্রকৃত ভগ্নাংশ, দেখাও যে, n একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হইলে, $F(I+F)=1$.

42. $\sqrt{\dfrac{a+x}{a-x}}$-এর বিস্তৃতিতে x^{2r} এবং x^{2r+1}-এর সহগ নির্ণয় কর।

$$\left[\text{ইঙ্গিত :}\quad \left(\frac{a+x}{a-x}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{a+x}{(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}}=(a+x)(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}.\right]$$

43. প্রমাণ কর যে, যদি n একটি ধনাত্মক যুগ্ম পূর্ণরাশি হয়,

$$\frac{1}{\underline{|1}\,\underline{|n-1}}+\frac{1}{\underline{|3}\,\underline{|n-3}}+\frac{1}{\underline{|5}\,\underline{|n-5}}+\cdots+\frac{1}{\underline{|n-1}\,\underline{|1}}=\frac{2^{n-1}}{\underline{|n}}.$$

$$\left[\text{ইঙ্গিত :}\quad \text{দক্ষিণ পক্ষস্থ রাশিমালা}=\frac{1}{\underline{|n}}\left\{n+\frac{n(n-1)(n-2)}{\underline{|3}}+\cdots\right\}.\right]$$

44. দ্বিপদ রাশির বিস্তৃতির সহিত অভিন্ন প্রতিপন্ন করিয়া (identifying) দেখাও যে,

$$\frac{1.3}{3.6}+\frac{1.3.5}{3.6.9}+\frac{1.3.5.7}{3.6.9.12}+\cdots=0{\cdot}4 \text{ (প্রায়)}।$$ [Rajputana, 1950]

45. n-এর আকার $3m$, $3m-1$, বা, $3m+1$ হইলে, প্রমাণ কর যে, $\dfrac{1}{1+x+x^2}$-এর বিস্তৃতিতে x^n-এর সহগ যথাক্রমে 1, 0, বা, -1.

[Punjab, 1953]

একাদশ অধ্যায়

লগারিদ্‌ম ও উহার প্রয়োগ

11·1. $a^x = m$ হইলে x-সূচকটিকে a-নিধান সাপেক্ষে m-এর **লগারিদ্‌ম** বলে এবং উহাকে অর্থাৎ x-কে $\log_a m$-রূপে লিখিয়া বুঝান হয়। সুতরাং, $a^x = m$ হইলে $x = \log_a m$ সমীকরণ-দুইটি সমার্থক।

অতএব, কোন নিধান সাপেক্ষে একটি সংখ্যার **লগারিদ্‌ম** বলিতে ঐ সংখ্যার এমন একটি সূচক বুঝায় যে নিধানটির ঐ সূচকনির্দিষ্ট ঘাতই সংখ্যাটির মান সূচিত করে।

উদাহরণস্বরূপ :

$1 = 10^0$ বলিয়া $\log_{10} 1 = 0$; $10 = 10^1$ বলিয়া $\log_{10} 10 = 1$; $100 = 10^2$ বলিয়া $\log_{10} 100 = 2$, ইত্যাদি।

অনুরূপে, $\cdot 1 = \frac{1}{10} = 10^{-1}$ বলিয়া $\log_{10} \cdot 1 = -1$; $\cdot 01 = \frac{1}{100} = \frac{1}{10^2} = 10^{-2}$ বলিয়া $\log_{10} \cdot 01 = -2$; $\cdot 001 = 10^{-3}$ বলিয়া $\log_{10} \cdot 001 = -3$, ইত্যাদি।

টীকা। উপরের উদাহরণগুলিতে নিধান 10 ধরা হইয়াছে। নিধান যে-কোন সংখ্যা হইতে পারে, কিন্তু উল্লেখ না থাকিলে শুধু $\log 2$, $\log 3$ প্রভৃতির প্রত্যেক ক্ষেত্রে নিধান 10 বুঝিতে হয়।

11·2. লগারিদ্‌মের তত্ত্বাবলী :

(i) দুই বা ততোধিক সংখ্যার গুণফলের লগারিদ্‌ম, ঐ সংখ্যাগুলির লগারিদ্‌মের সমষ্টির সমান :

x, y ও z এই তিনটি সংখ্যার গুণফলের লগারিদ্‌ম $= \log (xyz)$.

ধরা যাক, $\log_a x = m$, $\log_a y = n$, $\log_a z = p$.

$\therefore\ x = a^m,\ y = a^n,\ z = a^p$;

$\therefore\ xyz = a^{m+n+p}$; সুতরাং সজ্ঞানুসারে,

$$\log_a (xyz) = m + n + p = \log_a x + \log_a y + \log_a z.$$

(ii) একটি ভাগফলের লগারিদ্‌ম সংশ্লিষ্ট ভাজ্য ও ভাজকের লগারিদ্‌মের অন্তরের সমান :

অর্থাৎ, x ভাজ্য এবং y ভাজক ধরিলে $\frac{x}{y} =$ ভাগফল এবং সেক্ষেত্রে,

$$\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y.$$

ধরা যাক, $\log_a x = m$, $\log_a y = n$.

$\therefore \quad x = a^m, \; y = a^n$;

$\therefore \quad \frac{x}{y} = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$; সুতরাং সংজ্ঞা অনুসারে,

$$\mathbf{\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = m - n = \log_a x - \log_a y.}$$

(iii) কোন সংখ্যার একটি ঘাতের লগারিদ্‌ম, ঐ ঘাতের সূচক ও সংখ্যাটির লগারিদ্‌মের গুণফলের সমান ঃ

ধরা যাক, $\log_a x = m$.

$\therefore \quad x = a^m$;

$\therefore \quad x^n = (a^m)^n = a^{nm}$. সুতরাং সংজ্ঞা অনুসারে,

$$\mathbf{\log_a (x^n) = nm = n \log_a x.}$$

(iv) যে-কোন নিধান সাপেক্ষে 1-এর লগারিদ্‌ম শূন্য।

কারণ, $a^0 = 1$, $b^0 = 1$, $c^0 = 1$, ইত্যাদি বলিয়া

$\log_a 1 = 0$, $\log_b 1 = 0$, $\log_c 1 = 0$, ইত্যাদি।

(v) যে-কোন সংখ্যার নিজেরই সমান নিধান সাপেক্ষে লগারিদ্‌ম $= 1$; কারণ, $a^1 = a$, $b^1 = b$, $c^1 = c$, ইত্যাদি ;

অতএব, $\log_a a = 1$, $\log_b b = 1$, $\log_c c = 1$, ইত্যাদি।

(vi) নিধান-পরিবর্তনের সূত্র ঃ

x, a, b যে-কোন তিনটি ধনাত্মক সংখ্যা হইলে,

$$\mathbf{\log_a x = \log_b x \times \log_a b} \text{ এবং } \mathbf{\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}}.$$

ধরা যাক, $\log_a x = m$, $\log_b x = n$.

$\therefore \quad x = a^m = b^n$.

$\therefore \quad a^{\frac{m}{n}} = b$; $\therefore \quad \frac{m}{n} = \log_a b$;

$\therefore \quad m = n \log_a b$,

অর্থাৎ $\log_a x = \log_b x \times \log_a b$, এবং $\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$.

অনুরূপে, $\mathbf{\log_a x = \log_b x \times \log_c b \times \log_d c \times \log_a d.}$

অনুসিদ্ধান্ত। $x = a$ বসাইলে, $\log_b a \times \log_a b = \log_a a = 1$;

অতএব, $\mathbf{\log_b a = \frac{1}{\log_a b}}$.

[বিকল্প প্রমাণ :

যদি, $\log_b a = m$, এবং $\log_a b = n$ হয়,

তবে $a = b^m$, $b = a^n$.

$\therefore \quad a = (a^n)^m = a^{mn}$.

$\therefore \quad mn = \log_a a = 1$ অর্থাৎ $\mathbf{\log_b a \times \log_a b = 1}$.]

উদা. 1. নিধান $3\sqrt{2}$ হইলে, 5832-এর লগারিদ্‌ম নির্ণয় কর।

$\log_{3\sqrt{2}} 5832 = x$ ধরিলে,

$5832 = (3\sqrt{2})^x$,

অর্থাৎ $(3\sqrt{2})^x = 5832 = 8 \times 729 = 8 \times 9 \times 81 = 2^3 \times 3^6$

$= (\sqrt{2})^6 \times 3^6 = (3\sqrt{2})^6$.

$\therefore \quad x = 6$.

উদা. 2. সরল কর : $\log \dfrac{3\sqrt{32}}{40 \times \sqrt[3]{18}}$.

প্রদত্ত রাশি $= \log (3 \times 32^{\frac{1}{2}}) - \log (40 \times 18^{\frac{1}{3}})$

$= \log 3 + \log (32)^{\frac{1}{2}} - \{\log 40 + \log (18)^{\frac{1}{3}}\}$

$= \log 3 + \frac{1}{2} \log 32 - \log 40 - \frac{1}{3} \log 18$

$= \log 3 + \frac{1}{2} \log (2^5) - \log (5 \times 2^3) - \frac{1}{3} \log (2 \times 3^2)$

$= \log 3 + \frac{5}{2} \log 2 - (\log 5 + 3 \log 2) - \frac{1}{3}(\log 2 + 2 \log 3)$

$= (1 - \frac{2}{3}) \log 3 + (\frac{5}{2} - 3 - \frac{1}{3}) \log 2 - \log 5$

$= \frac{1}{3} \log 3 - \frac{5}{6} \log 2 - \log 5$.

উদা. 3. নিম্নলিখিত সমীকরণটি হইতে x-এর মান নির্ণয় কর :

$a^{2x} = b^{3-x} \times c^{x+5}$.

উভয় পক্ষের লগারিদ্‌ম লইয়া পাওয়া যায়

$\log a^{2x} = \log b^{3-x} + \log c^{x+5}$.

$\therefore \quad 2x \log a = (3 - x) \log b + (x + 5) \log c$.

$\therefore \quad x(2 \log a + \log b - \log c) = 3 \log b + 5 \log c$.

$\therefore \quad x = \dfrac{3 \log b + 5 \log c}{2 \log a + \log b - \log c}$.

উদা. 4. $\log_{10} 2 = \cdot 30103$ হইলে, (i) $\log_{10} 5$ এবং (ii) $\log_5 64$-এর মান নির্ণয় কর।

$$\text{(i)}\quad \log_{10} 5 = \log_{10} \tfrac{10}{2} = \log_{10} 10 - \log_{10} 2$$
$$= 1 - \cdot 30103 = \cdot 69897.$$

$$\text{(ii)}\quad \log_5 64 = \frac{\log_{10} 64}{\log_{10} 5} = \frac{\log_{10} 2^6}{\cdot 69897} = \frac{6 \log_{10} 2}{\cdot 69897}$$
$$= \frac{6 \times \cdot 30103}{\cdot 69897}$$
$$= \frac{1 \cdot 80618}{\cdot 69897} = 2 \cdot 58.$$

প্রশ্নমালা 40

লগারিদ্‌ম নির্ণয় কর (Find the logarithms of):

1. নিধান $\sqrt[3]{9}$ হইলে 81-এর। 2. নিধান $2\sqrt{3}$ হইলে 1728-এর।

3. নিধান $2\sqrt[3]{5}$ হইলে 64000-এর। 4. নিধান $5\sqrt{3}$ হইলে $\cdot 0001\dot{7}$-এর।

নিম্নলিখিত রাশিগুলি সরল কর (Simplify the following):

5. $\log(\sqrt[3]{m^5} \times \sqrt[5]{n^3})$. 6. $\log \dfrac{a^3 \times b^{-4}}{\sqrt[4]{a^{-5} \times b^3}}$. 7. $\log \dfrac{9 \times \sqrt[4]{216}}{4 \div \sqrt[3]{144}}$.

নিম্নলিখিত সমীকরণগুলির সমাধান কর:

8. $a^x \times b^{2x+3} = c^{4-x}$. 9. $2^{x+3} = 27 \times 5^{4-x}$.

10. যদি a, b, c কোন গুণোত্তর-শ্রেণীভুক্ত হয়, প্রমাণ কর যে, $\log_a n$, $\log_b n$, $\log_c n$ বিপরীত প্রগতিতে আছে।

11. $\log_{10} 2 = \cdot 301030$, এবং $\log_{10} 7 = \cdot 845098$ হইলে, 1000-কে নিধান লইয়া $(\frac{4}{343})^{\frac{1}{2}}$-এর লগারিদ্‌ম নির্ণয় কর।

12. $\log_{10} 2 = \cdot 3010300$ এবং $\log_{10} 3 = \cdot 4771213$ হইলে, $\sqrt{8}$ নিধান লইয়া তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত 81-এর লগারিদ্‌ম নির্ণয় কর।

11·3. লগারিদ্‌ম-এর পূর্ণক (characteristic) ও অংশক (mantissa)।

যে-কোন দুইটি সংখ্যা 59 ও ·0082-এর লগারিদ্‌মের মান কত হয় তাহা বিচার করা যাক।

এখন, $10 < 59 < 100$; সুতরাং, $\log 10 < \log 59 < \log 100$

অর্থাৎ $1 < \log 59 < 2.$

অর্থাৎ log 59, 1 অপেক্ষা বড়, কিন্তু 2 অপেক্ষা ছোট হইবে।

$\therefore$ log 59 = 1 + একটি ধনাত্মক প্রকৃত দশমিক ভগ্নাংশ।

পুনশ্চ, $\cdot 0001 < \cdot 00082 < \cdot 001$;

$\therefore \log \cdot 0001 < \log \cdot 00082 < \log \cdot 001$;

অর্থাৎ $-4 < \log \cdot 00082 < -3$;

$\therefore$ log ·00082, -4 এবং -3-এর মধ্যে থাকিবে ;

$\therefore$ log ·00082 = -4 + একটি ধনাত্মক প্রকৃত দশমিক ভগ্নাংশ, কেননা -4-এর সহিত 1 যোগ করিলে -3 হয়।

স্থতরাং, দেখা যাইতেছে যে, কোন সংখ্যার লগারিদ্‌ম-এর দুইটি অংশ আছে—একটি ধনাত্মক বা ঋণাত্মক অখণ্ডাংশ (integral part) যাহাকে বলা হয় **পূর্ণক** (characteristic), অপরটি ধনাত্মক প্রকৃত দশমিক ভগ্নাংশ (pure decimal fraction), যাহাকে বলা হয় **অংশক** (mantissa)।

11·4. পূর্ণক নির্ণয়।

(1) সংখ্যাটি যেন 1 অপেক্ষা বড়।

আমরা জানি যে, $1 = 10^0$, এবং $10 = 10^1$;

অর্থাৎ, $\log 1 = 0$, এবং $\log 10 = 1$.

অতএব, 1 ও 10-এর মধ্যবর্তী (4·567-এর মতো) যে-সংখ্যার অখণ্ডাংশ এক-অঙ্কবিশিষ্ট তাহার লগারিদ্‌ম 0 এবং 1-এর ভিতরে থাকিবে অর্থাৎ লগারিদ্‌ম-এর পূর্ণক 0 হইবে।

আবার, $10 = 10^1$, এবং $100 = 10^2$;

অর্থাৎ $\log 10 = 1$, এবং $\log 100 = 2$.

অতএব, 10 ও 100-এর মধ্যবর্তী (97·043-এর মতো) যে-সংখ্যার অখণ্ডাংশ দুই-অঙ্কবিশিষ্ট তাহার লগারিদ্‌ম 1 এবং 2-এর ভিতরে থাকিবে অর্থাৎ লগারিদ্‌ম-এর পূর্ণক 1 হইবে।

পুনশ্চ, $100 = 10^2$ এবং $1000 = 10^3$;

অর্থাৎ $\log 100 = 2$ এবং $\log 1000 = 3$.

অতএব, 100 এবং 1000-এর মধ্যবর্তী (801·325-এর মতো) যে-সংখ্যার অখণ্ডাংশ তিন-অঙ্কবিশিষ্ট) তাহার লগারিদ্‌ম 2 এবং 3-এর ভিতরে থাকিবে অর্থাৎ লগারিদ্‌ম-এর পূর্ণক 2 হইবে।

এইরূপে দেখা যায় যে, কোন সংখ্যার অখণ্ডাংশের (integral part) অঙ্কের সংখ্যা $= n$ হইলে, সংখ্যাটির লগারিদ্‌ম-এর পূর্ণক $= n-1$;

যথা, log 532·7468-এর পূর্ণক = 2, log 53·27468-এর পূর্ণক = 1, log 53274680-এর পূর্ণক = 7.

অর্থাৎ, পূর্ণক নির্ভর করে শুধু অখণ্ডাংশের অঙ্ক-সংখ্যার উপর, এবং উহা অখণ্ডাংশের অঙ্ক-সংখ্যা অপেক্ষা 1 কম।

(2) আবার ধরা যাক, সংখ্যাটি যেন 1-এর কম, অর্থাৎ ইহা একটি প্রকৃত দশমিক ভগ্নাংশ।

আমরা জানি যে, $1 = 10^0$ এবং $\dot{}1 = \frac{1}{10} = 10^{-1}$,

অর্থাৎ $\log 1 = 0$ এবং $\log(\dot{}1) = -1$.

অতএব, ·1 এবং 1-এর মধ্যবর্তী ·1032 বা ·42916 ইত্যাদির মত যে সংখ্যা দশমিক বিন্দু দিয়া আরম্ভ এবং যাহাতে দশমিক বিন্দুর পরেই 0 (শূন্য) নাই, তাহার লগারিদ্‌ম -1 এবং 0-এর ভিতরে থাকিবে এবং তাহার মান হইবে $= -1 +$ একটি দশমিক ভগ্নাংশ (কেননা -1-এর সহিত 1 যোগ করিলে যোগফল 0 হয়) অর্থাৎ লগারিদ্‌ম-এর পূর্ণক হইবে -1.

আবার, $\dot{}1 = \frac{1}{10} = 10^{-1}$ এবং $\dot{}01 = \frac{1}{100} = \frac{1}{10^2} = 10^{-2}$,

অর্থাৎ $\log(\dot{}1) = -1$ এবং $\log(\dot{}01) = -2$.

অতএব, ·01 এবং ·1-এর মধ্যবর্তী ·05321 বা ·08901 ইত্যাদির মত যে-সংখ্যা দশমিক বিন্দু দিয়া আরম্ভ এবং যাহাতে ঐ বিন্দু এবং প্রথম সার্থক অঙ্কের মধ্যে একটিমাত্র 0 (শূন্য) থাকে তাহার লগারিদ্‌ম -2 এবং -1-এর মধ্যে থাকিবে এবং সেই লগারিদ্‌ম

$= -2 +$ একটি ধনাত্মক দশমিক ভগ্নাংশ।

(কেননা, -2-এর সহিত 1 যোগ করিলে যোগফল -1 হয়) অর্থাৎ লগারিদ্‌ম-এর পূর্ণক হইবে -2 (অংশক সর্বত্রই ধনাত্মক দশমিক ভগ্নাংশ।)

এইরূপে দেখা যায় যে, **1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর কোনও সংখ্যার লগারিদ্‌ম-এর পূর্ণক ঋণাত্মক (negative) হয় এবং দশমিক বিন্দু ও প্রথম সার্থক অঙ্কের মধ্যে যত সংখ্যক শূন্য থাকে, পূর্ণক সাংখ্যমান হিসাবে তাহা অপেক্ষা 1 বেশী হয়।**

ঋণাত্মক পূর্ণক -1, -2, -3 প্রভৃতিকে $\bar{1}$, $\bar{2}$, $\bar{3}$, রূপে লিখিতে হয় এবং পড়িতে হয়, bar one, bar two, bar three ইত্যাদি রূপে।

$\therefore$ log ·30721-এর পূর্ণক $= \bar{1}$, log 0·030721-এর পূর্ণক $= \bar{2}$, log ·00030721-এর পূর্ণক $= \bar{4}$, ইত্যাদি।

টীকা। উপরিলিখিত $\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}$ প্রভৃতির ক্ষেত্রে বামে – (বিয়োগ-চিহ্ন) না বসাইয়া উপরে bar দেওয়া হয় কেন, তাহার ব্যাখ্যা এই: একটি লগারিদ্‌মের পূর্ণক -4 এবং অংশক ক্ষেত্র ·8261072.

$-4+{\cdot}8261072$ বুঝাইতে যদি $-4{\cdot}8261072$ লেখা হয়, তাহাতে ·8261072-কেও ঋণাত্মক বুঝায়। কিন্তু ইহা ঋণাত্মক নহে, ধনাত্মক। কিন্তু $\bar{4}{\cdot}8261072$ দ্বারা বুঝায় যে 4 ঋণাত্মক এবং অবশিষ্ট অংশ ·8261072 ধনাত্মক।

11·5. n-এর লগারিদ্‌ম যেন $=l$, অর্থাৎ $\log n=l$ ... (1)

$\therefore\ n=10^l$;

$\therefore\ n\times10^x=10^l\times10^x=10^{l+x}$;

$\therefore\ \log(n\times10^x)=l+x.$ ... ... (2)

এখন x যদি একটি অখণ্ড (ধনাত্মক বা ঋণাত্মক) সংখ্যা হয়, তাহা হইলে n এবং $n\times10^x$ এই দুইটির সার্থক অঙ্কগুলি এবং তাহাদের ক্রমিক স্থানের পরিবর্তন হয় না, শুধু দশমিক বিন্দুর অবস্থান পরিবর্তিত হয়।* এবং (1) ও (2) হইতে পাওয়া গেল যে, উহাদের লগারিদ্‌ম-এর অন্তর একটি অখণ্ড সংখ্যা x, অর্থাৎ উহাদের অংশক একই থাকে। (দশমিক অংশে কোনও হস্তক্ষেপ করা হয় নাই।)

অতএব, যে সংখ্যাগুলির সার্থক অঙ্কসকল ক্রমিক অবস্থানসহ অপরিবর্তিত থাকে, তাহাদের লগারিদ্‌ম-এর অংশক একই থাকিবে।

$\therefore$ যদি $\log 3271=3{\cdot}5147$ হয়,

তবে $\log 3271000=6{\cdot}5147$, $\log 327{\cdot}1=2{\cdot}5147$, $\log {\cdot}3271=\bar{1}{\cdot}5147$,

$\log {\cdot}0003271=\bar{4}{\cdot}5147$, ইত্যাদি হইবে। (শুধু পূর্ণকগুলি বিভিন্ন)

উদা. 1. 4300·567 এবং ·00005008-এর লগারিদম্‌-এর পূর্ণক কত হইবে?

প্রথম সংখ্যাটির অখণ্ডাংশ চারি-অঙ্কবিশিষ্ট;

$\therefore\ \log 4300{\cdot}567$-এর পূর্ণক $=3.$

দ্বিতীয় সংখ্যাটির কোন অখণ্ডাংশ নাই, এবং দশমিক বিন্দুর অব্যবহিত পরে চারিটি শূন্য (0) আছে;

$\therefore$ ইহার পূর্ণক $=-5.$

---

* মনে কর, $n=543{\cdot}76809$ এবং $x=4$;

$\therefore\ n\times10^x=543{\cdot}76809\times10000=5437680{\cdot}9.$

পুনশ্চ, $x=-4$ হইলে, $n\times10^x=543{\cdot}76809\times10^{-4}$

$$=\frac{543{\cdot}76809}{10000}={\cdot}054376809.$$

উদা. 2. দেওয়া আছে log 67005 = 4·8261072, log ·00067005 কত হইবে ?

স্পষ্টই log ·00067005-এর পূর্ণক = −4, কেননা দশমিক বিন্দুর ঠিক পরেই তিনটি শূন্য (0) আছে। ইহার অংশক log 67005-এর অংশকের সমান হইবে, কেননা রাশি দুইটির মধ্যে দশমিক বিন্দুর অবস্থানের পার্থক্য ব্যতীত অন্য কোন পার্থক্য নাই।

∴ log ·00067005 = −4 + ·8261072 = $\bar{4}$·8261072.

উদা. 3. log 2 = ·30103 এবং log 3 = ·4771213 হইলে, log ·00015 = কত ?

আমরা জানি, log 15 = log (3 × 5) = log 3 + log ($\frac{10}{2}$)

= log 3 + log 10 − log 2 = ·4771213 + 1 − ·30103

= ·4771213 + ·69897 = 1·1760913.

সুতরাং, log (·00015) = −4 + ·1760913 = $\bar{4}$·1760913.

প্রশ্নমালা 41

1. নিম্নলিখিত সংখ্যাগুলির পূর্ণক নির্ণয় কর। (Write down the characteristics of the logarithms of the numbers): 375609, 2036, ·0000020009, 5·678 এবং ·9876.

2. log 53498 = 4·7283375 হইলে, log 5·3498, log ·053498, log ·53498 এবং log 534980000 = কত ?

3. log 2 = ·30103 এবং log 3 = ·4771213 হইলে, $(648)^5$-এর অঙ্কসংখ্যা নির্ণয় কর।

11·6. অংশক-নির্ণয়।

11·5 অনুচ্ছেদে বর্ণিত নিয়মে চোখে দেখিয়াই লগারিদ্‌ম-এর পূর্ণক নির্ণয় করা যায়। কিন্তু অংশক নির্ণয় করিতে হয় লগারিদ্‌ম-এর তালিকা হইতে। লগারিদ্‌ম এবং অ্যান্টি-লগারিদ্‌ম-এর তালিকা পরিশিষ্টে দেওয়া হইল। উহা হইতে অংশক-এর মান দশমিকের চতুর্থ স্থান পর্যন্ত সঠিক নির্ণয় করা যায়। তালিকার ব্যবহার-পদ্ধতি নিম্নে প্রদর্শিত হইল। মনে রাখিতে হইবে যে, তালিকায় অংশকের দশমিক বিন্দুটি বাদ দেওয়া থাকে। আমাদের দশমিক বিন্দুটি বসাইয়া লইতে হইবে।

যে-সংখ্যার লগারিদ্‌ম চাই তাহার প্রথম দুইটি অঙ্ক তালিকার বামদিকে অর্থাৎ প্রথম স্তম্ভে পাওয়া যাইবে। তাহার পর ডানদিকের দ্বিতীয় হইতে একাদশ পর্যন্ত দশটি স্তম্ভের মাথায় যথাক্রমে 0, 1, 2,..., 8, 9 লেখা আছে, তাহা হইতে সংখ্যাটির তৃতীয়

অঙ্ক বাছিয়া লইতে হইবে। চতুর্থ অঙ্কটি পাওয়া যাইবে দ্বাদশ হইতে বিংশ স্তম্ভের কোনও একটির মাথায়। উহারা অন্তর-স্তম্ভ।

উদা. 1. log 37 = কত ?

সংখ্যাটি দুই অঙ্কের, অতএব পূর্ণক = 1 ; এইবার তালিকা হইতে অংশক নির্ণয় করিতে হইবে। log 37-এর অংশক = log 370-এর অংশক।

তালিকায় বামদিকের অর্থাৎ প্রথম স্তম্ভে 10, 11, 12,........., 98, 99 লেখা আছে।

এখন 37-এর মধ্য দিয়া আড়াআড়ি লাইনটি দ্বিতীয় বা 0-স্তম্ভের সহিত যেখানে মিলিত হইল, সেখানে পাওয়া গেল 5682 ; উহা নির্ণেয় অংশক।

∴ log 37 = 1·5682.

উদা. 2. log 378 = কত ?

এখানে পূর্ণক = 2 ; দশম স্তম্ভের মাথায় 8 লেখা আছে। 37-এর মধ্য দিয়া আড়াআড়ি লাইনটি দশম স্তম্ভের যেখানে মিলিত হইল, সেখানে পাওয়া গেল ·5775 ; উহাই হইবে নির্ণেয় অংশক।

∴ log 378 = 2·5775.

উদা. 3. log 37·89 = কত ?

এখানে পূর্ণক = 1. চতুর্থ অঙ্ক 9 পাওয়া যাইবে বিংশ স্তম্ভের মাথায়। এই স্তম্ভটি যেখানে 37-এর মধ্য দিয়া আড়াআড়ি লাইনের সহিত মিলিত হইয়াছে, সেখানে পাওয়া গেল 10 ; অর্থাৎ ·0010 ; ইহা log 378-এর অংশক ·5775-এর সহিত যোগ করিলে ·5785 হইবে log 3789-এর অংশক ; ∴ log 37·89 = 1·5785.

এই প্রক্রিয়াটি নিম্নে প্রদর্শিত সংক্ষিপ্ত পদ্ধতিতে লেখা হয়।

log 378-এর অংশক = ·5775 }
9-এর জন্য অংশক-এর অন্তর = ·0010 } (যোগ করিতে হইবে)
∴ log 37·89 = 1·5785.

উদা. 4. log ·006425 = কত ?

log 642-এর অংশক = ·8075 }
চতুর্থ অঙ্ক 5-এর জন্য অংশক-এর অন্তর = ·0003 } (যোগ করিতে হইবে)
∴ log 6425-এর অংশক = ·8078

∴ log ·006425 = $\bar{3}$·8078. (পূর্ণক = ঋণাত্মক 3 = $\bar{3}$)

11·7. কোন সংখ্যার লগারিদ্‌ম দেওয়া আছে, সংখ্যাটি কত নির্ণয় করিতে হইবে। ইহা অ্যান্টি-লগারিদ্‌ম তালিকা (anti-log table) হইতে নির্ণয় করিতে হইবে।

যদি $\log x = m$ হয়, তবে x-কে m-এর অ্যান্টি-লগারিদ্‌ম বলে। অর্থাৎ $x = \text{anti-log } m$.

উদা. 1. $\log x = 1·5958$ হইলে, x = কত ?

প্রথমে পূর্ণক ছাড়িয়া দিয়া কেবল অংশক-এর সাহায্যে সংখ্যা নির্ণয় করা হয়; পরে পূর্ণক দেখিয়া যথাস্থানে দশমিক বিন্দু বসাইতে হয়।

এখানেও পূর্ব-অনুচ্ছেদে বর্ণিত প্রকারে anti-log তালিকার প্রথম স্তম্ভ হইতে ·59 বাহির করিতে হইবে। তৃতীয় অঙ্ক 5, সপ্তম স্তম্ভের মাথায় পাওয়া যাইবে। ইত্যাদি।]

$$\left.\begin{array}{r}\text{anti-log } 595 = 3936 \\ \text{8-এর জন্য অন্তর} = \underline{\quad 7}\end{array}\right\} \text{(যোগ করিতে হইবে)}$$
$$3943$$

অতএব, যে সংখ্যার লগারিদ্‌ম-এর অংশক 5958, তাহার অঙ্কগুলি হইবে যথাক্রমে 3943. ∴ $x = 39·43$; এখানে পূর্ণক 1 আছে বলিয়া নির্ণেয় সংখ্যার অখণ্ডাংশ দুই অঙ্কের হইবে।

অনুরূপে যে সংখ্যার লগারিদ্‌ম = $\bar{3}·5958$, সে সংখ্যাটি = ·003943 ; কারণ এখানে পূর্ণক $\bar{3}$ অর্থাৎ ঋণাত্মক 3, নির্ণেয় সংখ্যাটি দশমিকের পর দুইটি শূন্য দিয়া আরম্ভ হইবে।

11·8. গণিতীয় সহজ প্রশ্ন সমাধানে লগারিদ্‌ম-এর প্রয়োগ (application of logarithm in simple arithmetical calculations)।

উদা. 1. $\log 79003 = 4·8976436$ হইলে, $\log \sqrt[7]{·000079003}$-এর মান 7 দশমিক স্থান পর্যন্ত সঠিক নির্ণয় কর।

$$\text{নির্ণেয় লগারিদ্‌ম} = \tfrac{1}{7} \log ·000079003 = \tfrac{1}{7}(-5 + ·8976436)$$
$$= \tfrac{1}{7}(-7 + 2·8976436) = -1 + ·41394908\cdots$$
$$= \bar{1}·4139491.$$

উদা. 2. উদাহরণ 1-এ $\sqrt[7]{·000079003}$-এর মান নির্ণয় কর, যদি $\log 2593875 = 6·4139491$ হয়।

মনে কর, x = নির্ণেয় মান।

তাহা হইলে $\log x = \log \sqrt[7]{·000079003} = \bar{1}·4139491$. [পূর্বের উদাহরণে]

সুতরাং, x একটি দশমিক ভগ্নাংশ, ইহার দশমিক বিন্দুর ঠিক পরেই কোন শূন্য (0) নাই, এবং $\log x$-এর অংশক এবং log 2593875-এর অংশক একই।

$\therefore\ x$ (অর্থাৎ নির্ণেয় মান) = ·2593875.

উদা. 3. তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত $\sqrt[3]{36}$-এর সঠিক মান নির্ণয় কর।

মনে কর, $x = \sqrt[3]{36} = (36)^{\frac{1}{3}}$;

$\therefore\ \log x = \frac{1}{3}\log 36 = \frac{1}{3} \times 1{\cdot}5563 = 0{\cdot}5188$ (এখানে পূর্ণক = 0)

$\therefore\ x = \text{anti-log } {\cdot}5188.$

Anti-log তালিকা হইতে পাওয়া যায়

anti-log 518 = 3296

8-এর জন্য অন্তর = 6

3302

$\therefore\ x = 3{\cdot}302.$

উদা. 4. $\sqrt[7]{{\cdot}00002675}$ = কত ?

মনে কর, $x = \sqrt[7]{{\cdot}00002675} = ({\cdot}00002675)^{\frac{1}{7}}$,

$\therefore\ \log x = \frac{1}{7}\log({\cdot}00002675)$

$= \frac{1}{7} \times \bar{5}{\cdot}4273 = \frac{1}{7} \times (-5 + {\cdot}4273)$

$= \frac{1}{7} \times (-7 + 2{\cdot}4273) = (-1 + {\cdot}3468) = \bar{1}{\cdot}3468.$

$\therefore\ x = \text{Anti-log } \bar{1}{\cdot}3468.$

তালিকা হইতে, anti-log 346 = 2218

8-এর জন্য অন্তর = 4

2222

$\therefore\ x = {\cdot}2222.$

উদা. 5. লগারিদ্‌মিক তালিকার সাহায্যে $\dfrac{(3{\cdot}937)^3 \times 1000}{1728 \times 16}$-এর মান নির্ণয় কর।

মনে কর, $x = \dfrac{(3{\cdot}937)^3 \times 1000}{1728 \times 16}$;

$\log x = 3\log 3{\cdot}937 + \log 1000 - \log 1728 - \log 16$

$= 3 \times {\cdot}5952 + 3 - 3{\cdot}2375 - 1{\cdot}2041$

$= {\cdot}3440.$ (এখানে পূর্ণক = 0)

$\therefore\ x = \text{anti-log } {\cdot}3440.$

তালিকা হইতে, anti-log 344 = 2208.

$\therefore \quad x = 2\cdot208.$

উদা. 6. একটি ঘনকের (cube) প্রান্তিকী = 4·83 মিটার। যে গোলকের ঘনফল ঘনকটির ঘনফলের সমান, তাহার ব্যাসার্ধ কত? $[\pi = \frac{355}{113}]$

মনে কর, ব্যাসার্ধ = r মিটার।

$\therefore \quad \frac{4}{3}\pi r^3 =$ গোলকের ঘনফল = ঘনকের ঘনফল $= (4\cdot83)^3.$

$$\therefore \quad r^3 = \frac{3}{4\pi} \times (4\cdot83)^3 = \frac{3}{4} \times \frac{113}{355} \times (4\cdot83)^3 = \frac{339 \times (4\cdot83)^3}{1420}.$$

$\therefore \quad 3 \log r = \log 339 + 3 \log 4\cdot83 - \log 1420$

$\qquad = 2\cdot5302 + 3 \times \cdot6839 - 3\cdot1523 = 1\cdot4296.$

$\therefore \quad \log r = \cdot4765.$

$\therefore \quad r = \text{anti-log } \cdot4765.$

তালিকা হইতে, anti-log 476 = 2992

5-এর জন্য অন্তর = 3

2995

$\therefore \quad r = 2\cdot995$ মিটার।

উদা. 7. 2^{64} এর অঙ্ক-সংখ্যা নির্ণয় কর।

মনে কর, $x = 2^{64}.$

$\therefore \quad \log x = 64 \log 2 = 64 \times \cdot3010 = 19\cdot2640.$

$\therefore \quad \log x$-এর পূর্ণক = 19.

$\therefore \quad x$-এর অঙ্ক-সংখ্যা = 20

অর্থাৎ 2^{64} „ „ = 20.

উদা. 8. 2^{-64}-এর মান নির্ণয় করিলে দশমিক বিন্দুর পরে কয়টি 0 (শূন্য) বসিবে?

মনে কর, $x = 2^{-64}.$

$\therefore \quad \log x = -64 \times \log 2 = -64 \times \cdot3010$

$\qquad = -19\cdot2640 = -19 - \cdot2640$

$\qquad = -20 + 1 - \cdot2640 = \overline{20}\cdot7360.$

$\therefore \quad \log x$-এর পূর্ণক $= \overline{20}.$ $\therefore$ নির্ণেয় শূন্য-সংখ্যা = 19.

উদা. 9. প্রমাণ কর যে, $7\log\frac{10}{9}-2\log\frac{25}{24}+3\log\frac{81}{80}=\log 2.$

[C. U. 1923]

বাম পক্ষ $=7\log\dfrac{5\times 2}{3^2}-2\log\dfrac{5^2}{2^3\times 3}+3\log\dfrac{3^4}{5\times 2^4}$

$$=7[\log(5\times 2)-\log 3^2]-2[\log 5^2-\log(2^3\times 3)]+3[\log 3^4-\log(5\times 2^4)]$$

$$=7[\log 5+\log 2-2\log 3]-2[2\log 5-3\log 2-\log 3]+3[4\log 3-\log 5-4\log 2]$$

$$=(7+6-12)\log 2+(7-4-3)\log 5+(-14+2+12)\log 3$$

$$=\log 2.$$

[দ্রষ্টব্য। এখানে নিধানের উল্লেখ করা হয় নাই, অর্থাৎ যে-কোনও নিধান লওয়া যাইতে পারে।]

উদা. 10. প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{4}<\log_{10}2<\frac{1}{3}.$

মনে কর, $x=\log_{10}2.\quad\therefore\ 10^x=2.\quad\therefore\ 10=2^{\frac{1}{x}}.$

কিন্তু $8<10<16$ অর্থাৎ $2^3<2^{\frac{1}{x}}<2^4.$

$\therefore\ 3<\dfrac{1}{x}<4.\quad\therefore\ \dfrac{1}{3}>x>\dfrac{1}{4},$

বা, $\frac{1}{4}<\log_{10}2<\frac{1}{3}.$

উদা. 11. প্রমাণ কর যে, $\log_b a\times\log_c b\times\log_a c=1.$ [C. U. 1934]

মনে কর, $\log_b a=x,\ \log_c b=y,\ \log_a c=z.$

$\therefore\ a=b^x,\ b=c^y,\ c=a^z.$

$\therefore\ a=b^x=(c^y)^x=c^{xy}=(a^z)^{xy}=a^{xyz}.$

$\therefore\ xyz=1,$

অর্থাৎ $\log_b a\times\log_c b\times\log_a c=1.$

বিকল্প প্রমাণ : $\log_b a\times\log_c b\times\log_a c$

$$=\frac{\log_{10}a}{\log_{10}b}\times\frac{\log_{10}b}{\log_{10}c}\times\frac{\log_{10}c}{\log_{10}a}=1.$$

উদা. 12. প্রমাণ কর যে,

$$x^{\log y-\log z}\times y^{\log z-\log x}\times z^{\log x-\log y}=1.$$

[C. U. 1939,'44,'55]

মনে কর, বাম পক্ষ $= u$.

$\therefore \quad \log u = (\log y - \log z) \log x + (\log z - \log x) \log y$
$\qquad\qquad + (\log x - \log y) \log z = 0 = \log 1$;

$\therefore \quad u = 1$, অর্থাৎ প্রদত্ত বাম পক্ষ $= 1$.

উদা. 13. $\dfrac{\log a}{a(b+c-a)} = \dfrac{\log b}{b(c+a-b)} = \dfrac{\log c}{c(a+b-c)}$ হইলে,

প্রমাণ কর যে, $b^c c^b = c^a a^c = a^b b^a$.

মনে কর, প্রত্যেক অনুপাত $= k$.

$\therefore \quad \log a = ka(b+c-a), \ \log b = kb(c+a-b), \ \log c = kc(a+b-c)$.

$\therefore \quad c \log b + b \log c = kbc(c+a-b+a+b-c) = 2kabc$,

অর্থাৎ $\log b^c + \log c^b = 2kabc$,

বা, $\qquad \log (b^c . c^b) = 2kabc$.

অনুরূপে, $\qquad \log (c^a a^c) = \log (a^b b^a) = 2kabc$.

$\therefore \quad \log (b^c c^b) = \log (c^a a^c) = \log (a^b b^a)$.

$\therefore \quad b^c c^b = c^a a^c = a^b b^a$.

উদা. 14. যদি $x^2 + y^2 = 7xy$, দেখাও যে,

$$\log (x+y) = \log 3 + \tfrac{1}{2} \log x + \tfrac{1}{2} \log y.$$

$$x^2 + y^2 + 2xy = 9xy. \quad \therefore \quad (x+y)^2 = 9xy = 3^2 xy.$$

$\therefore \quad 2 \log (x+y) = 2 \log 3 + \log x + \log y$.

$\therefore \quad \log (x+y) = \log 3 + \frac{1}{2} \log x + \frac{1}{2} \log y$.

উদা. 15. যদি $\log (x^3 y^2) = 3a + 2b$, এবং $\log (x^2 y^3) = 2a + 3b$ হয়, তবে $\log x$ এবং $\log y$-এর মান নির্ণয় কর। [C. U. 1948]

$\log (x^3 y^2) = 3a + 2b. \quad \therefore \quad 3 \log x + 2 \log y = 3a + 2b \quad \cdots (1)$

অনুরূপে, $2 \log x + 3 \log y = 2a + 3b. \quad \cdots \quad \cdots (2)$

(1) এবং (2) যোগ করিয়া, $5 (\log x + \log y) = 5a + 5b$.

$\therefore \quad \log x + \log y = a + b$.

(1) হইতে (2) বিয়োগ করিয়া, $\log x - \log y = a - b$.

$\therefore \quad \log x = a, \ \log y - b$.

উদা. 16. সমাধান কর : (দেওয়া আছে $\log 2 = 0{\cdot}3010300$, $\log 3 = 0{\cdot}4771213$)

$2^x = 3^y,\ 2^{y+1} = 3^{x-1}$. [C. U. 1942]

$$2^x = 3^y\ ;\quad \therefore\ \ x \log 2 = y \log 3\ ;\ \therefore\ \ x = y\,\frac{\log 3}{\log 2}.$$

$$2^{y+1} = 3^{x-1}.\quad \therefore\ \ (y+1)\log 2 = (x-1)\log 3 = \left(y\,\frac{\log 3}{\log 2} - 1\right)\log 3.$$

$$\therefore\ \ y = \frac{\log 2(\log 3 + \log 2)}{(\log 3)^2 - (\log 2)^2} = \frac{\log 2}{\log 3 - \log 2}$$

$$= \frac{0{\cdot}3010300}{0{\cdot}4771213 - 0{\cdot}3010300} = 1{\cdot}71\ (\text{প্রায়})\ ;$$

এবং $x = y\,\dfrac{\log 3}{\log 2} = \dfrac{\log 3}{\log 3 - \log 2} = \dfrac{0{\cdot}4771213}{0{\cdot}1760913} = 2{\cdot}71$ (প্রায়)।

প্রশ্নমালা 42

1. $\log 2 = {\cdot}30103$ এবং $\log 3 = {\cdot}4771213$ হইলে, $(648)^5$-এর অঙ্ক-সংখ্যা কত ?

2. $\log 35874 = 4{\cdot}5547798$ হইলে, সাত দশমিক স্থান পর্যন্ত $\log \sqrt[3]{{\cdot}00000035874}$ নির্ণয় কর।

3. $\log 358{\cdot}74 = 2{\cdot}5547798$ হইলে, $\sqrt[4]{{\cdot}000035874}$-এর লগারিদ্‌ম কত ?

4. $\log 594154 = 5{\cdot}773899$ হইলে, ছয় দশমিক স্থান পর্যন্ত $({\cdot}35874)^5$-এর মান নির্ণয় কর।

নিম্নোক্ত ক্ষেত্রে দশমিকের অনধিক চতুর্থ স্থান পর্যন্ত সঠিক মান নির্ণয় কর :

5. $\sqrt[3]{3},\ \sqrt[3]{7894},\ \sqrt[3]{3{\cdot}175},\ \sqrt[3]{{\cdot}003679}$.

6. ${\cdot}3010 \times 2{\cdot}303$. **7.** $3957 \times 3{\cdot}142$.

8. $\dfrac{774}{1393},\ \dfrac{10}{1604},\ \dfrac{62{\cdot}25}{{\cdot}00559},\ \frac{1}{2} \times 32{\cdot}18 \times (7{\cdot}25)^2$.

9. $\sqrt[5]{6784},\ \sqrt[11]{38{\cdot}97}$ **10.** $35{\cdot}37 \times \{(1{\cdot}025)^{15} - 1\}$.

11. $(2{\cdot}718)^{3{\cdot}142},\ ({\cdot}3724)^{-2{\cdot}43}$.

12. $({\cdot}6254)^2,\ ({\cdot}6254)^3,\ \sqrt{{\cdot}6254},\ \sqrt[3]{{\cdot}6254}$,

13. $\dfrac{9{\cdot}753 \times 10{\cdot}34 \times {\cdot}9252}{1{\cdot}453 \times 3{\cdot}142}$.

14. $2^{36},\ 5^{25},\ 37^{38}$-এর অঙ্ক-সংখ্যা নির্ণয় কর।

15. একটি গোলকের ঘনফল 3·756 ঘন সেন্টিমিটার হইলে, উহার ব্যাসার্ধ কত হইবে? $(\pi = \frac{355}{113})$.

16. $(\cdot0035874)^8$-এর মান নির্ণয় করিলে, দশমিক বিন্দুর পর কয়টি শূন্য বসিবে?

17. প্রমাণ কর যে, $7 \log \frac{16}{15} + 5 \log \frac{25}{24} + 3 \log \frac{81}{80} = \log 2$.

[C. U. 1936]

18. লগারিদ্‌ম নির্ণয় কর :

(i) 6 নিধান হইলে 216-এর। (ii) $\sqrt[3]{3}$ নিধান হইলে 81-এর।

(iii) $3\sqrt[3]{2}$ নিধান হইলে 2916-এর।

19. $\log (a^2b)^2 - \log (ac) + \log (bc)^4 - 3 \log (bc)$-এর মান নির্ণয় কর (প্রতি ক্ষেত্রে a নিধান লইতে হইবে)।

20. প্রমাণ কর যে, $\log \frac{75}{16} - 2 \log \frac{5}{9} + \log \frac{32}{243} = \log 2$. [C. U. 1951]

21. $3 \log_7 \frac{4}{35} + 2 \log_7 \frac{5}{49} - \log_7 \frac{20}{343} - 2 \log_7 \frac{4}{5} + \frac{5}{2} \log_7 49$-এর মান নির্ণয় কর।

22. কেন $\log (1+2+3) = \log 1 + \log 2 + \log 3$, ব্যাখ্যা কর।

23. দেখাও যে, $\log \frac{b^n}{c^n} + \log \frac{c^n}{a^n} + \log \frac{a^n}{b^n} = 0$. [C. U. 1944]

24. যদি $\log (m+n) = \log m + \log n$, n-এর অপেক্ষক (function) রূপে m নির্ণয় কর। [C. U. 1913]

25. প্রমাণ কর যে, $\log_b a \times \log_c b \times \log_d c \times \log_a d = 1$.

26. যদি $y = a^{\frac{1}{1-\log_a x}}$ এবং $z = a^{\frac{1}{1-\log_a y}}$, প্রমাণ কর যে,

$$x = a^{\frac{1}{1-\log_a z}}.$$

27. যদি $\frac{\log x}{q-r} = \frac{\log y}{r-p} = \frac{\log z}{p-q}$, প্রমাণ কর যে,

$$x^{q+r} y^{r+p} z^{p+q} = x^p y^q z^r.$$

28. যদি $\log (a+b+c) = \log a + \log b + \log c$ হয়, প্রমাণ কর যে,

$$\log \left(\frac{2a}{1-a^2} + \frac{2b}{1-b^2} + \frac{2c}{1-c^2} \right) = \log \frac{2a}{1-a^2} + \log \frac{2b}{1-b^2} + \log \frac{2c}{1-c^2}.$$

29. যদি $a^{3-x}.b^{5x}=a^{x+5}.b^{3x}$ হয়, প্রমাণ কর যে,

$$x \log\left(\frac{b}{a}\right)=\log a.$$ [C. U. 1937]

30. $\log x : \log y : \log z = b-c : c-a : a-b$ হইলে, দেখাও যে,

(i) $x^a y^b z^c = 1.$ (ii) $x^{b+c} y^{c+a} z^{a+b} = 1.$

(iii) $x^{b^2+bc+c^2}.y^{c^2+ca+a^2}.z^{a^2+ab+b^2}=1.$

31. $xy^{p-1}=a$, $xy^{q-1}=b$, $xy^{r-1}=c$ হইলে, প্রমাণ কর যে,

$$(q-r)\log a+(r-p)\log b+(p-q)\log c=0.$$

32. $\log x : \log y : \log z = y-z ; z-x : x-y$ হইলে, প্রমাণ কর যে,

$$x^x y^y z^z = 1.$$

33. a, b, c, d চারিটি ধন-সংখ্যা হইলে, প্রমাণ কর যে,

$$\log_b a \times \log_c b \times \log_d c = \log_d a.$$ [C. U. 1942]

34. $\log_a b = 10$, $\log_{6a}(32b)=5$ হইলে, a-এর মান নির্ণয় কর।

35. $xy \log(xy) : yz \log(yz) : zx \log(zx) = x+y : y+z : z+x$ হইলে, প্রমাণ কর যে, $x^x=y^y=z^z$.

36. প্রমাণ কর যে, গুণোত্তর-শ্রেণীর সংখ্যাগুলির লগারিদ্‌ম সমান্তর-শ্রেণী হইবে (Show that the logarithms of a series in G. P. is a series in A. P.)।

37. নিম্নলিখিত সমীকরণগুলি সমাধান কর :

(i) $\dfrac{1}{\log_x 10}=\dfrac{2}{\log_a 10}-2.$

(ii) $5^{5-3x}=2^{x+2}.$ [দেওয়া আছে, $\log_{10} 2 = \cdot30103$]

(iii) $8.2^x=9^{x+\frac{1}{2}}.$ [দেওয়া আছে, $\log_{10} 3 = \cdot4771213$]

(iv) $a^x+(ab)a^{-x}=a+b.$ (v) $a^{3-x}b^{5x}=a^{x+5}b^{3x}.$

(vi) $6^{3-4x}.4^{x+5}=8.$ [C. U. 1938]

(vii) $3^x=2.$ [C. U. 1927]

(viii) $2^x.3^{2x}=100.$ [C. U. 1925]

38. নিম্নলিখিত সমীকরণগুলি সমাধান কর :

(i) $x^y=y^x$ এবং $x=2y.$ [C. U. 1935]

(ii) $\log(x^2y^3)=a$ এবং $\log\left(\dfrac{x}{y}\right)=b.$ [C. U. 1919]

(iii) $a^{x+y}b^{2x+y}=c$ এবং $a^{2x}b^{3y}=1.$

(iv) $5^{x+1}=6^y,\ 2^{x+y}=3^{x-y}.$

(v) $\log x-\log y=\log m,\ \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$

(vi) $a^x=b^y,\ b^x=a^y.$ (vii) $2^x3^y6^z=3^x6^y2^z=6^x2^y3^z=10.$

(viii) $a^xb^y=mc^{-z},\ b^xc^y=na^{-z},\ c^xa^y=pb^{-z}.$

চক্রবৃদ্ধি ও বার্ষিকী

(Interest and Annuities)

11·9. চক্রবৃদ্ধি : শুধু আসলের উপর স্থদকে সরল স্থদ বলা হয়। একটা নির্দিষ্ট হারে নির্দিষ্ট সময় পর পর স্থদেমূলে যাহা হয় তাহার উপর যদি স্থদ লওয়া হয় তবে সেই স্থদকে বলে চক্রবৃদ্ধি।

আসল, স্থদের হার, সময় ও সবৃদ্ধিমূলকে যথাক্রমে p, r, t ও A-দ্বারা স্থচিত করা হয়। সরল স্থদের বেলায় প্রযোজ্য $A=p(1+tr)$ স্থত্রটি মাধ্যমিক পাঠ্যক্রমে আলোচিত হইয়াছে। স্থদের হার সাধারণত শতকরা হিসাবে দেওয়া থাকে। এই স্থত্রে শতকরা স্থদকে টাকা প্রতি স্থদে রূপান্তরিত করা হইয়াছে, স্থদের হার যদি $x\%$ হয়, তবে টাকা প্রতি স্থদ হইবে $\frac{x}{100}=r.$

চক্রবৃদ্ধির হিসাবে টাকা প্রতি স্থদ যদি r হয়, তবে

1 টাকার 1 বৎসরের স্থদ $=r$ টাকা ;

$\therefore$ 1 বৎসর পর 1 টাকার সবৃদ্ধিমূল $=1+r$ টাকা ;

এই সবৃদ্ধিমূল R টাকা হইলে, $R=1+r$ „।

2 বৎসর পর 1 টাকার সবৃদ্ধিমূল $=R$ টাকা $+\ R$ টাকার স্থদ

$=R+Rr=R(1+r)=R^2.$

অনুরূপে 3 „ „ „ „ „ $=R^2$ টাকা $+\ R^2$ টাকার স্থদ

$=R^2+R^2r=R^2(1+R)=R^2R$

$=R^3.$

$\therefore$ n „ „ „ „ „ $=R^n.$

$\therefore$ **n বৎসর পর P টাকার সবৃদ্ধিমূল, $A=PR^n=P(1+r)^n$** ··· (1)

স্পষ্টত, চক্রবৃদ্ধি, $I=P(1+r)^n-P=P(R^n-1)$ ··· (2)

অনুসিদ্ধান্ত 1 ঃ (1) হইতে উভয় পক্ষের লগারিদ্‌ম লইয়া

$$\log A = \log PR^n$$
$$= \log P + \log R^n = \log P + n \log R.$$

অনুসিদ্ধান্ত 2 ঃ টাকা-প্রতি বার্ষিক চক্রবৃদ্ধি r টাকা এবং সেই চক্রবৃদ্ধি যদি বৎসরে q কিস্তিতে দেয় হয়, তবে প্রতি টাকার জন্য প্রত্যেক কিস্তিতে $\frac{r}{q}$ টাকা প্রাপ্য হইবে।

সেক্ষেত্রে, 1 কিস্তির পর 1 টাকার সবৃদ্ধিমূল $= \left(1 + \frac{r}{q}\right)$;

2 " " " " " $= \left(1 + \frac{r}{q}\right)^2$.

অনুরূপে, q " " " " " $= \left(1 + \frac{r}{q}\right)^q$;

$\therefore$ n বৎসর পর " " " $= \left(1 + \frac{r}{q}\right)^{qn}$;

$\therefore$ " " " P " " $= P\left(1 + \frac{r}{q}\right)^{nq}$,

অর্থাৎ $$A = P\left(1 + \frac{r}{q}\right)^{nq}.$$

টীকা ঃ একই হারে বার্ষিক চক্রবৃদ্ধি অপেক্ষা, ষাণ্মাসিক ও ত্রৈমাসিক চক্রবৃদ্ধি বেশী। উদাহরণস্বরূপ, 1 টাকার

ষাণ্মাসিক চক্রবৃদ্ধিতে 1 বৎসরের সবৃদ্ধিমূল – বার্ষিক চক্রবৃদ্ধির 1 বৎসরের সবৃদ্ধিমূল ;

$$= \left(1 + \frac{r}{2}\right)^2 - (1 + r) = \frac{r^2}{4}.$$

অনুরূপে, ত্রৈমাসিক চক্রবৃদ্ধিতে 1 বৎসরে সবৃদ্ধিমূল – বার্ষিক চক্রবৃদ্ধিতে

1 বৎসরের সবৃদ্ধিমূল $= \left(1 + \frac{r}{4}\right)^4 - (1 + r) = \frac{3}{8} r^2 + \frac{r^3}{16} + \frac{r^4}{256}$.

$$= \frac{3r^2}{8} \text{ (প্রায়)।}$$

স্পষ্টত, একই হারে বার্ষিক চক্রবৃদ্ধি অপেক্ষা ষাণ্মাসিক ও ত্রৈমাসিক চক্রবৃদ্ধির পরিমাণ একটু বেশী হয়।

উদা. 1. বার্ষিক 3% হারে $2\frac{3}{4}$ বৎসরে 4000 টাকার সমূলচক্রবৃদ্ধি, আসন্ন টাকায় কত হইবে ?

3% অর্থাৎ শতকরা 3 টাকা সুদ = টাকা প্রতি $\frac{3}{100}$ বা '03 টাকা সুদ।

∴ 1 টাকার 1 বৎসরে চক্রবৃদ্ধি $R^n = 1 + \cdot 03$ বা $1\cdot 03$ টাকা।

$A = PR^n$ সূত্র অনুসারে, নির্ণেয় সমূলচক্রবৃদ্ধি $= 4000\ (1\cdot 03)^{2\frac{2}{3}}$ টাকা

$$= 4000\ (1\cdot 03)^{\frac{8}{3}}.$$

এখন লগারিদ্‌ম লইয়া এবং লগারিদ্‌ম ও অ্যান্টিলগারিদ্‌ম তালিকা হইতে দেখা যায়, $\log 4000(1\cdot 03)^{\frac{8}{3}} = \log 4000 + \frac{8}{3} \log 1\cdot 03$

$$= 3\cdot 6021 + \tfrac{8}{3} \times \cdot 0128$$
$$= 3\cdot 6021 + \cdot 0342 = 3\cdot 6363$$
$$= \log 4328.$$

∴ নির্ণেয় সমূলচক্রবৃদ্ধি = 4328 টাকা।

উদা. 2. বার্ষিক 4% হারে কত বৎসরে 100 টাকার সমূলচক্রবৃদ্ধি 1000 টাকা হইবে?

প্রশ্ন অনুসারে, এখানে সমূলচক্রবৃদ্ধি $A = 1000$, আসল $P = 100$ এবং টাকা প্রতি সুদ $r = \frac{4}{100} = \cdot 04$; অতএব 1 টাকার বৎসরের সমূলচক্রবৃদ্ধি $R = 1 + \cdot 04$ বা $1\cdot 04$ টাকা; নির্ণেয় বৎসর যেন n.

∴ $A = PR^n$ সূত্র অনুসারে,

∴ $1000 = 100\ (1\cdot 04)^n$;

বা, $10 = (1\cdot 04)^n$.

উভয় পক্ষের লগারিদ্‌ম লইয়া, $\log 10 = n \log (1\cdot 04)$;

$$\therefore\ n = \frac{\log 10}{\log (1\cdot 04)} = \frac{1}{\cdot 0170333} \qquad \text{[লগ্-তালিকা হইতে]}$$

পুনরায় উভয় পক্ষের লগারিদ্‌ম লইয়া,

$$\log n = -\log (\cdot 0170333) = -(\bar{2}\cdot 2312987)$$
$$= 2 - \cdot 2312987 = 1\cdot 7687013$$
$$= \log (58\cdot 70854054) \qquad \text{[লগ্-তালিকা হইতে]}$$

∴ নির্ণেয় বৎসর, $n = 58\cdot 7$ বৎসর (প্রায়)।

উদা. 3. শতকরা কত হার বার্ষিক চক্রবৃদ্ধিতে 175 টাকা 2 বৎসরে সুদে-মূলে $192\frac{15}{16}$ টাকায় পরিণত হইবে?

এখানে সমূলচক্রবৃদ্ধি $A=\frac{3087}{16}$ টা ; আসল $=175$ টা. ;

সময় $n=2$ বৎসর। এখন নির্ণেয় টাকা প্রতি চক্রবৃদ্ধির হার r

এবং 1 টাকার 1 বৎসরের সমূলচক্রবৃদ্ধি R হইলে,

$A=PR^n$ সূত্র অনুসারে,

$$\frac{3087}{16}=175R^2;$$

$\therefore\ 2\log R+\log 175=\log 3087-\log 16$;

$\therefore\ 2\log R=\log 3087-\log 16-\log 175$

$=3{\cdot}4895366-2{\cdot}2430380-1{\cdot}2041200$

$=3{\cdot}4895366-3{\cdot}4471580={\cdot}0423786$;

$\therefore\ \log R={\cdot}0211893=\log(1{\cdot}05)$;

$\therefore\ R=1{\cdot}05$;

$\therefore\ r=1{\cdot}05-1={\cdot}05.$

$\therefore$ নির্ণেয় বার্ষিক চক্রবৃদ্ধি সুদের হার $=5\%$

প্রশ্নমালা 43

1. বার্ষিক 4% হারে 5000 টাকার 3 বৎসরে সমূলচক্রবৃদ্ধি আসন্ন টাকায় কত হইবে ?

2. বৎসরে ছয় মাস অন্তর দেয় বার্ষিক 6% চক্রবৃদ্ধি হারে 12000 টাকা 10 বৎসর পর কত টাকা হইবে ?

3. বার্ষিক 4% হারে 643 টাকার 5 বৎসরের চক্রবৃদ্ধি আসন্ন টাকায় কত হইবে ?

4. কত সময়ে বার্ষিক 4% হারে একটি আসল সমূলচক্রবৃদ্ধিতে উহার দ্বিগুণ হইবে ?

5. কত সময়ে বার্ষিক 5% হারে একটা টাকা সমূলচক্রবৃদ্ধিতে নিজের দ্বিগুণ পরিমাণ হইবে ?

6. 9 বৎসর পর 400 টাকার সমূলচক্রবৃদ্ধি $569\frac{1}{3}$ টাকায় পরিণত হয় ? বার্ষিক চক্রবৃদ্ধির হার কত ? [$\log 569{\cdot}3\dot{3}=2{\cdot}7553666.$]

7. 8 বৎসর পর 500 টাকার সমূলচক্রবৃদ্ধি 742·25 টাকায় পরিণত হয়। সুদ ছয় মাস অন্তর দেয় হইলে ঐ চক্রবৃদ্ধির বার্ষিক হার কত ? [$\log 1{\cdot}025={\cdot}0107239$ এবং $\log 74225=4{\cdot}8705524.$]

8. 1965 খৃষ্টাব্দের পয়লা জানুয়ারী কোন শহরের লোকসংখ্যা 8000 ছিল। বার্ষিক 10% হারে লোকবৃদ্ধি পাইলে 1968 খৃষ্টাব্দের পয়লা জানুয়ারী ঐ শহরের লোকসংখ্যা কত হইবে?

9. কোন গ্রামের লোকসংখ্যা 10 বৎসরে 4550 হইতে বাড়িয়া যদি 5821 হয়, তবে লোকসংখ্যা বৃদ্ধির হার কত?

10. একটা টাকা একটা নির্দিষ্ট হারে বাড়িয়া m বৎসরে সমূলচক্রবৃদ্ধিতে যদি উহার p গুণ এবং n বৎসরে উহার q গুণ হয় তবে প্রমাণ কর যে $n = m \log_p q$.

11·10. বার্ষিকী (Annuties): **বার্ষিকী** বলিতে নির্দিষ্ট সময় পর পর বিশেষ শর্তে বা বিনা শর্তে দেয় নির্দিষ্ট পরিমাণ অর্থ বুঝায়।

বার্ষিকী বৎসরান্তে তো বটেই, অর্ধবৎসরান্তে অর্থাৎ ছয়মাস অন্তর, তিনমাস অন্তর প্রভৃতি বিভিন্ন সময়-পর্বান্তেও দেয় হইতে পারে। সময়-পর্বের উল্লেখ না থাকিলে অবশ্য বার্ষিকী বলিতে বৎসরান্তে দেয় বা প্রাপ্য নির্দিষ্ট পরিমাণ টাকাই বুঝায়।

বার্ষিকী নির্দিষ্টসংখ্যক বৎসর পর্যন্ত অথবা আজীবন প্রাপ্য (Life annuity) হইতে পারে। কখনও আবার তাহা চিরকাল প্রাপ্য (Perpetuity)ও হইতে পারে।

যে বার্ষিকী একটা নির্দিষ্ট সময় পরে দেয় হয়, তাহাকে **বিলম্বিত বার্ষিকী** (Deferred annuity বা Reversion) বলে।

11·11. কতিপয় বৎসরের অনাদায়ী বার্ষিকীর সমূলচক্রবৃদ্ধি: A টাকা পরিমাণ বার্ষিকী, n বৎসর পর্যন্ত যেন আদায় করা হয় নাই। চক্রবৃদ্ধি সুদের হার টাকা-প্রতি r টাকা, এক টাকার এক বৎসরের সমূলচক্রবৃদ্ধি R টাকা এবং n বৎসরের অনাদায়ী বার্ষিকীর সমূলচক্রবৃদ্ধি যেন M টাকা।

এখন, প্রথম বৎসর পরে দেয় A টাকা পরবর্তী $(n-1)$ বৎসর আদায় করা না হইলে, A-এর সমূলচক্রবৃদ্ধি হইবে AR^{n-1} টাকা; দ্বিতীয় বৎসর পরে দেয় বার্ষিকী টাকা পরবর্তী $(n-2)$ বৎসর আদায় করা না হইলে উহার সমূলচক্রবৃদ্ধি হইবে AR^{n-2} টাকা; এই ভাবে,

$$\text{নির্ণেয় } M = AR^{n-1} + AR^{n-2} + AR^{n-3} + \cdots\cdots + A$$

$$= A(R^{n-1} + R^{n-2} + R^{n-3} + \cdots\cdots + 1)$$

$$= A.\frac{R^{n-1}}{R-1} = \frac{A}{r}(R^{n-1}) \qquad [\because \; R = 1 + r]$$

অনুসিদ্ধান্ত: মোট সুদ I দ্বারা সূচিত হইলে,

$$\mathbf{I = \frac{A}{r}(R^n - 1) - nA.}$$

11·12. টাকা প্রতি r টাকা চক্রবৃদ্ধি সুদে কত টাকা নিয়োগ করিলে n বৎসরের জন্য বার্ষিকী A টাকা দেয় হইবে?

নিযোজ্য টাকার পরিমাণ P এবং 1 টাকার 1 বৎসরের সমূলচক্রবৃদ্ধি যেন R টাকা।

স্পষ্টতঃ, P টাকার n বৎসরের সমূলচক্রবৃদ্ধি $= PR^n$;

এবং n বৎসর অনাদায়ী A পরিমাণ বার্ষিকীর সমূলচক্রবৃদ্ধি $= \frac{A}{r}(R^n - 1)$. উহারা পরস্পর সমান বলিয়া

$$PR^n = \frac{A}{r}(R^n - 1)$$

$$\therefore \quad P = \frac{A(R^n - 1)}{rR^n} = \frac{A}{r}\ \frac{R^n - 1}{R^n} = \frac{\mathbf{A}}{\mathbf{r}}(\mathbf{1} - \mathbf{R}^{-\mathbf{n}}).$$

টীকা ঃ উপরের সূত্রে P টাকাকে n বৎসরের জন্য দেয় বার্ষিকী A টাকার **বর্তমান মূল্য** (present worth) বলে।

অনুসিদ্ধান্ত ঃ বার্ষিকীর মেয়াদ যখন অনন্তকাল ব্যাপী হয় অর্থাৎ যখন $n = \infty$ হয়, তখন ঐ বার্ষিকী-কে **চিরন্তন বার্ষিকী** (Perpetuity) বলে। যে সম্পত্তি হইতে চিরকাল একটা নির্দিষ্ট হারে বার্ষিক আয় পাওয়া যায় সেই সম্পত্তিকে **নির্দায় সম্পত্তি** (Freehold Estate) বলে এবং তাহার আয় চিরন্তন বার্ষিকী রূপে গণ্য হয়।

11·13. p বৎসর পরে n বৎসরের জন্য দেয় বিলম্বিত বার্ষিকী A টাকার বর্তমান মূল্য নির্ণয়।

নির্ণেয় বর্তমান মূল্য P', টাকা-প্রতি চক্রবৃদ্ধির হার r এবং এক টাকার এক বৎসরের সমূলচক্রবৃদ্ধি R হইলে,

$\mathbf{P}' = (p + n)$ বৎসরের জন্য বার্ষিকী A-এর বর্তমান মূল্য $- \, p$ বৎসরের জন্য বার্ষিকী A-এর বর্তমান মূল্য

$$= \frac{A}{r}\left\{1 - R^{-n-p}\right\} - \frac{A}{r}(1 - R^{-p})$$

$$= \frac{A}{r}\left\{R^{-p} - R^{-n-r}\right\} = \frac{\mathbf{A}}{\mathbf{r}}(\mathbf{1} - \mathbf{R}^{-\mathbf{n}})\mathbf{R}^{-\mathbf{p}}.$$

অনুসিদ্ধান্ত ঃ n বৎসরের জন্য বার্ষিকী A-এর বর্তমান মূল্য $P = \frac{A}{r}(1 - R^{-n})$ বলিয়া,

$$P' = \frac{A}{r}(1 - R^{-n})R^{-p} = PR^{-p} ;$$

$$\therefore \quad P = \frac{P'}{R^{-p}} = P'R^{p}$$

$= P'$-এর p বৎসরের সমূলচক্রবৃদ্ধি।

স্পষ্টতঃ, চিরন্তন বার্ষিকীর বর্তমান মূল্য $P = \frac{A}{r}(1 - R^{-n})$

$$= \frac{A}{r}\left(1 - \frac{1}{R^n}\right) = \frac{A}{r},$$

কারণ, $n = \infty$ বলিয়া, $\frac{1}{R^n} = 0$.

উদা. 1. বার্ষিক $3\frac{1}{2}\%$ চক্রবৃদ্ধি হারে 20 বৎসরের মেয়াদী বার্ষিকীর পরিমাণ যদি 500 টাকা হয়, তবে উহার বর্তমান মূল্য কত? [log 1·035 = ·0149403 এবং log 50·2567 = 1·7011940]

এখানে, বার্ষিকী $A = 500$, মেয়াদ $n = 20$, টাকা-প্রতি বার্ষিক চক্রবৃদ্ধি $r = \frac{3 \cdot 5}{100}$ বা ·035 টা. এবং 1 টাকার এক বৎসরের সমূলচক্রবৃদ্ধি $R = (1 + \cdot 035)$ বা 1·035 টা.; নির্ণেয় বর্তমান মূল্য P হইলে,

$P = \frac{A}{r}(1 - R^{-n})$ সূত্র অনুসারে,

$$P = \frac{500}{\cdot 035}\{1 - (1 \cdot 035)^{-20}\}.$$

এখন, $x = (1 \cdot 035)^{-20}$ ধরিলে,

$$\log x = -20 \log (1 \cdot 035) = -20 \times \cdot 0149403$$

$$= -\cdot 2988060 = -1 + 1 - \cdot 2988060$$

$$= \bar{1} \cdot 7011940 = \log \cdot 502567.$$

$$\therefore \quad x = \cdot 502567\ ;$$

$$\therefore \quad P = \frac{500}{\cdot 035}(1 - \cdot 502567) = \frac{500}{\cdot 035}(\cdot 49743) = \frac{1}{7} \times 49743 \cdot 3$$

$= 7106 \cdot 18$ (প্রায়)।

$\therefore$ নির্ণেয় বর্তমান মূল্য = 7106 টাকা 18 পয়সা (প্রায়)।

উদা. 2. 5 বৎসর পরে 20 বৎসর মেয়াদী কোন বিলম্বিত বার্ষিকীর বাৎসরিক পরিমাণ যদি 40 টাকা হয়, তবে কত টাকায় উহাকে ক্রয় করিলে, ক্রয়মূল্যের উপর বার্ষিক 4% হারে চক্রবৃদ্ধি আদায় হইবে?

স্পষ্টতঃ, নির্ণেয় ক্রয়মূল্য প্রশ্নোল্লিখিত বিলম্বিত বার্ষিকীর বর্তমান মূল্য। উহা 5 বৎসর বিলম্বিত এবং তাহার পরে 4% চক্রবৃদ্ধিতে 20 বৎসর মেয়াদী।

অতএব, নির্ণেয় ক্রয়মূল্য = বর্তমান মূল্য P'.

$P' = \frac{A}{r} R^{-p} (1 - R^{-n})$ সূত্র অনুসারে, এখানে $p = 5$, $r = \cdot 04$, $R = 1\cdot 04$, $n = 20$ এবং $A = 40$ বলিয়া ঐ নির্ণেয় ক্রয়মূল্য $P' = \frac{40}{\cdot 04}(1\cdot 04)^{-5}\{1 - (1\cdot 04)^{-20}\}$.

এখন, $x = R^{-p}$ $(1\cdot 04)^{-5}$ হইলে, $\log x = -5 \log 1\cdot 04$

$$= -5 \times \cdot 0170333 = -\cdot 0851665$$

$$= -1 + 1 - \cdot 0851665 = \bar{1}\cdot 9148335 = \log \cdot 82193.$$

$\therefore \quad x = \cdot 82193 = R^{-p}$.

অনুরূপে, $\log (1\cdot 04)^{-20} = -20 \log 1\cdot 04 = -20 \times \cdot 0170333.$

$$= -\cdot 3406660 = -1 + 1 - \cdot 3406660 = \bar{1}\cdot 6593340$$

$$= \log \cdot 45639.$$

$\therefore \quad (1\cdot 04)^{-20} = \cdot 45639.$

$$\therefore \quad P' = \frac{40}{\cdot 04} \times \cdot 82193(1 - \cdot 45639) = \frac{40 \times \cdot 82193 \times \cdot 5436}{\cdot 04}$$

$$= 82\cdot 193 \times 5\cdot 4361.$$

$\therefore \log P' = \log 82\cdot 193 + \log 5\cdot 4361$

$$= 1\cdot 9148348 + \cdot 7352874 = 2\cdot 6501222$$

$$= \log 446\cdot 81 \text{ (প্রায়)}$$

$\therefore$ নির্ণেয় ক্রয়মূল্য $P' = 446$ টাকা 81 পয়সা।

উদা. 3. একটি চিরন্তন বার্ষিকী (Perpetuity) যদি 25 বছরের বার্ষিকীর মূল্যে ক্রয়যোগ্য হয়, তবে 3 বৎসর মেয়াদী যে-বার্ষিকীটিকে 625 টাকায় ক্রয় করা যায় তাহার মান নির্ণয় কর।

আমরা জানি, টাকা-প্রতি বার্ষিক চক্রবৃদ্ধি r, এক টাকার এক বৎসরের সমূল-চক্রবৃদ্ধি R, বার্ষিকী A, মেয়াদ n বৎসর এবং বর্তমান মূল্য P হইলে,

$$P = \frac{A}{r}(1 - R^{-n}) = \frac{A}{r}\left(1 - \frac{1}{R^n}\right).$$

চিরন্তন বার্ষিকীর ক্ষেত্রে $n = \infty$ বলিয়া, $\frac{1}{R^n} = 0$ এবং সেই কারণে চিরন্তন বার্ষিকীর বর্তমান মূল্য $\mathbf{P} = \frac{\mathbf{A}}{\mathbf{r}}$.

কিন্তু প্রদত্ত প্রশ্নে $P = 25A$; $\therefore \quad 25A = \dfrac{A}{r}$,

বা, $r = \frac{1}{25} = \cdot 04$.

অতএব প্রদত্ত প্রশ্নের দ্বিতীয়ার্ধে উল্লিখিত বার্ষিকীটি 4% ($= 100r$) চক্রবৃদ্ধিতে 3 বৎসর মেয়াদী এবং উহার বর্তমান মূল্য 625 টাকা।

$$\therefore \quad 625 = \frac{A}{\cdot 04}\{1 - (1\cdot 04)^{-3}\}.$$

এখন, $\log (1\cdot 04)^{-3} = -3 \log 1\cdot 04 = -3 \times \cdot 0170333 = -\cdot 0510999$

$$= \bar{1}\cdot 9489001 = \log (\cdot 88900).$$

$$\therefore \quad (1\cdot 04)^{-3} = \cdot 88900$$

$$\therefore \quad 625 = \frac{A}{\cdot 04}(1 - \cdot 88900) = \frac{A \times \cdot 111}{\cdot 04} = A \times 2\cdot 775$$

$$\therefore \quad A = \frac{625}{2\cdot 775} = \frac{25}{\cdot 111} = 225\cdot 225.$$

$\therefore$ নির্ণেয় বার্ষিকীর মান $= 225$ টাকা 23 পয়সা (প্রায়)।

উদা. 4. 2500 টাকায় একটি নির্দায় সম্পত্তি ক্রয় করা হইল। উহার বার্ষিক আয় 100 টাকা হইলে চক্রবৃদ্ধির শতকরা বার্ষিক হার কত হয়?

নির্দায় সম্পত্তির আয় চিরন্তন-বার্ষিকীরূপে গণ্য হয় বলিয়া এক্ষেত্রে উহার বর্তমান মূল্য $= 2500$ টাকা এবং ঐ বার্ষিকীর মান $= 100$ টাকা।

$\therefore$ চিরন্তন বার্ষিকীর ক্ষেত্রে প্রযোজ্য $P = \dfrac{A}{r}$.

সূত্র অনুসারে, এখানে $2500 = \dfrac{100}{r}$ বা $r = \dfrac{1}{25} = \cdot 04$.

$\therefore$ নির্ণেয় চক্রবৃদ্ধির শতকরা হার $= 100r = 4\%$.

উদা. 5. বার্ষিক 500 টাকা আয়ের একটি সম্পত্তি 20 বৎসরের ইজারা দেওয়া হইয়াছে। চক্রবৃদ্ধির হার 6% হইলে, 7 বৎসর পরে কত টাকা জরিমানা দিয়া পরবর্তী 20 বৎসরের জন্য ঐ ইজারা ভোগ করা যাইবে?

প্রশ্ন অনুসারে, প্রথম 20 বৎসর মেয়াদের 7 বৎসর অতিবাহিত হইবার পরে 13 বৎসরের জন্য আর টাকা দিতে হইবে না। ঐ 13 বৎসর পরে আরও 7 বৎসরের জন্যই জরিমানা দেয়। সুতরাং 13 বৎসর পরে 7 বৎসরের মেয়াদ-বৃদ্ধির জন্য দেয় জরিমানা 13 বৎসর বিলম্বিত 6% হারে পরবর্তী 7 বৎসর মেয়াদী বার্ষিকীর বর্তমান মূল্যের সমান হইবে। এই জরিমানা যেন F টাকা।

$P = \frac{A}{r} \cdot R^{-p}(1 - R^{-n})$ সূত্রে এখানে,

A (বার্ষিকী) = 500, r (টাকা-প্রতি চক্রবৃদ্ধি) = '06, R (এক টাকার এক বৎসরের সমূলচক্রবৃদ্ধি) = 1'06, $n = 7$, $p = 13$ এবং বর্তমান মূল্য $P = F$.

$$\therefore \quad F = \frac{500}{\cdot 06} \times (1 \cdot 06)^{-13}\{1 - (1 \cdot 06)^{-7}\}.$$

এখন, $\log (1 \cdot 06)^{-13} = -13 \log 1 \cdot 06 = -\cdot 3289767$

$$= \bar{1} \cdot 6710233 = \log \cdot 46884.$$

$\therefore \quad (1 \cdot 06)^{-13} = \cdot 46884.$

অনুরূপে, $(1 \cdot 06)^{-7} = \cdot 665506.$

$$\therefore \quad F = \frac{500}{\cdot 06} \times \cdot 46884 \times (1 - \cdot 665506)$$

$$= 5 \times 46 \cdot 884 \times \frac{33 \cdot 4494}{6}$$

$$= 234 \cdot 42 \times 5 \cdot 5749.$$

$\therefore \quad \log F = \log 234 \cdot 42 + \log 5 \cdot 5749$

$$= 2 \cdot 36699947 + \cdot 7462371$$

$= 3 \cdot 1162318 = \log 1306 \cdot 87$ (প্রায়)।

$\therefore \quad F = 1306 \cdot 87.$

$\therefore$ নির্ণেয় জরিমানা = 1306 টাকা 87 পয়সা (প্রায়)।

প্রশ্নমালা 44

1. সেভিংস্ ব্যাঙ্কে এক ব্যক্তি প্রতিবৎসর 30 টাকা করিয়া জমা রাখে। ঐ ব্যাঙ্ক যদি চক্রবৃদ্ধি হারে 2'5% সুদ দেয়, তবে 20 বৎসরের মাথায় সমূলচক্রবৃদ্ধি কত হইবে? [C. U. 1937]

[$\log 1 \cdot 025 = \cdot 0107239$; $\log 16386 = 4 \cdot 214478$]

2. চক্রবৃদ্ধি হারে সুদ যদি 4% হয়, তবে 5 বৎসরের জন্য দেয় 300 টাকার একটি বার্ষিকীর বর্তমান মূল্য কত? [C. U. 1936]

[$\log 104 = 3 \cdot 0170333$ এবং $\log 8279 = 4 \cdot 9148335$]

3. চক্রবৃদ্ধি সুদের হার 4% হইলে 40 বৎসরের জন্য দেয় 100 টাকার একটি বার্ষিকী কত টাকায় ক্রয় করা যাইবে?

[$\log 104 = 3 \cdot 0170333$ এবং $\log \cdot 20829 = \bar{1} \cdot 318668$]

4. 3% চক্রবৃদ্ধিতে 25 বৎসর মেয়াদী 100 টাকার একটি বার্ষিকীর বর্তমান মূল্য কত?

[log 103 = 2·0128372 এবং log 477606 = 5·67907]

5. চক্রবৃদ্ধি সুদের হার 3·5% হইলে কত বৎসর বার্ষিকীর মূল্যে একটি নির্দায় সম্পত্তি ক্রয় করা যাইবে?

6. একটি নির্দায় সম্পত্তির গ্রস্ আয় 150 টাকা হইতে উহার 25% ভাড়া ও অন্যান্য করের জন্য এবং মেরামতের খরচ বাবদ $8\frac{1}{3}$% ব্যয় করা হয়। 2500 টাকায় যদি ঐ সম্পত্তি ক্রয় করা যায় তবে চক্রবৃদ্ধি সুদের হার কত?

7. চক্রবৃদ্ধি সুদের হার 2·5% হইলে, 2 বৎসরের জন্য বিলম্বিত 168 টাকা 10 পয়সা পরিমাণ একটি চিরন্তন বার্ষিকীর বিক্রয়মূল্য নির্ণয় কর।

[ইঙ্গিত : p বৎসর বিলম্বিত যে-কোন বার্ষিকীর বর্তমান মূল্য

$$= \frac{A}{r} R^{-p}(1 - R^{-n});$$

ঐ বার্ষিকী চিরন্তন হইলে, $n = \infty$ বলিয়া, $R^{-n} = \frac{1}{R^n} = 0$;

$\therefore$ সেক্ষেত্রে, $P = \frac{A}{r} R^{-p}$;

$\therefore$ এখানে বর্তমান মূল্য $= \dfrac{\frac{1681}{10} \times (1·025)^{-2}}{·025}$; ইত্যাদি।]

8. 30 বৎসরের বার্ষিকী দিয়া একটি নির্দিষ্ট মেয়াদের বার্ষিকী কেনা যায় এবং 6 বৎসরের বার্ষিকী দিয়া পূর্বোক্ত মেয়াদের দ্বিগুণ সময়ের জন্য একই বার্ষিকী কেনা যায়। চক্রবৃদ্ধির শতকরা হার কত?

[ইঙ্গিত : উভয়ক্ষেত্রে বার্ষিক A মেয়াদ প্রথম ক্ষেত্রে n বৎসর, দ্বিতীয় ক্ষেত্রে

$2n$ বৎসর ধরিলে, $30A = \frac{A}{r}(1 - R^{-n})$ এবং $6A = \frac{A}{r}(A - R^{-2n})$;

$$R^{-n} = 1 - 30r; \quad R^{-2n} = 1 - 6r;$$

কিন্তু, $R^{-2n} = (R^{-n})^2 = (1 - 30r)^2$; $\therefore (1 - 30r)^2 = 1 - 6r$; ইত্যাদি।]

9. 6% চক্রবৃদ্ধি সুদে এক ব্যক্তি 3000 টাকা ধার করে। 300 টাকা করিয়া পর পর 5টি বার্ষিক কিস্তিতে ধার শোধ দিবার পরে ঐ ব্যক্তি 140 টাকা বার্ষিক আয়ের একটি নির্দায় সম্পত্তি প্রত্যর্পণ করিয়া ঋণমুক্ত হয়। ইহাতে ঐ ব্যক্তির কি পরিমাণ ক্ষতি বা লাভ হয়?

[log 106 = 2·0253059 এবং log 133·8226 = 2·1265295]

10. এক ব্যক্তি তাহার 1000 টাকা মূলধনের উপর 5% চক্রবৃদ্ধি হারে সুদ পায়। সে যদি প্রতিবৎসর 90 টাকা হিসাবে খরচ করিয়া যায় তবে দেখাও যে 17 বৎসর পার হইবার আগেই সে নিঃস্ব হইয়া পড়িবে।

$$[\log 105 = 2{\cdot}0211893]$$

11. টাকা-প্রতি r হিসাবে চক্রবৃদ্ধি সুদে p টাকা পরিমাণ ঋণ যদি বার্ষিক $\frac{p}{m}$ টাকা কিস্তিতে n বৎসরে শোধ দেওয়া যায় তবে প্রমাণ কর যে $n = -\dfrac{\log(1-mr)}{\log(1+r)}$.

দ্বাদশ অধ্যায়

সূচক-শ্রেণী

(Exponential Series)

12·1. e দ্বারা সূচিত অসীম শ্রেণী।

$$1+\frac{1}{\lfloor 1}+\frac{1}{\lfloor 2}+\frac{1}{\lfloor 3}+\cdots+\frac{1}{\lfloor r}+\cdots$$

অসীম শ্রেণীটিকে e দ্বারা সূচিত করা হয়।

12·2. e সসীম এবং 2 ও 3-এর অন্তর্বর্তী মান-বিশিষ্ট।

$$e=1+\frac{1}{\lfloor 1}+\frac{1}{\lfloor 2}+\frac{1}{\lfloor 3}+\cdots$$

$$=1+1+\frac{1}{\lfloor 2}+\frac{1}{\lfloor 3}+\cdots=2+\frac{1}{\lfloor 2}+\frac{1}{\lfloor 3}+\cdots$$

দক্ষিণপক্ষস্থ সকল পদই ধনাত্মক বলিয়া, স্পষ্টই, e-এর মান 2-অপেক্ষা বৃহত্তর।

আবার, $\lfloor 3=3.2.1$; $\therefore\ \lfloor 3>2.2.1$, অর্থাৎ 2^2 ;

$$\therefore\ \frac{1}{\lfloor 3}<\frac{1}{2^2},$$

এইরূপে, $\frac{1}{\lfloor 4}<\frac{1}{2^3}$; $\frac{1}{\lfloor 5}<\frac{1}{2^4}, \cdots$

অতএব, $e=1+1+\frac{1}{\lfloor 2}+\frac{1}{\lfloor 3}+\frac{1}{\lfloor 4}+\frac{1}{\lfloor 5}+\cdots$

$$<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\cdots$$

$$<1+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\cdots\right)$$

$<1+\frac{1}{1-\frac{1}{2}}$ (বন্ধনীমধ্যস্থ অসীম গুণোত্তর-শ্রেণীর সমষ্টি লইয়া)

$<3.$

অতএব, e সসীম এবং ইহার মান 2 ও 3-এর অন্তর্বর্তী।

দ্রষ্টব্য : উচ্চতর গণিতে e-এর ব্যবহার এবং প্রয়োজন অত্যন্ত অধিক। অধ্যাপক অ্যাডামস্ ইহার মান 260 দশমিক স্থান পর্যন্ত নির্ণয় করিয়াছেন। সাধারণতঃ ইহার 7 দশমিক স্থান পর্যন্ত শুদ্ধ মানই যথেষ্ট। ইহার 9 দশমিক স্থান পর্যন্ত শুদ্ধ মান নিচে দেওয়া হইল :

$$e=2{\cdot}718281828.$$

12·3. e একটি অমেয় সংখ্যা।

যে সংখ্যাকে দুইটি পূর্ণসংখ্যার অনুপাতরূপে প্রকাশ করা যায়, তাহাকে প্রমেয় (commensurable) সংখ্যা এবং যাহাকে দুইটি পূর্ণসংখ্যার অনুপাতরূপে প্রকাশ করা যায় না, তাহাকে (incommensurable) সংখ্যা বলে।

যদি সম্ভব হয়, মনে কর, e অমেয় নয়, ইহা একটি প্রমেয় সংখ্যা এবং ইহা দুইটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা m এবং n-এর অনুপাত $\frac{m}{n}$-এর সমান। e-এর মান ধনাত্মক বলিয়া, এক্ষেত্রে m এবং n-কে ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা ধরা হইল। তাহা হইলে,

$$\frac{m}{n}=1+1+\frac{1}{\underline{|2}}+\frac{1}{\underline{|3}}+\cdots+\frac{1}{\underline{|n}}+\frac{1}{\underline{|n+1}}+\cdots$$

উভয় পক্ষকে $\underline{|n}$ দ্বারা গুণ করিলে,

$$m.\underline{|n-1}=\underline{|n}+\underline{|n}+\frac{\underline{|n}}{\underline{|2}}+\frac{\underline{|n}}{\underline{|3}}+\cdots+1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\cdots$$

স্পষ্টই, বাম পক্ষস্থ $\underline{|n-1}$ এবং সেইজন্য $m\,\underline{|n-1}$ পূর্ণসংখ্যা এবং দক্ষিণ পক্ষস্থ প্রথম হইতে 1 পর্যন্ত সমস্ত পদই পূর্ণসংখ্যা, এবং সেইজন্য উহাদের সমষ্টিও একটি পূর্ণসংখ্যা। অতএব,

$$\text{একটি পূর্ণসংখ্যা}=\text{একটি পূর্ণসংখ্যা}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\cdots \qquad (1)$$

এখন, $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\cdots$, স্পষ্টই ইহার প্রথম পদ $\frac{1}{n+1}$ অপেক্ষা বৃহত্তর এবং $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+1)^3}+\cdots$ অসীম শ্রেণীটি অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর ;

অর্থাৎ $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\cdots>\frac{1}{n+1}$

এবং $<\frac{1}{(n+1)}+\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+1)^3}+\cdots$

$$=\frac{\frac{1}{n+1}}{1-\frac{1}{n+1}}=\frac{1}{n}.$$

অতএব, (1)-এর দক্ষিণ পক্ষস্থ $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\cdots$, $\frac{1}{n+1}$ এবং $\frac{1}{n}$-এর অন্তর্বর্তী, এবং সেইজন্য একটি প্রকৃত ভগ্নাংশ, কারণ, $\frac{1}{n+1}$ এবং $\frac{1}{n}$-এর প্রত্যেকটিই প্রকৃত ভগ্নাংশ। তাহা হইলে, (1) হইতে দেখা গেল, একটি পূর্ণসংখ্যা = একটি পূর্ণসংখ্যা + একটি প্রকৃত ভগ্নাংশ ;

কিন্তু ইহা অসম্ভব ; অতএব, e অমেয় নয় প্রমেয়, এই কল্পনা ভুল।

$\therefore$ e একটি অমেয় সংখ্যা।

12·4. সূচক-উপপাদ্য ও সূচক-শ্রেণী।

(1) **x-এর সকল মানের জন্য**

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{\lfloor 2} + \frac{x^3}{\lfloor 3} + \cdots + \frac{x^r}{\lfloor r} + \cdots$$

(2) **$a > 0$ হইলে, x-এর সকল মানের জন্য**

$$a^x = 1 + \frac{x}{1!}(\log_e a) + \frac{x^2}{2!}(\log_e a)^2 + \frac{x^3}{3!}(\log_e a)^3 + \cdots + \frac{x^r}{r!}(\log_e a)^r + \cdots$$

লক্ষ্য করিতে হইবে উভয় শ্রেণীই অসীম পর্যন্ত বিস্তৃত।

(1) এবং (2)-কে সূচক-উপপাদ্য (Exponential Theorem) এবং (1) এবং (2)-এর দক্ষিণ পক্ষস্থ অভিসারী অসীম শ্রেণীদ্বয়কে সূচক-শ্রেণী (Exponential Series) বলা হয়। e^x এবং a^x-কে সূচক-অপেক্ষক (Exponential Function) বলে।

দ্রষ্টব্য ঃ উপপাদ্য-দুইটির প্রমাণ পাঠ্যতালিকা-বহির্ভূত।

অনুসিদ্ধান্ত। e^x-এর বিস্তৃতিতে, x-এর স্থলে যথাক্রমে $-x$, 1, এবং -1 বসাইলে,

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{\lfloor 2} - \frac{x^3}{\lfloor 3} + \cdots + (-1)^r \frac{x^r}{\lfloor r} + \cdots$$

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{\lfloor 2} + \frac{1}{\lfloor 3} + \cdots + \frac{1}{\lfloor r} + \cdots$$

$$e^{-1} = 1 - 1 + \frac{1}{\lfloor 2} - \frac{1}{\lfloor 3} + \cdots + (-1)^r \frac{1}{\lfloor r} + \cdots$$

বিস্তৃতিগুলি পাওয়া যায়।

12·5. $\frac{1}{(-r)!}$-এর অর্থ।

অসীম শ্রেণীর সমষ্টি-নির্ণয়ের সময়ে ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা r-সংবলিত $(-r)!$ প্রতীকটি অনেকসময় আসিয়া পড়ে। ফ্যাক্টরিয়ালের সংজ্ঞা-মতে ইহা অর্থহীন হইলেও, আমরা জানি,

$$\frac{n!}{(n-r)!} = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) ;$$

উভয় পক্ষে $n=0$ বসাইলে,

$$\frac{0\,!}{(-r)\,!}=0\,;\ \text{কিন্তু}\ 0\,!\ =1\,;$$

$$\therefore\ \frac{1}{(-r)\,!}=0.$$

12·6. সূচক-উপপাদ্য-সম্বন্ধীয় বিবিধ প্রশ্নের সমাধান।

উদা. 1. $\frac{1}{2}\left(e+\frac{1}{e}\right)$ এবং $\frac{1}{2}\left(e-\frac{1}{e}\right)$-এর মান নির্ণয় কর। [Find the value of $\frac{1}{2}\left(e+\frac{1}{e}\right)$ and $\frac{1}{2}\left(e-\frac{1}{e}\right)$.]

আমরা জানি, $e^x=1+x+\frac{x^2}{\underline{|2}}+\frac{x^3}{\underline{|3}}+\frac{x^4}{\underline{|4}}+\cdots$

উভয় পক্ষে $x=1$ বসাইলে, $e=1+1+\frac{1}{\underline{|2}}+\frac{1}{\underline{|3}}+\frac{1}{\underline{|4}}+\cdots$ (1)

$x=-1$ বসাইলে, $e^{-1}=\frac{1}{e}=1-1+\frac{1}{\underline{|2}}-\frac{1}{\underline{|3}}+\frac{1}{\underline{|4}}-\cdots$ (2)

(1) এবং (2) যোগ করিলে,

$$e+\frac{1}{e}=2\left(1+\frac{1}{\underline{|2}}+\frac{1}{\underline{|4}}+\frac{1}{\underline{|6}}+\cdots\cdots\right).$$

$$\therefore\ \frac{1}{2}\left(e+\frac{1}{e}\right)=1+\frac{1}{\underline{|2}}+\frac{1}{\underline{|4}}+\frac{1}{\underline{|6}}+\cdots\cdots.$$

আবার, (1) হইতে (2) বিয়োগ করিয়া বিয়োগফলকে 2 দ্বারা ভাগ করিলে,

$$\frac{1}{2}\left(e-\frac{1}{e}\right)=1+\frac{1}{\underline{|3}}+\frac{1}{\underline{|5}}+\cdots\cdots.$$

উদা. 2. চারি দশমিক স্থান পর্যন্ত $\frac{1}{\sqrt[5]{e}}$-এর শুদ্ধমান নির্ণয় কর। [Find the value of $\frac{1}{\sqrt[5]{e}}$ correct to four places of decimal.] [C. U. 1936]

e^x-এর বিস্তৃতিতে $x=-\frac{1}{5}$ বসাইলে,

$$\frac{1}{\sqrt[5]{e}}=e^{-\frac{1}{5}}=1-\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2\underline{|2}}-\frac{1}{5^3\underline{|3}}+\frac{1}{5^4\underline{|4}}-\frac{1}{5^5\underline{|5}}+\cdots\cdots$$

$$=1-\frac{2}{10}+\frac{2^2}{10^2\underline{|2}}-\frac{2^3}{10^3\underline{|3}}+\frac{2^4}{10^4\underline{|4}}-\frac{2^5}{10^5\underline{|5}}+\cdots\cdots$$

$$=1-\cdot2+\frac{\cdot04}{2}-\frac{\cdot008}{6}+\frac{\cdot0002}{3}-\frac{\cdot00004}{15}+\cdots\cdots$$

$$=1-\cdot 2+\cdot 02-\cdot 001\dot{3}+\cdot 0000\dot{6}-\cdot 000002\dot{6}+\cdots\cdots$$
$$=1\cdot 020066-\cdot 201335$$
$$=\cdot 818731$$
$$=\cdot 8187.$$

উদা. 3. প্রমাণ কর যে (Show that),

$$\frac{1}{2!}+\frac{1+2}{3!}+\frac{1+2+3}{4!}+\frac{1+2+3+4}{5!}+\cdots=\frac{e}{2}.$$

[C. U., 1942, '45]

প্রদত্ত শ্রেণীটির n-তম পদ

$$=\frac{1+2+3+\cdots+n}{(n+1)!}=\frac{n(n+1)}{2\,(n+1)!}=\frac{1}{2\,(n-1)!}.$$

ইহাতে $n=1, 2,\cdots$ বসাইয়া,

প্রথম পদ $=\frac{1}{2\,0!}$, দ্বিতীয় পদ $=\frac{1}{2\,1!}$,

তৃতীয় পদ $=\frac{1}{2\,2!}$, চতুর্থ পদ $=\frac{1}{2\,3!}$, ইত্যাদি।

$\therefore$ নির্ণেয় সমষ্টি $=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots\right)=\frac{e}{2}.$

উদা. 4. প্রমাণ কর যে (Prove that),

(i) $\frac{2}{1!}+\frac{4}{3!}+\frac{6}{5!}+\frac{8}{7!}+\cdots=e.$ [C. U., 1936]

(ii) $\frac{2}{3!}+\frac{4}{5!}+\frac{6}{7!}+\frac{8}{9!}+\cdots=\frac{1}{e}.$ [C. U., 1937]

(i) শ্রেণীটির n-তম পদ $=\frac{2n}{(2n-1)!}=\frac{(2n-1)+1}{(2n-1)!}$

$$=\frac{2n-1}{(2n-1)!}+\frac{1}{(2n-1)!}=\frac{1}{(2n-2)!}+\frac{1}{(2n-1)!}.$$

$\therefore$ ইহাতে $n=1, 2,\cdots$ বসাইয়া,

প্রথম পদ $=\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}$, দ্বিতীয় পদ $=\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}$,

তৃতীয় পদ $=\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}$, চতুর্থ পদ $=\frac{1}{6!}+\frac{1}{7!}$, ইত্যাদি।

$\therefore$ নির্ণেয় সমষ্টি $=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\ldots=e.$

বিকল্প পদ্ধতিঃ প্রদত্ত শ্রেণী $= \frac{1+1}{1!} + \frac{3+1}{3!} + \frac{5+1}{5!} + \frac{7+1}{7!} + \cdots$

$$= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \cdots = e.$$

(ii) শ্রেণীটির n-তম পদ $= \frac{2n}{(2n+1)!} = \frac{(2n+1)-1}{(2n+1)!} = \frac{2n+1}{(2n+1)!} - \frac{1}{(2n+1)!}$

$$= \frac{1}{(2n)!} - \frac{1}{(2n+1)!}.$$

∴ ইহাতে $n = 1, 2, 3, \cdots$ ইত্যাদি বসাইয়া,

প্রথম পদ $= \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}$, দ্বিতীয় পদ $= \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!}$, তৃতীয় পদ $= \frac{1}{6!} - \frac{1}{7!}$,

... ...

∴ নির্ণেয় সমষ্টি $= \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} - \frac{1}{7!} + \cdots$

$$= 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} - \frac{1}{7!} + \cdots$$

$$= e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

বিকল্প পদ্ধতিঃ প্রদত্ত শ্রেণীটি $= \frac{3-1}{3!} + \frac{5-1}{5!} + \frac{7-1}{7!} + \frac{9-1}{9!} + \cdots$

$$= \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} - \frac{1}{7!} + \cdots$$

$$= 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} - \frac{1}{7!} + \cdots$$

$$= e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

উদা. 5. $\frac{4}{1!} + \frac{11}{2!} + \frac{22}{3!} + \frac{37}{4!} + \frac{56}{5!} + \cdots$ অসীম পর্যন্ত শ্রেণীটির সমষ্টি নির্ণয় কর (Sum the series ··· to infinity)।

মনে কর, $4 + 11 + 22 + \cdots$ শ্রেণীটির n-তম পদ t_n এবং উহার প্রথম হইতে n-সংখ্যক পদের সমষ্টি S_n.

∴ $S_n = 4 + 11 + 22 + 37 + \cdots + t_n$;

আবার, $S_n = \quad 4 + 11 + 22 + \cdots + t_{n-1} + t_n$.

$\therefore$ বিয়োগ করিয়া, $0 = 4 + 7 + 11 + 15 + \cdots + (t_n - t_{n-1}) - t_n$

$$= 4 + \{7 + 11 + 15 + \cdots (n-1)\text{-তম পদ পর্যন্ত }\} - t_n;$$

$\therefore$ $t_n = 1 + (3 + 7 + 11 + 15 + \cdots n\text{-তম পদ পর্যন্ত })$

$$= 1 + \frac{n}{2}\left\{2.3 + (n-1)4\right\}$$

$$= 1 + n + 2n^2 = 2n^2 + n + 1.$$

$\therefore$ প্রদত্ত শ্রেণীটির n-তম পদ

$$= \frac{2n^2 + n + 1}{\lfloor n} = \frac{2n(n-1) + 3n + 1}{\lfloor n}$$

$$= \frac{2n(n-1)}{\lfloor n} + \frac{3n}{\lfloor n} + \frac{1}{\lfloor n} = \frac{2}{\lfloor n-2} + \frac{3}{\lfloor n-1} + \frac{1}{\lfloor n}.$$

$\therefore$ ইহাতে $n = 1, 2, \cdots$ ইত্যাদি বসাইয়া,

প্রথম পদ $= \frac{2}{\lfloor -1} + \frac{3}{\lfloor 0} + \frac{1}{\lfloor 1} = 0 + 3 + \frac{1}{\lfloor 1}$,

দ্বিতীয় পদ $= \frac{2}{\lfloor 0} + \frac{3}{\lfloor 1} + \frac{1}{\lfloor 2} = 2 + \frac{3}{\lfloor 1} + \frac{1}{\lfloor 2}$,

তৃতীয় পদ $= \frac{2}{\lfloor 1} + \frac{3}{\lfloor 2} + \frac{1}{\lfloor 3}$,

চতুর্থ পদ $= \frac{2}{\lfloor 2} + \frac{3}{\lfloor 3} + \frac{1}{\lfloor 4}$, ইত্যাদি।

$\therefore$ উল্লম্বভাবে (Vertically) যোগ করিয়া,

নির্ণেয় সমষ্টি $= 2\left(1 + \frac{1}{\lfloor 1} + \frac{1}{\lfloor 2} + \cdots\right) + 3\left(1 + \frac{1}{\lfloor 1} + \frac{1}{\lfloor 2} + \frac{1}{\lfloor 3} + \cdots\right)$

$$+ \left(\frac{1}{\lfloor 1} + \frac{1}{\lfloor 2} + \frac{1}{\lfloor 3} + \frac{1}{\lfloor 4} + \cdots\right)$$

$$= 2e + 3e + (e - 1) = \mathbf{6e - 1}.$$

উদা. 6. $1 + \frac{1+x}{\lfloor 2} + \frac{1+x+x^2}{\lfloor 3} + \frac{1+x+x^2+x^3}{\lfloor 4} + \cdots$ অসীম পদ পর্যন্ত রাশিমালার মান নির্ণয় কর।

শ্রেণীটির n-তম পদ $= \frac{1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1}}{\lfloor n} = \frac{1}{\lfloor n} \cdot \frac{1 - x^n}{1 - x}$.

$\therefore$ প্রথম পদ $t_1 = \frac{1}{\lfloor 1} \cdot \frac{1-x}{1-x}$, $t_2 = \frac{1}{\lfloor 2} \cdot \frac{1-x^2}{1-x}$,

$$t_3 = \frac{1}{\lfloor 3} \cdot \frac{1-x^3}{1-x}, \text{ ইত্যাদি।}$$

∴ নির্ণেয় সমষ্টি

$$=\frac{1}{1-x}\left(\frac{1-x}{\lfloor 1}+\frac{1-x^2}{\lfloor 2}+\frac{1-x^3}{\lfloor 3}+\cdots\cdots\right)$$

$$=\frac{1}{1-x}\left[\left(\frac{1}{\lfloor 1}+\frac{1}{\lfloor 2}+\frac{1}{\lfloor 3}+\cdots\right)-\left(\frac{x}{\lfloor 1}+\frac{x^2}{\lfloor 2}+\frac{x^3}{\lfloor 3}+\cdots\right)\right]$$

$$=\frac{1}{1-x}\left[(e-1)-(e^x-1)\right]=\frac{e-e^x}{1-x}.$$

উদা. 7. x-এর শক্তির আরোহ ক্রমানুসারে $e^{e^{ax}}$-এর বিস্তার কর। (Expand $e^{e^{ax}}$ in ascending powers of x.)

$$e^{e^{ax}}=e^{1+ax+\frac{a^2x^2}{\lfloor 2}+\frac{a^3x^3}{\lfloor 3}+\cdots}=e.e^{ax+\frac{a^2x^2}{\lfloor 2}+\frac{a^3x^3}{\lfloor 3}+\cdots}$$

$$=e.e^z\left(ax+\frac{a^2x^2}{\lfloor 2}+\cdots=z \text{ ধরিয়া}\right)$$

$$=e\left(1+z+\frac{z^2}{\lfloor 2}+\frac{z^3}{\lfloor 3}+\cdots\right)$$

$$=e\left\{1+\left(ax+\frac{a^2x^2}{\lfloor 2}+\frac{a^3x^3}{\lfloor 3}+\cdots\right)+\frac{1}{\lfloor 2}\left(ax+\frac{a^2x^2}{\lfloor 2}+\cdots\right)^2\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\lfloor 3}\left(ax+\frac{a^2x^2}{\lfloor 2}+\cdots\right)^3+\cdots\right\}$$

$$=e(1+ax+a^2x^2+\tfrac{5}{6}a^3x^3+\tfrac{5}{8}a^4x^4+\cdots).$$

উদা. 8. $(a+bx+cx^2)e^{nx}$-এর বিস্তারে x^r-এর সহগ নির্ণয় কর [Find the coefficient of x^r in the expansion of $(a+bx+cx^2)e^{nx}$].

প্রদত্ত রাশিমালা

$$=(a+bx+cx^2)\left(1+nx+\frac{n^2x^2}{\lfloor 2}+\frac{n^3x^3}{\lfloor 3}+\cdots\right.$$

$$\left.+\frac{n^{r-2}x^{r-2}}{\lfloor r-2}+\frac{n^{r-1}x^{r-1}}{\lfloor r-1}+\frac{n^rx^r}{\lfloor r}+\cdots\right)$$

এই গুণফলের x^r-সংবলিত পদ

$$=\frac{a.n^r}{\lfloor r}x^r+\frac{b.n^{r-1}}{\lfloor r-1}x^r+\frac{c.n^{r-2}}{\lfloor r-2}x^r.$$

∴ নির্ণেয় সহগ $=\dfrac{an^r}{\lfloor r}+\dfrac{bn^{r-1}}{\lfloor r-1}+\dfrac{cn^{r-2}}{\lfloor r-2}.$

প্রশ্নমালা 45

প্রমাণ কর যে (Show that),

1. $\left\{1+x+\frac{x^2}{\lfloor 2}+\frac{x^3}{\lfloor 3}+\cdots\right\}\left\{1-x+\frac{x^2}{\lfloor 2}-\frac{x^3}{\lfloor 3}+\cdots\right\}=1.$

2. $\left\{1+\frac{1}{\lfloor 1}+\frac{1}{\lfloor 2}+\frac{1}{\lfloor 3}+\cdots\right\}\left\{1-\frac{1}{\lfloor 1}+\frac{1}{\lfloor 2}-\frac{1}{\lfloor 3}+\cdots\right\}=1.$

3. $\left\{1+\frac{1}{\lfloor 2}+\frac{1}{\lfloor 4}+\cdots\right\}^2-\left\{1+\frac{1}{\lfloor 3}+\frac{1}{\lfloor 5}+\cdots\right\}^2=1.$

4. $\left\{1+\frac{a^2x^2}{\lfloor 2}+\frac{a^4x^4}{\lfloor 4}+\cdots\right\}^2-\left\{ax+\frac{a^3x^3}{\lfloor 3}+\frac{a^5x^5}{\lfloor 5}+\cdots\right\}^2=1.$

5. $\left\{1-\frac{x^2}{\lfloor 2}+\frac{x^4}{\lfloor 4}-\cdots\right\}^2+\left\{x-\frac{x^3}{\lfloor 3}+\frac{x^5}{\lfloor 5}-\cdots\right\}^2=1.$

6. $\dfrac{1+\frac{1}{\lfloor 2}+\frac{1}{\lfloor 4}+\frac{1}{\lfloor 6}+\cdots}{1+\frac{1}{\lfloor 3}+\frac{1}{\lfloor 5}+\frac{1}{\lfloor 7}+\cdots}=\dfrac{e^2+1}{e^2-1}.$

7. $\dfrac{\frac{1}{\lfloor 2}+\frac{1}{\lfloor 4}+\frac{1}{\lfloor 6}+\cdots}{1+\frac{1}{\lfloor 3}+\frac{1}{\lfloor 5}+\cdots}=\dfrac{e-1}{e+1}.$ [C. U. 1934]

8. $x=1+\log_e x+\frac{(\log_e x)^2}{\lfloor 2}+\frac{(\log_e x)^3}{\lfloor 3}+\cdots$

9. $\frac{1}{\lfloor 2}+\frac{3}{\lfloor 4}+\frac{5}{\lfloor 6}+\cdots=e^{-1}.$

10. $1+\frac{1+2}{\lfloor 2}+\frac{1+2+3}{\lfloor 3}+\frac{1+2+3+4}{\lfloor 4}+\cdots=\frac{3}{2}e.$ [C. U. 1935]

11. $1+\frac{3}{\lfloor 1}+\frac{5}{\lfloor 2}+\frac{7}{\lfloor 3}+\frac{9}{\lfloor 4}+\cdots=3e.$

12. $\frac{1^2}{\lfloor 1}+\frac{2^2}{\lfloor 2}+\frac{3^2}{\lfloor 3}+\frac{4^2}{\lfloor 4}+\frac{5^2}{\lfloor 5}+\cdots=2e.$

13. $1+\frac{1+2}{\lfloor 2}+\frac{1+2+2^2}{\lfloor 3}+\frac{1+2+2^2+2^3}{\lfloor 4}+\cdots=e^2-e.$

[C. U. 1929]

14. $1+\frac{1+3}{2!}+\frac{1+3+3^2}{3!}+\frac{1+3+3^2+3^3}{4!}+\cdots=\frac{1}{2}e(e^2-1).$

[Madras, 1953]

15. $1+\frac{1+a}{2!}+\frac{1+a+a^2}{3!}+\frac{1+a+a^2+a^3}{4!}+\cdots=\frac{e-e^a}{1-a}.$

16. $1+\dfrac{1+\frac{2^2}{2!}+\frac{2^4}{3!}+\frac{2^6}{4!}+\cdots}{1+\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{2^2}{4!}+\cdots}=e^2.$

17. $\dfrac{1+\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{2^2}{4!}+\frac{2^3}{5!}+\cdots}{1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{6!}+\cdots}=\frac{e}{2}.$

18. $\frac{1^2.2^2}{1!}+\frac{2^2.3^2}{2!}+\frac{3^2.4^2}{3!}+\cdots=27e.$ [Andhra, 1953]

19. $\frac{1^3}{1!}+\frac{2^3}{2!}+\frac{3^3}{3!}+\frac{4^3}{4!}+\cdots=5e.$ [C. U. 1939]

20. $\frac{1}{1.3}+\frac{1}{1.2.3.5}+\frac{1}{1.2.3.4.5.7}+\cdots=e^{-1}.$

21. e-এর মাধ্যমে নিম্নলিখিত রাশিমালার মান প্রকাশ কর (Express in terms of e) :

(a) $\left(1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots\right)\left(1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\cdots\right).$ [C. U. 1922, '38]

(b) $\left(\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\cdots\right)\left(1+\frac{2}{3!}+\frac{3}{5!}+\frac{4}{7!}+\cdots\right).$

(c) $(3^3-2^3)+\frac{1}{2!}(3^6-2^6)+\frac{1}{3!}(3^9-2^9)+\cdots$

22. যে অসীম শ্রেণীটির $(r+1)$-তম পদ $\frac{(r+1)}{r!}$, দেখাও যে উহার সমষ্টি $=15e$.

[Show that the sum to infinity of the series whose $(r+1)$th term is $\frac{(r+1)^3}{r!}$ is $15e$].

নিম্নলিখিত শ্রেণীসমূহের অসীম পদ পর্যন্ত সমষ্টি নির্ণয় কর (Sum to infinity the following series) :

23. $\frac{1.2}{1!}+\frac{2.3}{2!}+\frac{3.4}{3!}+\cdots$ [Gauhati, 1948]

24. $1.3+\frac{2.4}{1.2}+\frac{3.5}{1.2.3}+\frac{4.6}{1.2.3.4}+\cdots$

25. $\frac{2.3}{\underline{|3}}+\frac{3.5}{\underline{|4}}+\frac{4.7}{\underline{|5}}+\frac{5.9}{\underline{|6}}+\cdots$ [Mysore, 1952]

26. $\frac{1}{\underline{|1}}+\frac{1+3}{\underline{|2}}+\frac{1+3+5}{\underline{|3}}+\cdots$

27. $\frac{9}{\underline{|1}}+\frac{19}{\underline{|2}}+\frac{35}{\underline{|3}}+\frac{57}{\underline{|4}}+\frac{85}{\underline{|5}}+\cdots$

28. $\frac{1.4}{\underline{|0}}+\frac{2.5}{\underline{|1}}+\frac{3.6}{\underline{|2}}+\frac{4.7}{\underline{|3}}+\frac{5.8}{\underline{|4}}+\cdots$

29. $(e^x-1)^2$-এর বিস্তারে x^4-এর সহগ নির্ণয় কর। [Find the coefficient of x^4 in the expansion of $(e^x-1)^2$].

30. x-এর ঘাতের আরোহক্রমে $\frac{e^{5x}+e^x}{e^{3x}}$-এর বিস্তার কর। (Expand $\frac{e^{5x}+e^x}{e^{3x}}$ in a series of ascending powers of x).

31. $\frac{x+1}{\underline{|1}}+\frac{(x+1)^2}{\underline{|2}}+\frac{(x+1)^3}{\underline{|3}}+\cdots$-তে x^r-এর সহগ নির্ণয় কর। (Find the coefficient of x^r in $\frac{x+1}{\underline{|1}}+\frac{(x+1)^2}{\underline{|2}}+\frac{(x+1)^3}{\underline{|3}}$).

32. $\frac{a-ax-x^2}{e^x}$-এর বিস্তারে x^r-এর সহগ নির্ণয় কর। (Find the coefficient of x^r in the expansion of $\frac{a-ax-x^2}{e^x}$).

33. (*a*) $(1+x+x^2)e^{-x}$. [C. U., 1915] (*b*) $\frac{a+bx+cx^2}{e^x}$.

(*c*) $\sqrt{\frac{4x^2-12x+9}{e^x}}$. —ইহাদের বিস্তারে x^n-এর সহগ নির্ণয় কর। (Find the coefficient of x^n in the above expansions).

34. n একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হইলে, দেখাও যে n যুগ্ম বা অযুগ্ম হইলে,

$$1+\frac{1+x^2}{\underline{|1}}+\frac{(1+x^2)^2}{\underline{|2}}+\frac{(1+x^2)^3}{\underline{|3}}+\cdots$$-তে x^n-এর সহগ $=\frac{e}{\underline{|\frac{n}{2}}}$, অথবা 0.

[Show that the coefficient of x^n in $1+\frac{1+x^2}{\lfloor 1}+\frac{(1+x^2)^2}{\lfloor 2}+\frac{(1+x^2)^3}{\lfloor 3}+\cdots$ where n is a positive integer, is $\frac{e}{\lfloor \frac{n}{2}}$, or, 0, according as n is even or odd.]

35. (a) $z^2=1+e+\frac{z^2}{\lfloor 2}+\frac{z^3}{\lfloor 3}+\cdots$, এবং z কাল্পনিক রাশি ধরিয়া x-এর ঘাতের আরোহক্রমে

(i) $\frac{1}{2}(e^{ix}+e^{-ix})$ এবং (ii) $\frac{1}{2i}(e^{ix}-e^{-ix})$-এর বিস্তার কর।

(b) যদি $a=1+\frac{x^3}{\lfloor 3}+\frac{x^6}{\lfloor 6}+\cdots$, $b=x+\frac{x^4}{\lfloor 4}+\frac{x^7}{\lfloor 7}+\cdots$,

$$c=\frac{x^2}{\lfloor 2}+\frac{x^5}{\lfloor 5}+\frac{x^8}{\lfloor 8}+\cdots,$$

দেখাও যে, $a^3+b^3+c^3-3abc=1$.

36. x-এর ঘাতের আরোহক্রম বিস্তার কর (Expand in ascending powers of x) :

(i) $\left(1-x+\frac{x^2}{\lfloor 2}-\frac{x^3}{\lfloor 3}+\cdots\right)^2$. (ii) $\left(x-\frac{x^2}{\lfloor 2}+\frac{x^3}{\lfloor 3}-\cdots\right)^2$.

(iii) $\left(x+\frac{x^3}{\lfloor 3}+\frac{x^5}{\lfloor 5}+\cdots\right)^2$.

37. সমষ্টি নির্ণয় কর (Sum the Series) :

$$1+\frac{2^3}{\lfloor 1}x+\frac{3^3}{\lfloor 2}x^2+\frac{4^3}{\lfloor 3}x^3+\cdots$$ [Bombay, 1948]

38. দেখাও যে (Prove that),

$$\frac{2}{\lfloor 1}+\frac{5}{\lfloor 3}+\frac{8}{\lfloor 5}+\cdots=e+\tfrac{1}{2}e^{-1}.$$

39. (a) x-এর ঘাতের আরোহক্রমে x^4 পর্যন্ত e^{e^x}-এর বিস্তার লেখ (Expand e^{e^x} in ascending powers of x upto x^4).

(b) প্রমাণ কর যে, e^{e^x}-এর বিস্তারে x^r-এর সহগ

$$=\frac{1}{\lfloor r}\left[\frac{1^r}{\lfloor 1}+\frac{2^r}{\lfloor 2}+\frac{3^r}{\lfloor 3}+\cdots\right]$$ [C. U. 1938]

অতএব, প্রমাণ কর যে,

$$\frac{1^4}{\lfloor 1} + \frac{2^4}{\lfloor 2} + \frac{3^4}{\lfloor 3} + \cdots = 15e.$$

40. সূচক উপপাদ্য ও দ্বিপদ উপপাদ্য প্রয়োগ করিয়া প্রমাণ কর যে (Apply the exponential and the binomial theorems to show that),

$$n^n - n(n-1)^n + \frac{n(n-1)}{\lfloor 2}(n-2)^n + \cdots = \lfloor n. \qquad \text{[Poona, 1952]}$$

[$(e^x - 1)^n = (x + \frac{x^2}{\lfloor 2} + \frac{x^3}{\lfloor 3} + \cdots)^n$; স্পষ্টই, বন্ধনী-মধ্যস্থ বিস্তৃতিটির n-তম ঘাতের x^n-এর সহগ $= 1$. এখন, $(e^x - 1)^n$-কে দ্বিপদ উপপাদ্য-সাহায্যে সম্প্রসারিত করিয়া, বিস্তৃতি হইতে x^n-এর সহগ নির্ণয় করিয়া, পূর্বের x^n-এর সহগ 1-এর সহিত সমীত করিতে হইবে।]

ত্রয়োদশ অধ্যায়

লগারিদ্‌ম শ্রেণী

(Logarithmic Series)

13·1. লগারিদ্‌ম শ্রেণী।

$-1 < x \leqslant 1$ হইলে,

$$\log_e(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{r-1}\frac{x^r}{r} + \cdots \quad (1)$$

$\log_e(1+x)$-এর বিস্তৃতি-জ্ঞাপক দক্ষিণপক্ষস্থ শ্রেণীটিকে লগারিদ্‌ম-শ্রেণী (Logarithmic Series) বলে। ইহা একটি অসীম-শ্রেণী; x-এর $-1 < x \leqslant 1$ মানসমূহের জন্যই কেবলমাত্র এই অসীম-শ্রেণীটি $\log_e(1+x)$-এর সমান হয়, অন্যথা নহে; অর্থাৎ কেবলমাত্র x-এর ঐসকল মানের জন্যই (1)-এর দক্ষিণপক্ষস্থ অসীম-শ্রেণীটি অভিসারী হয় এবং তখন উহার সমষ্টি হয় $\log_e(1+x)$.

দ্রষ্টব্য ঃ লগারিদ্‌ম শ্রেণী নির্ণয়-পদ্ধতি পাঠ্যতালিকা বহির্ভূত।

অনুসিদ্ধান্ত 1. (i) $-1 < x \leqslant 1$ হইলে, (1)-এর উভয় পক্ষ সমান বলিয়া, (1)-এর উভয় পক্ষে $x = 1$ লিখিয়া,

$$\log_e 2 = 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \cdots + \frac{(1)^{r-1}}{r} + \cdots$$

(ii) x-এর $-1 < x \leqslant 1$ মানসমূহের জন্য (1)-এর উভয় পক্ষ সমান।

x-এর স্থলে $-x$ লিখিলে, স্পষ্টই x-এর সীমা পরিবর্তিত হইয়া $-1 \leqslant x < 1$ হইবে। অতএব,

$-1 \leqslant x < 1$ হইলে,

$$\log_e(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \cdots - \frac{x^r}{r} - \cdots.$$

অনুসিদ্ধান্ত 2. আমরা জানি, $\log_{10}(1+x) = \log_e(1+x).\log_{10} e$

$$= \frac{\log_e(1+x)}{\log_e 10} \quad [\because \log_e 10 \times \log_{10} e = 1]$$

$\therefore \log_{10}(1+x) = \mu \log_e(1+x)$, $\mu \equiv \dfrac{1}{\log_e 10}$ ধরিয়া,

$$= \mu\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots\right)$$

এইরূপে, $\log_{10}(1-x) = \mu\left(-x - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} - \cdots\right)$.

দ্রষ্টব্য : e নিধান-বিশিষ্ট লগারিদ্‌মকে, লগারিদ্‌মের আবিষ্কর্তা নেপিয়ার (Napier)-এর নামানুসারে, নেপিরীয় (Napierian) লগারিদ্‌ম বলা হয়। এই লগারিদ্‌মগুলিকে প্রাকৃতিক (natural) লগারিদ্‌মও বলে। সাধারণ লগারিদ্‌মে, 10 নিধানরূপে ব্যবহৃত হয়।

দ্বিতীয় অনুসিদ্ধান্ত হইতে দেখা যায়, নেপিরীয় (Napierian) লগারিদ্‌মকে সাধারণ (common) লগারিদ্‌মে পরিবর্তিত করিতে হইলে, নেপিরীয় লগারিদ্‌মকে μ, অর্থাৎ, $\frac{1}{\log_e 10}$ দ্বারা গুণ করিতে হয়। গুণক μ-কে, এই কারণে, সাধারণ লগারিদ্‌মের মডিউল্যাস (modulus) বলা হয়। এই মডিউল্যাসের মান $\frac{1}{2\cdot30258509}$, বা, $\cdot43429448$.

13·2. কতিপয় প্রয়োজনীয় সিদ্ধান্ত।

$-1 < x \leqslant 1$ হইলে, $\log_e(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \quad \cdots\cdots (1)$

$-1 \leqslant x < 1$ হইলে, $\log_e(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \quad \cdots\cdots (2)$

$$\therefore \quad \log_e \frac{1+x}{1-x} = \log_e(1+x) - \log_e(1-x)$$

$$= 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots\right) \quad \cdots\cdots (3)$$

[C. U. 1911]

$-1 < x \leqslant 1$ হইলে, (1) সিদ্ধ হয়, আর, $-1 \leqslant x < 1$ হইলে, (2) সিদ্ধ হয়। অতএব, $-1 < x < 1$ হইলে, অর্থাৎ $|x| < 1$ হইলে, (3) সিদ্ধ হইবে।

(i) যদি $x = \frac{1}{n}$ হয়, তাহা হইলে, $x < 1$ হইলে, $n > 1$ হইবে ; অতএব,

(1) এবং (2)-এ, $x = \frac{1}{n}$ লিখিয়া,

$n > 1$ হইলে, $\log_e\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} - \cdots$

বা, $\log_e(n+1) - \log_e n = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} - \cdots. \quad (4)$

এবং $\log_e\left(1 - \frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3} - \cdots$

$$\text{বা, } \log_e n - \log_e (n-1) = \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + \cdots \qquad (5)$$

(উভয় পক্ষের চিহ্ন পরিবর্তন করিয়া)

(4) এবং (5) যোগ করিয়া, $n > 1$ হইলে,

$$\log_e (n+1) - \log_e (n-1) = 2\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{3n^3} + \frac{1}{5n^5} + \cdots\right) \qquad (6)$$

[C. U. 1946]

(4), (5) এবং (6)-এর দক্ষিণপক্ষস্থ অসীম-শ্রেণীগুলি, n-এর $n>1$ মানসমূহের জন্যই কেবলমাত্র অভিসারী হইবে এবং তখন স্ব স্ব দক্ষিণপক্ষস্থ রাশি উহাদের সমষ্টি হইবে।

দেখা যাইতেছে, কোন সংখ্যার লগারিদ্‌ম দেওয়া থাকিলে, (4) অথবা (5)-এর সাহায্যে, ঐ সংখ্যা অপেক্ষা 1- বড় সংখ্যার লগারিদ্‌ম নির্ণয় করা যায়; আর (6)-এর সাহায্যে, ঐ সংখ্যা অপেক্ষা 2- বড় সংখ্যার লগারিদ্‌ম নির্ণয় করা যায়। এখন (4), (5) এবং (6)-এর দক্ষিণপক্ষস্থ ক্রমক্ষীয়মাণ অভিসারী অসীম-শ্রেণীগুলি অতি মন্থর ভাবে ক্ষীয়মাণ বলিয়া, উহাদের সাহায্যে, কোন সংখ্যার লগারিদ্‌মের কোন নির্দিষ্ট দশমিক স্থান পর্যন্ত শুদ্ধ আসন্ন মান নির্ণয় করিতে হইলে, ঐসকল শ্রেণীর অনেকগুলি পদের প্রয়োজন হয়, এবং সেইজন্য লগারিদ্‌ম-নির্ণয়ে ইহাদের ব্যবহার একটু অসুবিধা-জনক। নিম্নে (7)-এর অসীম-শ্রেণীটি দ্রুত ক্ষীয়মাণ বলিয়া লগারিদ্‌ম-নির্ণয়ে ইহার ব্যবহার (4), (5) বা (6) অপেক্ষা অধিকতর সুবিধাজনক।

(ii) (3)-এ x-এর সীমা হইতেছে $-1 < x < 1$, অর্থাৎ $|x| < 1$;

(3)-এ x-এর স্থলে $\frac{1}{2n+1}$ বসাইলে, $\frac{1}{2n+1}$-এরও সীমা হইবে

$$\left|\frac{1}{2n+1}\right| < 1, \text{ বা, } |2n+1| > 1,$$

$$\text{বা, } 2n+1 > 1 \text{ এবং } 2n+1 < -1,$$

$$\text{বা, } \quad n > 0 \text{ এবং } n < -1.$$

অতএব, (3)-এ, $x = \frac{1}{2n+1}$ বসাইয়া, $n > 0$, বা, < -1 হইলে,

$$\log_e \left(\frac{1 + \frac{1}{2n+1}}{1 - \frac{1}{2n+1}}\right) = 2\left\{\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3(2n+1)^3} + \frac{1}{5(2n+1)^5} + \cdots\right\},$$

বা, $\log_e(n+1) - \log_e n$

$$= 2\left\{\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3(2n+1)^3} + \frac{1}{5(2n+1)^5} + \cdots\right\} \cdots \quad (7)$$

অনুসিদ্ধান্ত। স্পষ্টই, (7) হইতে,

$$\log_{10}(n+1) - \log_{10} n$$
$$= \mu\{\log_e(n+1) - \log_e n\}$$
$$= 2\mu\left[\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3(2n+1)^3} + \frac{1}{5(2n+1)^5} + \cdots\right];$$

আবার (4) হইতে,

$$\log_{10}(n+1) - \log_{10} n$$
$$= \mu\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} - \cdots\right)$$
$$= \frac{\mu}{n} - \frac{\mu}{2n^2} + \frac{\mu}{3n^3} - \cdots \qquad [\text{C. U. 1924}]$$

(iii) (3)-এ x-এর সীমা হইতেছে $|x| < 1$;

(3)-এ $\frac{1+x}{1-x} = \frac{m}{n}$, অর্থাৎ $x = \frac{m-n}{m+n}$ বসাইলে, $\frac{m-n}{m+n}$-এরও সীমা হইবে

$$\left|\frac{m-n}{m+n}\right| < 1, \text{ বা, } \left(\frac{m-n}{m+n}\right)^2 < 1,$$

বা, $\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^2 - 1 < 0$, বা, $\frac{-4mn}{(m+n)^2} < 0$,

বা, $\frac{4mn}{(m+n)^2} > 0$, বা, $mn > 0$,

অর্থাৎ, m এবং n উভয়ই ধনাত্মক, অথবা, উভয়ই ঋণাত্মক হইবে।

অতএব, (3)-এ $\frac{1+x}{1-x} = \frac{m}{n}$, বা, $x = \frac{m-n}{m+n}$ বসাইয়া, $mn > 0$ হইলে,

অর্থাৎ m এবং n উভয়ই ধনাত্মক অথবা উভয়ই ঋণাত্মক হইলে,

$$\log_e \frac{m}{n} = 2\left\{\frac{m-n}{m+n} + \frac{1}{3}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^5 + \cdots\right\} \quad \cdots \quad (8)$$

উদা. 1. দেখাও যে (Show that),

$$\log_e 2-\frac{1}{2}=\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{3.4.5}+\frac{1}{5.6.7}+\cdots \qquad \text{[C. U. 1910]}$$

$-1< x \leqslant 1$ হইলে, $\log_e(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^6}{6}+\cdots$

$\therefore$ উভয় পক্ষে $x=1$ বসাইয়া,

$$\log_e 2=1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{5}-\tfrac{9}{1}+\cdots$$
$$=(1-\tfrac{1}{2})+(\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4})+(\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{6})+\cdots$$
$$=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{5.6}+\cdots \qquad \cdots (1)$$

আবার, $\log_e 2=1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{7}-\cdots$
$$=1-(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{3})-(\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{5})-(\tfrac{1}{6}-\tfrac{1}{7})-\cdots$$
$$=1-\frac{1}{2.3}-\frac{1}{4.5}-\frac{1}{6.7}-\cdots \qquad \cdots (2)$$

$\therefore$ (1) এবং (2) হইতে, যোগ করিয়া,

$$2\log_e 2=1+\left(\frac{1}{1.2}-\frac{1}{2.3}\right)+\left(\frac{1}{3.4}-\frac{1}{4.5}\right)+\left(\frac{1}{5.6}-\frac{1}{6.7}\right)+\cdots$$

বা, $2\log_e 2-1=\frac{2}{1.2.3}+\frac{2}{3.4.5}+\frac{2}{5.6.7}+\cdots$

$\therefore\ \log_e 2-\frac{1}{2}=\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{3.4.5}+\frac{1}{5.6.7}+\cdots$

উদা. 2. মান নির্ণয় কর (Find the values of) :

(i) $\log_e 2$,

(ii) $\log_e 10$,

(iii) $\log_{10} 2$.

অনুচ্ছেদ 13·2-এর (i) (6)-এর উভয় পক্ষে $n=3$ বসাইয়া

$$\log_e 4-\log_e 2=2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3.3^3}+\frac{1}{5.3^5}+\cdots\cdots\right).$$

কিন্তু, $\log_e 4-\log_e 2=\log_e \frac{4}{2}=\log_e 2.$

$$\therefore\ \log_e 2=2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3.3^3}+\frac{1}{5.3^5}+\cdots\cdots\right).$$

এখন, $\frac{2}{3} = \cdot 66666667$

$$\frac{2}{3.3^3} = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3^3} = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{9\times 3} = \cdot 02469136$$

$$\frac{2}{5\cdot 3^5} = \frac{1}{5}\cdot\frac{2}{3^5} = \frac{1}{5}\cdot\frac{2}{9\times 3^3} = \cdot 00164609$$

$$\frac{2}{7.3^7} = \frac{1}{7}\cdot\frac{2}{9\times 3^5} = \cdot 00013064$$

$$\frac{2}{9.3^9} = \frac{1}{9}\cdot\frac{2}{9\times 3^7} = \cdot 00001129$$

$$\frac{2}{11.3^{11}} = \frac{1}{11}\cdot\frac{2}{9\times 3^9} = \cdot 00000103$$

$$\frac{2}{13.3^{13}} = \frac{1}{13}\cdot\frac{2}{9\times 3^{11}} = \cdot 00000009$$

$$\frac{2}{15.3^{15}} = \frac{1}{15}\cdot\frac{2}{9\times 3^{13}} = \cdot 00000001$$

$$\therefore \quad \log_e 2 = \cdot 69314718$$

(ii) (6)-এর উভয় পক্ষে $n = 9$ বসাইয়া,

$$\log_e 10 - \log_e 8 = 2\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{3\times 9^3} + \frac{1}{5\times 9^5} + \frac{1}{7\times 9^7} + \cdots\right).$$

এখন, $\log_e 8 = \log_e (2^3) = 3\times \log_e 2 = 3\times \cdot 693147180$

$$= 2\cdot 079441540.$$

এবং $\frac{2}{9} = \cdot 222222222$

$$\frac{2}{3\cdot 9^3} = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{9^3} = \cdot 000914495$$

$$\frac{2}{5\cdot 9^5} = \frac{1}{5}\cdot\frac{2}{81\times 9^3} = \cdot 000006774$$

$$\frac{2}{7\cdot 9^7} = \frac{1}{7}\cdot\frac{2}{81\times 9^5} = \cdot 000000060$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

$$\therefore \quad \log_e 10 - 2\cdot 079441540 = \cdot 223143551$$

অতএব, $\log_e 10 = 2\cdot 302585091 = 2\cdot 3025851$ (আসন্ন)।

(iii) $$\log_{10} 2 = \frac{\log_e 2}{\log_e 10} = \frac{\cdot 693147180}{2\cdot 302585091} = \cdot 693147180 \times \frac{1}{2\cdot 302585091}$$

$$= \cdot 693147180 \times \cdot 434294412 = \cdot 3010300.$$

দ্রষ্টব্য ঃ উপরের (i)-এ $\log_e 2$-এর কয়েক দশমিক স্থান পর্যন্ত আসন্ন মান নির্ণয় করা হইয়াছে ; এই মানের সাহায্যে (7)-এর উভয় পার্শ্বে $n=2$ বসাইয়া, $\log_e 3$-এর মান নির্ণয় করা যায়। আবার, $\log_e 4 = \log_e 2^2 = 2 \log_e 2$ বলিয়া, $\log_e 2$ হইতেই $\log_e 4$-এর মান নির্ণয় করা যায়। আবার, (7) হইতে, $\log_e 4$-এর সাহায্যে $\log_e 5$, $\log_e 5$-এর সাহায্যে $\log_e 6$, ইত্যাদি নির্ণয় করা যায়। এইরূপে সমস্ত সংখ্যার e নিধান-যুক্ত লগারিদ্‌ম নির্ণয় করা যায়। আবার, এইসকল লগারিদ্‌মের প্রত্যেককে μ, অর্থাৎ $1/\log_e 10$ দ্বারা গুণ করিয়া সংখ্যাসমূহের 10 নিধান-বিশিষ্ট লগারিদ্‌ম নির্ণয় করা যায়।

উদা. 3. x-এর ঘাতের আরোহক্রম অনুসারে $\log_e(1+x+x^2)$-এর বিস্তারে, প্রমাণ কর যে x^n-এর সহগ হয় $\frac{1}{n}$ বা $-\frac{2}{n}$ (n-এর মান 3-এর গুণিতক না হইলে, বা হইলে)। (Show that the coefficient of x^n in the expansion of $\log_e(1+x+x^2)$ in ascending powers of x is $\frac{1}{n}$ or $-\frac{2}{n}$, according as n is not or is a multiple of 3.)

$$\log_e(1+x+x^2) = \log_e \frac{1-x^3}{1-x} = \log_e(1-x^3) - \log_e(1-x) ;$$

এখন, $\log_e(1-x^3) = -x^3 - \frac{1}{2}x^6 - \frac{1}{3}x^9 - \cdots$

এবং, $\log_e(1-x) = -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \cdots$

$$\therefore \quad \log_e(1+x+x^2) = \log_e(1-x^3) - \log_e(1-x)$$
$$= (x + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 + \cdots) - (x^3 + \tfrac{1}{2}x^6 + \tfrac{1}{3}x^9 + \cdots).$$

স্পষ্টই, n, 3-এর কোন গুণিতক না হইলে, x^n-এর সহগ $= \frac{1}{n}$; আর, n, 3-এর গুণিতক হইলে, x^n-এর সহগ

$$= \frac{1}{n} - \frac{1}{\frac{n}{3}}$$

$$= \frac{1}{n} - \frac{3}{n} = -\frac{2}{n}.$$

উদা. 4. যদি $y = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$

দেখাও যে, $x = y + \frac{y^2}{\lfloor 2} + \frac{y^3}{\lfloor 3} + \frac{y^4}{\lfloor 4} + \cdots$ [C. U. 1931]

$$y = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots = \log_e(1+x) ;$$

$$\therefore\quad 1+x=e^y;$$

$$\therefore\quad x=e^y-1=\left(1+y+\frac{y^2}{\lfloor 2}+\frac{y^3}{\lfloor 3}+\frac{y^4}{\lfloor 4}+\cdots\right)-1$$

$$=y+\frac{y^2}{\lfloor 2}+\frac{y^3}{\lfloor 3}+\frac{y^4}{\lfloor 4}+\cdots$$

উদা. 5. যদি α এবং β, $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের বীজ হয়, তবে প্রমাণ কর যে (If α and β are the roots of the equation $ax^2+bx+c=0$, show that),

$$\log_e(a-bx+cx^2)=\log_e a+(\alpha+\beta)x-\left(\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}\right)x^2$$
$$+\left(\frac{\alpha^3+\beta^3}{3}\right)x^3+\cdots$$

α এবং β, $ax^2+bx+c=0$-এর বীজ বলিয়া

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\ \text{এবং}\ \alpha\beta=\frac{c}{a}.$$

$$\text{এখন,}\quad a-bx+cx^2=a\left(1-\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}x^2\right)$$

$$=a\{1+(\alpha+\beta)x+\alpha\beta x^2\}=a(1+\alpha x)(1+\beta x).$$

$$\therefore\quad \log_e(a-bx+cx^2)$$

$$=\log_e a+\log_e(1+\alpha x)+\log_e(1+\beta x)$$

$$=\log_e a+\left\{\alpha x-\frac{\alpha^2x^2}{2}+\frac{\alpha^3x^3}{3}-\cdots\right\}$$
$$+\left\{\beta x-\frac{\beta^2x^2}{2}+\frac{\beta^3x^3}{3}-\cdots\right\}$$

$$=\log_e a+(\alpha+\beta)x-\left(\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}\right)x^2+\left(\frac{\alpha^3+\beta^3}{3}\right)x^3-\cdots.$$

উদা. 6. দেখাও যে (Show that),

$$\log_e(x+2h)=2\log_e(x+h)$$
$$-\log_e x-\left\{\frac{h^2}{(x+h)^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{h^4}{(x+h)^4}+\frac{1}{3}\cdot\frac{h^6}{(x+h)^6}+\cdots\right\}.$$

$$\text{দক্ষিণ পক্ষ}=\log_e(x+h)^2-\log_e x+\log_e\left\{1-\frac{h^2}{(x+h)^2}\right\}$$

$$=\log_e\left\{\frac{(x+h)^2}{x}\right\}+\log_e\left\{\frac{x^2+2xh}{(x+h)^2}\right\}$$

$$=\log_e\left\{\frac{(x+h)^2}{x}\times\frac{x(x+2h)}{(x+h)^2}\right\}=\log_e(x+2h).$$

প্রশ্নমালা 46

প্রমাণ কর (Prove that) :

1. $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.2^2}+\frac{1}{3.2^3}+\cdots=\log_e 2.$

2. $\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2.2}+\frac{1}{3^3.3}+\frac{1}{3^4.4}+\cdots=\log_e 3-\log_e 2.$

3. $\frac{a-x}{a}+\frac{1}{2}\left(\frac{a-x}{a}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{a-x}{a}\right)^3+\cdots=\log_e a-\log_e x.$

4. $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2(n+1)^2}+\frac{1}{3(n+1)^3}+\cdots=\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}-\cdots$ [C. U. 1914, 1945]

5. $\log_e(1+x^2)=2\{\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{6}x^6-\cdots\}.$

6. $-2\left(\frac{1}{2.2^2}+\frac{1}{4.2^4}+\frac{1}{6.2^6}+\cdots\right)=\log_e 3-2\log_e 2.$

7. $\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{7}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{8^2}+\frac{1}{7^2}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{8^3}-\frac{1}{7^3}\right)+\cdots=0.$

8. $\log_e m-\log_e n=2\left[\frac{m-n}{m+n}+\frac{1}{3}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^5+\cdots\right].$

9. $\log_e m=2\left\{\frac{m-1}{m+1}+\frac{1}{3}\left(\frac{m-1}{m+1}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{m-1}{m+1}\right)^5+\cdots\right\}$ [C. U. 1932]

10. $\frac{1}{2.3}+\frac{1}{4.5}+\frac{1}{6.7}+\cdots=1-\log_e 2.$ [C. U. 1913, 40]

11. $\frac{x-1}{x+1}+\frac{x^2-1}{2(x+1)^2}+\frac{x^3-1}{3(x+1)^3}+\cdots=\log_e x.$ [Madras, 1954]

12. $\log\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1-\frac{1}{1.2(n+1)}-\frac{1}{2.3(n+1)^2}-\frac{1}{3.4(n+1)^3}-\cdots$

13. (a) $2\log_e x-\log_e(x+1)-\log_e(x-1)$
$$=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{2.x^4}+\frac{1}{3.x^6}+\cdots$$ [Agra, 1941]

(b) $\frac{1}{1.2}-\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}-\frac{1}{4.5}+\cdots=\log_e\frac{4}{e}$ [Andhra, 1950]

14. $\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4^3}+\frac{1}{6^3}+\frac{1}{8^3}\right)+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{4^5}+\frac{1}{6^5}+\frac{1}{8^5}\right)$
$$+\cdots=\log_e\sqrt{3}.$$

15. x-এর ঘাত অনুসারে $\log_e(1+x+x^2+x^3)$-এর বিস্তার কর এবং x^{2n} এবং x^{2n+1}-এর সহগ নির্ণয় কর।

[Expand $\log_e(1+x+x^2+x^3)$ in powers of x, and find the co-efficient of x^{2n} and x^{2n+1}.]. [C. U. 1947]

16. যদি $\log_e \dfrac{1}{1-x-x^2+x^3}$ রাশিটি x-এর আরোহক্রম ঘাত অনুসারে বিস্তৃত হয়, তবে দেখাও যে, n যুগ্ম বা অযুগ্ম অনুসারে x^n-এর সহগ $\dfrac{3}{n}$ বা $\dfrac{1}{n}$.

17. যদি $\log_e \dfrac{1}{1+x+x^2+x^3}$ রাশিটি x-এর ঊর্ধ্বক্রমে একটি শ্রেণীতে বিস্তৃত হয়, তবে দেখাও যে, n যদি 4-এর গুণিতক হয়, তবে x^n-এর সহগ $\dfrac{3}{n}$ এবং n যদি 4-এর গুণিতক না হয়, তবে x^n-এর সহগ $-\dfrac{1}{n}$ হইবে।

18. বিস্তার কর : $\log_e \dfrac{1+x+x^2}{1-x+x^2}$.

19. (a) x-এর ঊর্ধ্বক্রমে $\log_e (1+x+x^2+x^3+\cdots)$-এর বিস্তার কর এবং দেখাও যে, x^n-এর সহগ $= \dfrac{1}{n}$.

(b) যখন $|x| < 1$, তখন x-এর ঊর্ধ্বক্রমে $\log_e (1+3x+6x^2+10x^3 + \cdots)$-এর বিস্তার কর এবং দেখাও যে, x^n-এর সহগ $= \dfrac{3}{n}$.

20. x-এর অধঃক্রমে $\log_e \{x^2+(a+b)x+ab\} - 2\log_e x$-এর বিস্তার নির্ণয় কর। [C. U. 1912]

অসীম পর্যন্ত নিম্নলিখিত শ্রেণীগুলির সমষ্টি নির্ণয় কর (Sum to infinity the following series) :

21. $\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2.2^2} + \dfrac{1}{3.2^3} - \dfrac{1}{4.2^4} + \cdots$ [C. U. 1953]

22. $\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{9}x^9 + \frac{1}{12}x^{12} + \cdots (x^3 < 1)$.

23. $2\left(\dfrac{1}{7} + \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{7^3} + \dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{1}{7^5} + \cdots\right)$. [Annamalai, 1949]

24. $1 + \dfrac{1}{3.2^2} + \dfrac{1}{5.2^4} + \dfrac{1}{7.2^6} + \cdots$ [C. U. 1943]

25. $1 + \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{1}{3^4} + \dfrac{1}{7}\cdot\dfrac{1}{3^6} + \cdots$ [C. U. 1949]

26. $\dfrac{x^2}{1.2} + \dfrac{x^3}{2.3} + \dfrac{x^4}{3.4} + \cdots$

27. $\frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{4}x^4 + \cdots (|x| < |1)$ [C. U. 1944]

28. $1 + \frac{2}{1.2.3} + \frac{2}{3.4.5} + \frac{2}{5.6.7} + \cdots$

29. $\frac{5}{1.2.3} + \frac{7}{3.4.5} + \frac{9}{5.6.7} + \cdots$ [C. U. 1958]

মান নির্ণয় কর (Find the value of the following) :

30. $(1+3)\log_e 3 + \frac{1+3^2}{\lfloor 2}(\log_e 3)^2 + \frac{1+3^3}{\lfloor 3}(\log_e 3)^3 + \cdots$

31. যদি $x^2 - px + q = 0$ সমীকরণটির বীজ α ও β হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর (If α and β the roots of $x^2 - px + q = 0$, show that) :

$$-\log_e (1 - px + qx^2) = (\alpha+\beta)x + \tfrac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2)x^2 + \tfrac{1}{3}(\alpha^3+\beta^3)x^3 + \cdots$$
$$+ \frac{1}{n}(\alpha^n + \beta^n)\, x^n + \cdots.$$

32. $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণটির বীজ α ও β হইলে, প্রমাণ কর যে (If α, β be the roots of the equation $ax^2 + bx + c = 0$, prove that),

$$\log_e(ax^2 + bx + c) = \log_e a + 2\log_e x - \frac{1}{x}(\alpha+\beta)$$
$$-\frac{1}{2x^2}(\alpha^2+\beta^2) - \frac{1}{3x^3}(\alpha^3+\beta^3) - \cdots$$

33. যদি (a) $y = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots$, দেখাও যে,

$$x = 1 - e^{-y}$$
$$= y - \frac{y^2}{\lfloor 2} + \frac{y^3}{\lfloor 3} - \frac{y^4}{\lfloor 4} + \cdots$$ [C. U. 1950]

(b) যদি $y = 1 - x + \frac{x^2}{\lfloor 2} - \frac{x^3}{\lfloor 3} + \cdots$

এবং $z = -y - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} - \cdots$,

দেখাও যে,

$$x = \log_e \frac{1}{1 - e^z}$$ [C. U. 1951]

34. যদি $x^2 y = 2x - y$ এবং $x < 1$, দেখাও যে,

$$y + \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} + \cdots = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots\right).$$

ত্রিকোণমিতি

প্রথম অধ্যায়
কোণ-পরিমাণ

1·1. ত্রিকোণমিতির বিচারে কোণ : মাধ্যমিক স্তরে ত্রিকোণমিতির বিচারে কোণের ধারণা দেওয়া হইয়াছে। একটি নির্দিষ্ট রেখার একটি প্রান্তবিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া যখন একটি খণ্ডরেখা ঘড়ির কাঁটার বিপরীত মুখে আবর্তিত হয়, তখন **ধনাত্মক** এবং যখন ঘড়ির কাঁটার মুখে আবর্তিত হয়, তখন ঋণাত্মক কোণ উৎপন্ন হয়।

কোণ-পরিমাণ নির্ণয়ের জন্য ষষ্টিমূলক (sexagesimal), শতমূলক (centesimal) ও বৃত্তীয় (circular), এই তিন প্রকার পদ্ধতি রহিয়াছে। মাধ্যমিক স্তরেই আলোচিত হইয়াছে যে, কোণের একক ষষ্টিমূলক পদ্ধতিতে 1° (এক ডিগ্রী), শতমূলক পদ্ধতিতে 1^g (এক গ্রেড) এবং বৃত্তীয় মানে 1^c (এক রেডিয়ান)।

1·2. ডিগ্রী : ষষ্টিমূলক মানে কোণের বৃহত্তম একক 1 সমকোণ। 1 সমকোণ = 90 ডিগ্রী (90°); 1 ডিগ্রী (1°) = 60 মিনিট $(60')$; এবং 1 মিনিট $(1')$ = 60 সেকেণ্ড $(60'')$।

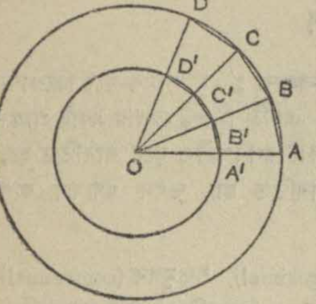
1·3. রেডিয়ান : বৃত্তীয় মানে, যে-কোন বৃত্তের কেন্দ্রে ঐ বৃত্তের ব্যাসার্ধের সমান একটি চাপ যে পরিমাণ কোণ উৎপন্ন করে তাহাকেই কোণের একক ধরা হয় এবং তাহাকে বলা হয় এক রেডিয়ান।

বিভিন্ন বৃত্তের ব্যাসার্ধ অবশ্যই বিভিন্ন। কিন্তু যে-কোন বৃত্তের কেন্দ্রে উহার ব্যাসার্ধের সমান চাপ সর্বদাই এক রেডিয়ান পরিমাণ কোণ উৎপন্ন করে। কাজেই প্রশ্ন উঠে রেডিয়ানের মান কি ধ্রুবক? এই প্রশ্নের উত্তর পাইতে হইলে নিচের উপপাদ্যটি জানা দরকার।

1·4. প্রত্যেক বৃত্তের পরিধি ও ব্যাসার্ধের অনুপাত ধ্রুবক।

O বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া যে-কোন দুইটি বৃত্ত অঙ্কিত হইল। ইহাদের মধ্যে বৃহত্তর বৃত্তটিতে ABCD··· সুষম বহুভুজটি অন্তর্লিখিত হইল। $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$, $\overline{OD}$ প্রভৃতি ব্যাসার্ধ রেখাগুলি ক্ষুদ্রতর বৃত্তটিকে যেন A′, B′, C′, D′ প্রভৃতি বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। এখন A′ ও B′, B′ ও C′, C′ ও D′··· প্রভৃতি যুক্ত করিলে A′B′C′D′··· নামাঙ্কিত যে বহুভুজটি পাওয়া যায় তাহাও জ্যামিতিক নিয়মে অবশ্য সুষম হইবে এবং ABCD··· বহুভুজের বাহু-সংখ্যা n ধরিলে A′B′C′D′··· বহুভুজের বাহু-সংখ্যাও n হইবে। এইবার

দেখা যায়, OAB এবং OA′B′ ত্রিভুজ-দুইটির মধ্যে $\angle AOB = \angle A'OB'$ (সাধারণ কোণ) এবং $\frac{OA'}{OA} = \frac{OB}{OB'}$, [∵ OA = OB এবং OA′ = OB′.]



অতএব, OAB ও OA′B′ ত্রিভুজ-দুইটি সদৃশ।

$$\therefore \quad \frac{OA}{OA'} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{n.\ AB}{n.\ A'B'}$$

$$= \frac{\text{ABCD}\cdots\text{বহুভুজের পরিসীমা}}{\text{A}'\text{B}'\text{C}'\text{D}'\cdots\text{বহুভুজের পরিসীমা}}$$

[কারণ, বহুভুজ-দুইটির প্রত্যেকটি সুষম ও উহাদের প্রত্যেকটির বাহু-সংখ্যা n.]

ইহা হইতে স্পষ্টই বুঝা যায় যে, n-এর মান যতই বাড়িবে, বহুভুজ-দুইটির প্রত্যেক বাহুর মান ততই কমিবে এবং তাহার ফলে একদিকে A, B, C, D··· প্রভৃতি কৌণিক বিন্দুগুলি যেমন পরস্পরের কাছাকাছি আসিয়া পড়িবে, তেমনি A′, B′, C′, D′··· প্রভৃতি কৌণিক বিন্দুগুলিও পরস্পরের কাছে ঘেঁষিয়া আসিবে। এইভাবে n-এর মান যখন সীমাতীত পরিমাণ বাড়িয়া যাইবে তখন প্রত্যেকটি বহুভুজের কৌণিক বিন্দুগুলি সংশ্লিষ্ট বৃত্তের উপরিস্থ পাশাপাশি বিন্দুগুলির সহিত এমনভাবে মিলিয়া যাইবে যে, অন্তিমে উহাদের প্রত্যেকটির পরিসীমা উহার সংশ্লিষ্ট বৃত্তের পরিধির সহিত সম্পূর্ণরূপে মিলিয়া যাইবে।

$$\text{সেক্ষেত্রে, } \frac{OA}{OA'} = \frac{\text{ABCD}\cdots\text{ পরিসীমা}}{\text{A}'\text{B}'\text{C}'\text{D}'\cdots\text{ পরিসীমা}} = \frac{\text{বৃহত্তর বৃত্তের পরিধি}}{\text{ক্ষুদ্রতর বৃত্তের পরিধি}},$$

$$\text{অথবা, } \frac{\text{বৃহত্তর বৃত্তের পরিধি}}{\text{OA (বৃহত্তর বৃত্তের ব্যাসার্ধ)}} = \frac{\text{ক্ষুদ্রতর বৃত্তের পরিধি}}{\text{OA}' \text{ (ক্ষুদ্রতর বৃত্তের ব্যাসার্ধ)}}।$$

$$\therefore \frac{\textbf{যে কোন বৃত্তের পরিধি}}{\textbf{ঐ বৃত্তের ব্যাসার্ধ}} = \textbf{একটি ধ্রুবক সংখ্যা।}$$

উপরোক্ত ধ্রুবক সংখ্যাটি গ্রীক্ অক্ষর π (পাই) দ্বারা সূচিত হয়।

দ্রষ্টব্য ঃ উচ্চতর গণিতের পদ্ধতিতে এই π-এর মান নির্ণীত হইয়াছে। আসন্ন মানে

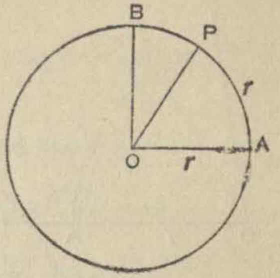
$$\pi = \frac{22}{7} = 3{\cdot}14159.$$

অনুসিদ্ধান্ত ঃ একটি বৃত্তের ব্যাসাধ r হইলে,

$$\frac{\text{ঐ বৃত্তের পরিধি}}{r} = \pi; \quad \therefore \quad \textbf{বৃত্তের পরিধি} = 2\pi r.$$

1·5. রেডিয়ানের ধ্রুবকত্ব।

O বিন্দুকে কেন্দ্র ধরিয়া অঙ্কিত বৃত্তে $\overline{OA}$ এবং $\overline{OB}$ যেন উহার যে-কোন দুইটি পরস্পর-লম্ব ব্যাসার্ধ। তাহা হইলে ∠AOB এক সমকোণ বলিয়া, চাপ AB ঐ বৃত্তের পরিধির এক-চতুর্থাংশ হইবে। সুতরাং, r ঐ বৃত্তের ব্যাসার্ধ হইলে,



$$\text{চাপ } AB = \tfrac{1}{4}.2\pi r = \frac{\pi r}{2}.$$

আবার, AP চাপটি, যেন, ব্যাসার্ধ r-এর সমান। তাহা হইলে সংজ্ঞানুসারে, ∠AOP কোণটি এক রেডিয়ান। এখন জ্যামিতি হইতে জানা যায় যে,

$$\frac{\angle AOP}{\angle AOB} = \frac{\text{চাপ } AP}{\text{চাপ } AB} = \frac{r}{\frac{\pi r}{2}} = \frac{2}{\pi}.$$

$$\therefore \quad \angle AOP = \frac{2}{\pi} \times \angle AOB\,;$$

অর্থাৎ, এক রেডিয়ান = $\frac{2}{\pi}$ × এক সমকোণ।

এখন সমকোণ একটি ধ্রুবক-কোণ, ও π একটি ধ্রুবক-সংখ্যা বলিয়া উপরিলিখিত সম্বন্ধ হইতে স্পষ্টই বুঝা যায় যে, রেডিয়ানও একটি ধ্রুবক-কোণ হইবে; অর্থাৎ, যে-কোন বৃত্তের সম্পর্কেই ইহাকে অঙ্কিত করা যাক না কেন, ইহার মান সকল সময় একই থাকিবে।

1·6. রেডিয়ানের ষষ্টিমূলক মান।

এক রেডিয়ান = $\frac{2}{\pi}$ × এক সমকোণ = $\frac{2}{\pi} \times 90° = \frac{180°}{\pi}$

$= 180° \times {\cdot}3183098862\cdots = (57{\cdot}2957795)°$

$= 57°\ 17'\ 44{\cdot}8''$ (প্রায়)।

1·7. যেহেতু এক রেডিয়ান = $\frac{2}{\pi}$ × এক সমকোণ,

অতএব, $90°$ = এক সমকোণ = $\frac{\pi}{2}$ রেডিয়ান ;

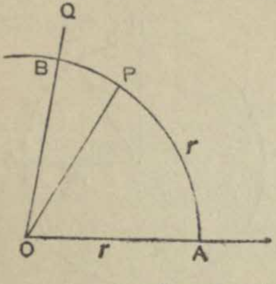
$180°$ = দুই সমকোণ = π রেডিয়ান ;

$360°$ = চারি সমকোণ = 2π রেডিয়ান।

এক রেডিয়ানকে সাধারণতঃ 1^c এই প্রতীকটি দ্বারা সূচিত করা হয়।

1·8. কোণের বৃত্তমূলক মান নির্ণয়।

$\angle XOQ$ যে-কোন একটি কোণ। উহার বৃত্তমূলক মান নির্ণয় করিতে হইবে।



O-কে কেন্দ্র করিয়া এবং যে-কোন এক ব্যাসার্ধ r লইয়া অঙ্কিত একটি বৃত্তচাপ OX-কে যেন A বিন্দুতে এবং OQ-কে B বিন্দুতে কাটিল।

আবার, ঐ বৃত্তের ব্যাসার্ধ r-এর সমান করিয়া অন্য একটি চাপ AP চিহ্নিত হইল। O এবং P যুক্ত করিলে, উৎপন্ন $\angle AOP$ কোণটি এক রেডিয়ান।

এখন, $\dfrac{\angle AOB}{\angle AOP} = \dfrac{\text{চাপ } AB}{\text{চাপ } AP} = \dfrac{\text{চাপ } AB}{r}.$

$$\therefore \quad \angle AOB = \frac{\text{চাপ } AB}{r} \cdot \angle AOP = \frac{\text{চাপ } AB}{r} \cdot \text{ রেডিয়ান।}$$

সুতরাং, $\angle AOB$-এর বৃত্তমূলক মান $= \dfrac{\text{চাপ } AB}{r}.$

অতএব, s-একক দীর্ঘ একটি বৃত্তচাপ যদি উহার কেন্দ্রে θ রেডিয়ান কোণ উৎপন্ন করে এবং ঐ বৃত্তের ব্যাসার্ধ যদি r-একক দীর্ঘ হয়, তবে,

$$\theta = \frac{s}{r}.$$

1·9. বিভিন্ন কোণ-মানের পরস্পর সম্পর্ক।

পূর্বেই জানা গিয়াছে যে,

$90° =$ এক সমকোণ ; অতএব, $180° =$ দুই সমকোণ ;

এবং π^c (অথবা, সংক্ষেপে শুধু π) $=$ দুই সমকোণ ;

$$\therefore \quad \mathbf{180° = \pi^c}.$$

$\therefore\ 1° = \left(\dfrac{\pi}{180}\right)^c$, আবার, $1^c = \left(\dfrac{180}{\pi}\right)°$,

অতএব, $x° = \left(\dfrac{\pi x}{180}\right)^c$; $\qquad x^c = \left(\dfrac{180x}{\pi}\right)°.$

উদাহরণমালা

উদা. 1. $40°\,15'\,36''$-কে রেডিয়ানে প্রকাশ কর।

এখন $40°\,15'\,36'' = 40°(15\tfrac{36}{60})' = 40°(15\tfrac{3}{5})' = 40°(\tfrac{78}{5})'$

$$= \left(40\frac{78}{5 \times 60}\right)° = (40{\cdot}26)° = \left(\frac{40{\cdot}26 \times \pi}{180}\right)^c$$

$$= \left(\frac{40\cdot26 \times 22}{180 \times 7}\right)^{\circ} \text{ (প্রায়)}$$
$$= \cdot703 \text{ রেডিয়ান (প্রায়)।}$$

উদা. 2. কোন সমকোণী ত্রিভুজের সূক্ষ্মকোণদ্বয়ের অন্তর $\frac{\pi}{6}$ রেডিয়ান সূক্ষ্মকোণদ্বয়ের মান ডিগ্রীতে প্রকাশ কর।

সমকোণী ত্রিভুজের সূক্ষ্মকোণদ্বয়ের যোগফল = এক সমকোণ = 90°.

সূক্ষ্মকোণদ্বয়ের প্রদত্ত অন্তরফল = $\frac{\pi}{6}$ রেডিয়ান = $\left(\frac{\pi}{6} \times \frac{180}{\pi}\right)^{\circ} = 30^{\circ}$.

$\therefore$ যদি সূক্ষ্মকোণদ্বয়ের ডিগ্রী-মান x ও y, এবং যদি $x > y$ হয়, তবে

$$x + y = 90^{\circ} \text{ এবং } x - y = 30^{\circ}.$$

যোগ করিয়া, $2x = 120^{\circ}$. $\therefore$ $x = 60^{\circ}$. $\therefore$ $y = 30^{\circ}$.

কাজেই সূক্ষ্মকোণদ্বয়ের নির্ণেয় মান যথাক্রমে 60° ও 30°.

উদা. 3. একটি ত্রিভুজের কোণগুলি এইরূপ যে বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম কোণ-দুইটির সমষ্টি অবশিষ্ট কোণটির দ্বিগুণ, এবং ক্ষুদ্রতম কোণের ডিগ্রীর সংখ্যা এবং বৃহত্তম কোণের রেডিয়ানের সংখ্যার অনুপাত $90 : \pi$. ত্রিভুজটির কোণগুলির মান ডিগ্রীতে নির্ণয় কর।

কোণ-তিনটি যথাক্রমে যেন A°, B°, C°.

$\therefore$ $A^{\circ} + C^{\circ} = 2B^{\circ}$.

$\because$ $A^{\circ} + B^{\circ} + C^{\circ} = 3B^{\circ}$, $\therefore$ $3B^{\circ} = 180^{\circ}$; $\therefore$ $B = 60^{\circ}$.

$\therefore$ $A + C = 120^{\circ}$. ... ... (1)

আবার, A বৃহত্তম এবং C ক্ষুদ্রতম কোণ হইলে, $A^{\circ} = \frac{\pi}{180}A$ রেডিয়ান।

$$\therefore \quad \frac{C}{\frac{\pi}{180}A} = \frac{90}{\pi}, \text{ বা } \frac{C}{A} = \frac{90}{\pi} \times \frac{\pi}{180} = \frac{1}{2}; \qquad \therefore \quad A = 2C.$$

$\therefore$ (1) হইতে, $3C = 120^{\circ}$; $\therefore$ $C = 40^{\circ}$ এবং $A = 80^{\circ}$;

$\therefore$ কোণত্রয় 80°, 60°, 40°.

উদা. 4. 10 সেন্টিমিটার ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তে যে বৃত্তচাপ কেন্দ্রে $33^{\circ}\,15'$ কোণ উৎপন্ন করে, তাহার দৈর্ঘ্য কত?

মনে কর, নির্ণেয় দৈর্ঘ্য = x সেমি.।

$\therefore$ $\frac{x}{10} = 33^{\circ}\,15'$ কোণের বৃত্তমূলক মান $= \frac{33\frac{1}{4}}{180}\pi$ রেডিয়ান $= \frac{133}{720}\pi$ রেডিয়ান;

$\therefore$ $x = \frac{133}{72}\pi$ সেমি. $= \frac{133}{72} \times \frac{22}{7}$ সেমি. (প্রায়) $= 5\frac{29}{36}$ সেমি. (প্রায়)।

প্রশ্নমালা 1

1. (*a*) নিম্নলিখিত কোণগুলি ডিগ্রীতে প্রকাশ কর :

$$\frac{\pi^c}{3}, \frac{4\pi^c}{3}, \frac{4\pi^c}{5}.$$

(*b*) নিম্নলিখিত কোণগুলি রেডিয়ানে প্রকাশ কর :

$$60°, 395°, 110° 30', 175° 45'.$$

2. কোন ত্রিভুজের কোণত্রয়ের অনুপাত 2 : 5 : 3 ; কোণগুলি রেডিয়ানে প্রকাশ কর।

3. দুইটি সুষম বহুভুজের বাহু-সংখ্যার অনুপাত 5 : 4 ; উহাদের কোণগুলির মধ্যে অন্তর 9° ; দেখাও যে, বহুভুজদ্বয়ের বাহু-সংখ্যা 10 এবং 8.

[ইঙ্গিত : সুষম বহুভুজের প্রত্যেকটি কোণ $= \frac{2n-4}{n} \times 90°$; ইত্যাদি ।]

4. একটি সুষম বহুভুজের কোণ ও অপর একটি সুষম বহুভুজের কোণের অনুপাত 3 : 2 এবং প্রথম বহুভুজটির বাহু-সংখ্যা দ্বিতীয়টির বাহু-সংখ্যার দুইগুণ। দেখাও যে বহুভুজদ্বয়ের বাহু-সংখ্যা 8 এবং 4.

5. একই দৈর্ঘ্যের চাপ দুইটি বৃত্তের কেন্দ্রে 60° ও 75° কোণ উৎপন্ন করিলে, দেখাও যে, বৃত্তদ্বয়ের ব্যাসার্ধের অনুপাত 5 : 4.

[W. B. S. E. H. S. 1962 Comp.]

6. পৃথিবীতে মানুষের চোখে সূর্য একটি 32′ কোণ উৎপন্ন করে। (পৃথিবী হইতে সূর্যের দূরত্ব 92500000 মাইল ধরিলে) দেখাও যে সূর্যের ব্যাস 862000 মাইল।

[ইঙ্গিত : E, দ্রষ্টার চক্ষুর অবস্থান এবং AB সূর্যের ব্যাস হইলে, AB (= D মাইল)-কে, E কেন্দ্রযুক্ত একটি বৃত্তের ক্ষুদ্র চাপ ধরা যাইতে পারে, যাহার ব্যাসার্ধ পৃথিবী হইতে সূর্যের দূরত্বের সমান।]

7. বৃত্তাকার পথে ঘণ্টায় 10 মাইল বেগে দৌড়াইয়া একজন লোক 36 সেকেণ্ডে কেন্দ্রে 56° কোণ উৎপন্ন করে এরূপ চাপ অতিক্রম করে ; দেখাও যে বৃত্তাকার পথটির ব্যাস 360 গজ। [$\pi = \frac{22}{7}$] [W. B. S. E. S. F. 1958]

8. একটি অশ্ব 27 মিটার দীর্ঘ রজ্জু দ্বারা একটি খুঁটির সহিত বাঁধা। রজ্জুটি সর্বদা টান রাখিয়া অশ্বটি বৃত্তাকার পথে কতদূর চলিলে, কেন্দ্রে 70° পরিমাণ কোণ উৎপন্ন হইবে ?

9. একটি ত্রিভুজের দুইটি কোণের বৃত্তমূলক মান $\frac{1}{2}$ এবং $\frac{1}{3}$. তৃতীয় কোণটির মান ডিগ্রী ও মিনিটে নির্ণয় কর। [W. B. S. E. H. S. 1962]

10. দুইটি কোণের অন্তর 40° ; উহাদের বৃত্তমূলক মানের সমষ্টি $\frac{11}{7}$. $\pi=\frac{22}{7}$ হইলে, ক্ষুদ্রতর কোণটির মান ডিগ্রীতে নির্ণয় কর। [W. B. S. E. S. F. 1960]

11. একটি ত্রিভুজের কোণসমূহ সমান্তর-শ্রেণীভুক্ত ; বৃহত্তম কোণের রেডিয়ান-সংখ্যা এবং ক্ষুদ্রতম কোণের ডিগ্রী-সংখ্যার অনুপাত $\pi:36$. বৃহত্তম কোণটির মান ডিগ্রীতে নির্ণয় কর। [W. B. S. E. S. F. 1959]

12. কোন বৃত্তের ব্যাসার্ধ 10 সেন্টিমিটার। 6 সেন্টিমিটার দীর্ঘ একটি বৃত্তচাপ কেন্দ্রে যে কোণ উৎপন্ন করে, ডিগ্রী ও মিনিটে উহার মান নির্ণয় কর। [$\pi=\frac{22}{7}$]
[W. B. S. E. H. S. 1961]

13. একটি সমকোণী ত্রিভুজের সূক্ষ্মকোণদ্বয়ের অন্তর $\frac{2\pi}{5}$ রেডিয়ান ; এই কোণ-দুইটিকে ডিগ্রীতে প্রকাশ কর। [W. B. S. E. H. S. 1960 Comp.]

14. একটি ত্রিভুজের কোণগুলি সমান্তর-শ্রেণীভুক্ত এবং বৃহত্তর কোণটি ক্ষুদ্র-তরটির দ্বিগুণ ; কোণগুলি রেডিয়ানে প্রকাশ কর। [C. U. 1951]

15. $5\frac{1}{2}$ ফুট দীর্ঘ একজন লোককে অর্ধ মাইল দূর হইতে দেখা যাইতেছে। তিনি সেখানে যে কোণ উৎপন্ন করেন, সে কোণের পরিমাণ কত ?
[W. B. S. E. S. F. 1952]

16. একটি ত্রিভুজের কোণগুলি সমান্তর-শ্রেণীভুক্ত ; ক্ষুদ্রতম কোণের ডিগ্রী-সংখ্যা এবং বৃহত্তম কোণের রেডিয়ান-সংখ্যার অনুপাত $60:\pi$. কোণগুলি ডিগ্রীতে নির্ণয় কর। [W. B. S. E. H. S. 1960]

17. পৃথিবীকে 4,000 মাইল ব্যাসার্ধবিশিষ্ট একটি গোলক ধরিলে, একটি স্থানের 200 মাইল উত্তরে অবস্থিত অপর একটি স্থানের অক্ষাংশের পার্থক্য আসন্নভাবে নির্ণয় কর। [W. B. S. E. S. F. 1955]

দ্বিতীয় অধ্যায়

যৌগিক কোণের ত্রৈকোণমিতিক অনুপাত

(Trigonometrical ratios of Compound angles)

2·1. যৌগিক কোণ : মাধ্যমিক স্তরে সূক্ষ্মকোণের ত্রৈকোণমিতিক অনুপাত সম্বন্ধে বিশদ আলোচনা হইয়াছে। সেই আলোচনার ভিত্তিতে এই অধ্যায়ে যৌগিক কোণের অনুপাত সম্বন্ধে আলোচনা করা যাইতেছে।

$A+B$, $A-B$, $A+B+C$, ইত্যাদির মতো দুইটি বা ততোধিক কোণের যোগফল বা বিয়োগফলকে **যৌগিক কোণ** বলে।

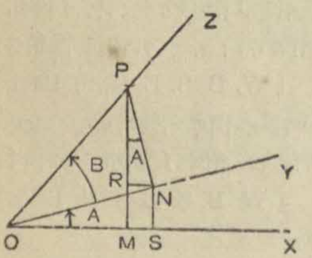
2·2. A এবং B উভয়ই ধনাত্মক কোণ এবং $A+B<90°$ হইলে, প্রমাণ করিতে হইবে যে,

(i) $\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$;

(ii) $\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$;

(iii) $\tan(A+B)=\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$.

একটি ঘূর্ণ্যমান রেখা $\overline{OX}$ হইতে ঘুরিতে আরম্ভ করিয়া $\angle XOY=A$ কোণ এবং $\overline{OY}$ হইতে আরও ঘুরিয়া যেন $\angle YOZ=B$ কোণ উৎপন্ন করিল; তাহা হইলে $\angle XOZ=A+B$ কোণ।



ঘূর্ণ্যমান রেখার অন্তিম অবস্থান $\overline{OZ}$-এর উপর একটি বিন্দু P লওয়া হইল। P হইতে $\overline{OX}$ এবং $\overline{OY}$-এর উপর যথাক্রমে $\overline{PM}$ ও $\overline{PN}$ লম্ব এবং N হইতে $\overline{OX}$ এবং $\overline{PM}$-এর উপর যথাক্রমে $\overline{NS}$ এবং $\overline{NR}$ লম্ব পাতিত করা হইল।

এখন, $\angle NPR=90°-\angle PNR=\angle RNO$ [যেহেতু $\angle PNO=90°$]
$=\angle NOS=$ কোণ A.

$\therefore$ সমকোণী ত্রিভুজ POM হইতে,

(i) $\sin(A+B)=\sin POM$

$$=\frac{PM}{OP}=\frac{RM+PR}{OP}=\frac{NS+PR}{OP}=\frac{NS}{OP}+\frac{PR}{OP}$$

$$=\frac{NS}{ON}\cdot\frac{ON}{OP}+\frac{PR}{PN}\cdot\frac{PN}{OP}$$

$$=\sin A\cos B+\cos NPR\sin B$$

$$=\sin A\cos B+\cos A\sin B.$$

(ii) $\cos(A+B) = \cos POM$

$$= \frac{OM}{OP} = \frac{OS-MS}{OP} = \frac{OS-RN}{OP} = \frac{OS}{OP} - \frac{RN}{OP}$$

$$= \frac{OS}{ON}.\frac{ON}{OP} - \frac{RN}{PN}.\frac{PN}{OP}$$

$$= \cos A \cos B - \sin NPR \sin B$$

$$= \cos A \cos B - \sin A \sin B.$$

(iii) $\tan(A+B) = \frac{PM}{OM} = \frac{RM+PR}{OS-MS} = \frac{NS+PR}{OS-RN}$

$$= \frac{\frac{NS}{OS} + \frac{PR}{OS}}{\frac{OS}{OS} - \frac{RN}{OS}} = \frac{\frac{NS}{OS} + \frac{PR}{OS}}{1 - \frac{RN}{PR}.\frac{PR}{OS}}.$$

এখন, $\frac{NS}{OS} = \tan A$, এবং $\frac{RN}{RP} = \tan A$.

আবার, NOS এবং RPN ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ ;

অতএব, $\frac{PR}{OS} = \frac{PN}{ON} = \tan B$,

$\therefore \quad \tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}.$

অথবা :

$$\tan(A+B) = \frac{\sin(A+B)}{\cos(A+B)}$$

$$= \frac{\sin A \cos B + \cos A \sin B}{\cos A \cos B - \sin A \sin B}$$

[লব এবং হর উভয়কেই $\cos A \cos B$ দ্বারা ভাগ করিয়া]

$$= \frac{\frac{\sin A \cos B}{\cos A \cos B} + \frac{\cos A \sin B}{\cos A \cos B}}{\frac{\cos A \cos B}{\cos A \cos B} - \frac{\sin A \sin B}{\cos A \cos B}}$$

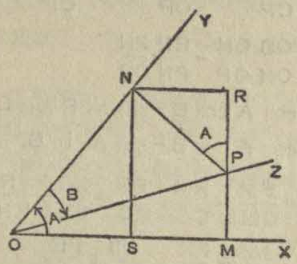
$$= \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}.$$

2·3. A এবং B উভয়ই ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ এবং $A > B$ হইলে, প্রমাণ করিতে হইবে যে,

(i) $\sin(A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$;

(ii) $\cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$;

(iii) $\tan(A-B)=\dfrac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B}$.



একটি ঘূর্ণ্যমান রেখা, $\overline{OX}$ হইতে ঘুরিতে আরম্ভ করিয়া $\angle XOY=A$ কোণ এবং তাহার পর $\overline{OY}$ হইতে বিপরীত দিকে ঘুরিয়া যেন $\angle YOZ=B$ কোণ উৎপন্ন করিল। তাহা হইলে $\angle XOZ=A-B$ কোণ।

ঘূর্ণ্যমান রেখার অন্তিম অবস্থান $\overline{OZ}$-এর উপর একটি বিন্দু P লওয়া হইল। P হইতে $\overline{OX}$ এবং $\overline{OY}$-এর উপর যথাক্রমে $\overline{PM}$ ও $\overline{PN}$ লম্ব এবং N হইতে $\overline{OX}$ এবং বর্ধিত $\overline{MP}$-এর উপর যথাক্রমে $\overline{NS}$ এবং $\overline{NR}$ লম্ব পাতিত করা হইল।

এখন, $\angle RPN=90^\circ-\angle PNR=\angle YNR$ $[\because\ \angle PNY=90^\circ]$

$=\angle XOY=A.$

$\therefore$ সমকোণী ত্রিভুজ POM হইতে,

(i) $\sin(A-B)=\sin POM$

$$=\frac{PM}{OP}=\frac{RM-RP}{OP}=\frac{NS-RP}{OP}=\frac{NS}{OP}-\frac{RP}{OP}$$

$$=\frac{NS}{ON}\cdot\frac{ON}{OP}-\frac{RP}{PN}\cdot\frac{PN}{OP}$$

$$=\sin A\cos B-\cos RPN\sin B$$

$$=\sin A\cos B-\cos A\sin B.$$

(ii) $\cos(A-B)=\cos POM$

$$=\frac{OM}{OP}=\frac{OS+SM}{OP}=\frac{OS+NR}{OP}=\frac{OS}{OP}+\frac{NR}{OP}$$

$$=\frac{OS}{ON}\cdot\frac{ON}{OP}+\frac{NR}{NP}\cdot\frac{NP}{OP}$$

$$=\cos A\cos B+\sin RPN\sin B$$

$$=\cos A\cos B+\sin A\sin B.$$

(iii) $\tan(A-B)=\tan POM$

$$=\frac{PM}{OM}=\frac{RM-PR}{OS+SM}=\frac{NS-PR}{OS+RN}$$

$$=\frac{\frac{NS}{OS}-\frac{PR}{OS}}{\frac{OS}{OS}+\frac{RN}{OS}}=\frac{\frac{NS}{OS}-\frac{PR}{OS}}{1+\frac{RN}{PR}\cdot\frac{PR}{OS}}.$$

এখন, $\frac{NS}{OS}=\tan A,\ \frac{RN}{PR}=\tan A;$

আবার, NOS এবং RPN ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ ;

অতএব, $\frac{PR}{OS}=\frac{PN}{ON}=\tan B.$

$$\therefore\quad \tan(A-B)=\frac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B}.$$

অথবা :

$$\tan(A-B)=\frac{\sin(A-B)}{\cos(A-B)}=\frac{\sin A\cos B-\cos A\sin B}{\cos A\cos B+\sin A\sin B}$$

[লব ও হর উভয়কেই cos A cos B দ্বারা ভাগ করিয়া]

$$=\frac{\frac{\sin A\cos B}{\cos A\cos B}-\frac{\cos A\sin B}{\cos A\cos B}}{\frac{\cos A\cos B}{\cos A\cos B}+\frac{\sin A\sin B}{\cos A\cos B}}$$

$$=\frac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B}.$$

2·4. প্রমাণ করিতে হইবে যে,

(i) $\cot(A+B)=\frac{\cot A\cot B-1}{\cot B+\cot A};$

(ii) $\cot(A-B)=\frac{\cot A\cot B+1}{\cot B-\cot A}.$

(i) $\cot(A+B)=\frac{\cos(A+B)}{\sin(A+B)}=\frac{\cos A\cos B-\sin A\sin B}{\sin A\cos B+\cos A\sin B}$

[লব ও হর উভয়কেই sin A sin B দিয়া ভাগ করিয়া]

$$=\frac{\frac{\cos A\cos B}{\sin A\sin B}-\frac{\sin A\sin B}{\sin A\sin B}}{\frac{\sin A\cos B}{\sin A\sin B}+\frac{\cos A\sin B}{\sin A\sin B}}$$

$$=\frac{\cot A\cot B-1}{\cot B+\cot A}.$$

(ii) $\cot(A-B)=\dfrac{\cos(A-B)}{\sin(A-B)}$

$$=\frac{\cos A\cos B+\sin A\sin B}{\sin A\cos B-\cos A\sin B}$$

[লব ও হর উভয়কেই $\sin A \sin B$ দিয়া ভাগ করিয়া]

$$=\frac{\dfrac{\cos A\cos B}{\sin A\sin B}+\dfrac{\sin A\sin B}{\sin A\sin B}}{\dfrac{\sin A\cos B}{\sin A\sin B}-\dfrac{\cos A\sin B}{\sin A\sin B}}$$

$$=\frac{\cot A\cot B+1}{\cot B-\cot A}.$$

2·5. পূর্ববর্তী 2·1 হইতে 2·4 পর্যন্ত সূত্রাবলী প্রমাণের সময়ে A ও B-কে সূক্ষ্মকোণ বলিয়া ধরা হইয়াছে। প্রকৃতপক্ষে A ও B যে-কোন কোণ হউক-না, ঐ সূত্রাবলী সাধারণভাবে প্রযোজ্য। প্রথম-শিক্ষার্থীর পক্ষে দুরূহ বলিয়া সাধারণ প্রমাণ দেওয়া হইল না।

উদাহরণমালা

উদা. 1. যদি $\sin A=\frac{3}{5}$, $\cos B=\frac{12}{13}$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে,
$\cos(A+B)=\frac{33}{65}$ এবং $\sin(A-B)=\frac{16}{65}$.

$(A<90^\circ,\ B<90^\circ)$

$\cos A=\sqrt{1-\sin^2 A}=\sqrt{1-\frac{9}{25}}=\sqrt{\frac{16}{25}}=\frac{4}{5}$,

এবং $\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\sqrt{1-\frac{144}{169}}=\sqrt{\frac{25}{169}}=\frac{5}{13}$.

$\therefore\ \cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$

$=\frac{4}{5}\cdot\frac{12}{13}-\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{13}=\frac{33}{65}$.

$\sin(A-B)=\sin A\cos B-\cos A\sin B$

$=\frac{3}{5}\cdot\frac{12}{13}-\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{13}=\frac{16}{65}$.

উদা. 2. প্রমাণ কর :

$$\cos(45^\circ-A)-\sin(45^\circ+A)=0.$$

বাম পক্ষ $=\cos 45^\circ\cos A+\sin 45^\circ\sin A$

$-(\sin 45^\circ\cos A+\cos 45^\circ\sin A)$

$$=\frac{1}{\sqrt2}\cos A+\frac{1}{\sqrt2}\sin A-\left(\frac{1}{\sqrt2}\cos A+\frac{1}{\sqrt2}\sin A\right)=0.$$

উদা. 3. sin 75°, cos 75°, tan 75°, sin 15°, cos 15° এবং tan 15°-এর মান নির্ণয় কর।

$$\sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ)$$
$$= \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}.$$

$$\cos 75^\circ = \cos(45^\circ + 30^\circ)$$
$$= \cos 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 45^\circ \sin 30^\circ$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}.$$

$$\tan 75^\circ = \tan(45^\circ + 30^\circ) = \frac{\tan 45^\circ + \tan 30^\circ}{1 - \tan 45^\circ \tan 30^\circ}$$
$$= \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$$
$$= \frac{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = \frac{(\sqrt{3}+1)^2}{3-1}$$
$$= \frac{3+1+2\sqrt{3}}{2} = \frac{4+2\sqrt{3}}{2} = 2 + \sqrt{3}.$$

$$\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ)$$
$$= \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}.$$

$$\cos 15^\circ = \cos(45^\circ - 30^\circ)$$
$$= \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}.$$

$$\tan 15^\circ = \tan(45^\circ - 30^\circ)$$
$$= \frac{\tan 45^\circ - \tan 30^\circ}{1 + \tan 45^\circ \tan 30^\circ}$$
$$= \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \frac{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}$$
$$= \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{3-1} = \frac{3-2\sqrt{3}+1}{2} = \frac{4-2\sqrt{3}}{2} = 2 - \sqrt{3}.$$

উদা. 4. প্রমাণ কর যে,

(i) $\sin(A+B)\sin(A-B)=\sin^2 A-\sin^2 B$
$=\cos^2 B-\cos^2 A.$

(ii) $\cos(A+B)\cos(A-B)=\cos^2 A-\sin^2 B$
$=\cos^2 B-\sin^2 A.$

(i) বাম পক্ষ $=(\sin A\cos B+\cos A\sin B)(\sin A\cos B-\cos A\sin B)$
$=\sin^2 A\cos^2 B-\cos^2 A\sin^2 B$
$=\sin^2 A(1-\sin^2 B)-(1-\sin^2 A)\sin^2 B$
$=\sin^2 A-\sin^2 A\sin^2 B-\sin^2 B+\sin^2 A\sin^2 B$
$=\sin^2 A-\sin^2 B=(1-\cos^2 A)-(1-\cos^2 B)$
$=\cos^2 B-\cos^2 A.$

(ii) বাম পক্ষ $=(\cos A\cos B-\sin A\sin B)(\cos A\cos B+\sin A\sin B)$
$=\cos^2 A\cos^2 B-\sin^2 A\sin^2 B$
$=\cos^2 A(1-\sin^2 B)-(1-\cos^2 A)\sin^2 B$
$=\cos^2 A-\cos^2 A\sin^2 B-\sin^2 B+\cos^2 A\sin^2 B$
$=\cos^2 A-\sin^2 B=(1-\sin^2 A)-(1-\cos^2 B)$
$=1-\sin^2 A-1+\cos^2 B=\cos^2 B-\sin^2 A.$

উদা. 5. প্রমাণ কর যে,

(i) $\tan(45^\circ+A)=\dfrac{1+\tan A}{1-\tan A}$;

(ii) $\tan(45^\circ-A)=\dfrac{1-\tan A}{1+\tan A}.$

(i) বাম পক্ষ $=\dfrac{\tan 45^\circ+\tan A}{1+\tan 45^\circ\tan A}=\dfrac{1+\tan A}{1-\tan A}.$

(ii) বাম পক্ষ $=\dfrac{\tan 45^\circ-\tan A}{1+\tan 45^\circ\tan A}=\dfrac{1-\tan A}{1+\tan A}.$

উদা. 6. প্রমাণ কর যে, $\cot\theta-\cot 2\theta=\operatorname{cosec} 2\theta.$

বাম পক্ষ $=\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}-\dfrac{\cos 2\theta}{\sin 2\theta}=\dfrac{\sin 2\theta\cos\theta-\cos 2\theta\sin\theta}{\sin\theta\sin 2\theta}$

$=\dfrac{\sin(2\theta-\theta)}{\sin\theta\sin 2\theta}=\dfrac{\sin\theta}{\sin\theta\sin 2\theta}=\dfrac{1}{\sin 2\theta}=\operatorname{cosec} 2\theta.$

উদা. 7. প্রমাণ কর যে,

$$\frac{\sin(B-C)}{\cos B\cos C}+\frac{\sin(C-A)}{\cos C\cos A}+\frac{\sin(A-B)}{\cos A\cos B}=0.$$

প্রথম পদ $=\dfrac{\sin B \cos C-\cos B \sin C}{\cos B \cos C}$

$=\dfrac{\sin B \cos C}{\cos B \cos C}-\dfrac{\cos B \sin C}{\cos B \cos C}$

$=\tan B-\tan C.$

অনুরূপে, দ্বিতীয় পদ $=\tan C-\tan A$,

এবং তৃতীয় পদ $=\tan A-\tan B$.

$\therefore$ বাম পক্ষ $=\tan B-\tan C+\tan C-\tan A+\tan A-\tan B=0$.

উদা. 8. প্রমাণ কর যে,

(i) $\sin(A+B+C)=\sin A\cos B\cos C+\sin B\cos C\cos A$
$+\sin C\cos A\cos B-\sin A\sin B\sin C.$

(ii) $\cos(A+B+C)=\cos A\cos B\cos C-\cos A\sin B\sin C$
$-\cos B\sin C\sin A-\cos C\sin A\sin B.$

(iii) $\tan(A+B+C)=\dfrac{\tan A+\tan B+\tan C-\tan A\tan B\tan C}{1-\tan B\tan C-\tan C\tan A-\tan A\tan B}$.

(i) বাম পক্ষ $=\sin\{A+(B+C)\}=\sin A\cos(B+C)$
$+\cos A\sin(B+C)$

$=\sin A(\cos B\cos C-\sin B\sin C)$
$+\cos A(\sin B\cos C+\cos B\sin C)$

$=\sin A\cos B\cos C+\sin B\cos C\cos A$
$+\sin C\cos A\cos B-\sin A\sin B\sin C.$

(ii) বাম পক্ষ $=\cos\{A+(B+C)\}$

$=\cos A\cos(B+C)-\sin A\sin(B+C)$

$=\cos A(\cos B\cos C-\sin B\sin C)$
$-\sin A(\sin B\cos C+\cos B\sin C)$

$=\cos A\cos B\cos C-\cos A\sin B\sin C$
$-\cos B\sin C\sin A-\cos C\sin A\sin B.$

(iii) বাম পক্ষ $=\tan\{A+(B+C)\}=\dfrac{\tan A+\tan(B+C)}{1-\tan A\tan(B+C)}$

$$=\dfrac{\tan A+\dfrac{\tan B+\tan C}{1-\tan B\tan C}}{1-\tan A\cdot\dfrac{\tan B+\tan C}{1-\tan B\tan C}}$$

$$=\dfrac{\tan A+\tan B+\tan C-\tan A\tan B\tan C}{1-\tan B\tan C-\tan C\tan A-\tan A\tan B}.$$

উদা. 9. প্রমাণ কর যে,

$$\cos^2 A + \cos^2(120° - A) + \cos^2(120° + A) = \tfrac{3}{2}.$$

বাম পক্ষ $= \cos^2 A + (\cos 120° \cos A + \sin 120° \sin A)^2 + (\cos 120° \cos A - \sin 120° \sin A)^2$

$$= \cos^2 A + 2(\cos^2 120° \cos^2 A + \sin^2 120° \sin^2 A)$$

$$= \cos^2 A + 2\left[(-\tfrac{1}{2})^2 \cos^2 A + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \sin^2 A\right]$$

$$= \cos^2 A + 2(\tfrac{1}{4}\cos^2 A + \tfrac{3}{4}\sin^2 A)$$

$$= \cos^2 A + \tfrac{1}{2}\cos^2 A + \tfrac{3}{2}\sin^2 A$$

$$= \tfrac{3}{2}\cos^2 A + \tfrac{3}{2}\sin^2 A$$

$$= \tfrac{3}{2}(\cos^2 A + \sin^2 A) = \tfrac{3}{2}.$$

উদা. 10. প্রমাণ কর :

$$1 + \tan A \tan\frac{A}{2} = \sec A.$$

বাম পক্ষ $= 1 + \dfrac{\sin A}{\cos A} \cdot \dfrac{\sin \frac{A}{2}}{\cos \frac{A}{2}} = \dfrac{\cos A \cos \frac{A}{2} + \sin A \sin \frac{A}{2}}{\cos A \cos \frac{A}{2}}$

$$= \frac{\cos\left(A - \frac{A}{2}\right)}{\cos A \cos \frac{A}{2}} = \frac{\cos \frac{A}{2}}{\cos A \cos \frac{A}{2}} = \frac{1}{\cos A} = \sec A.$$

প্রশ্নমালা 2

প্রমাণ কর :

1. $\sin A = \frac{4}{5}$ এবং $\sin B = \frac{5}{13}$ হইলে,
   $\cos(A - B) = \frac{56}{65}$, $\sin(A + B) = \frac{63}{65}$.
2. $\sec A = \frac{17}{8}$ এবং $\operatorname{cosec} B = \frac{5}{4}$ হইলে, $\sec(A - B) = \frac{85}{84}$.
3. $\cos 84° 25' \cos 24° 25' + \cos 5° 35' \cos 65° 35' = \frac{1}{2}$.
4. $\sin(45° - A)\cos(45° + B) + \cos(45° - A)\sin(45° + B) = \cos(A - B)$.
5. $\cos(45° - A)\cos(45° - B) - \sin(45° - A)\sin(45° - B) = \sin(A + B)$.
6. $\tan A - \tan B = \dfrac{\sin(A - B)}{\cos A \cos B}$.

7. $\dfrac{\cos(A-B)}{\sin A\cos B}=\cot A+\tan B.$

8. $\dfrac{\tan A+\tan B}{\tan A-\tan B}=\dfrac{\sin(A+B)}{\sin(A-B)}.$

9. $\sin(A-B)\cos B+\cos(A-B)\sin B=\sin A.$

10. $\cos\dfrac{A-B}{2}-\sin A\sin\dfrac{A+B}{2}=\cos A\cos\dfrac{A+B}{2}.$

11. $\sin(n+1)A\cos(n-1)A-\cos(n+1)A\sin(n-1)A=\sin 2A.$

12. $1+\tan 2A\tan A=\sec 2A.$

13. $\tan A\cot\dfrac{A}{2}-1=\sec A.$

14. $\cos(A-B)-\sin(A+B)=(\cos A-\sin A)(\cos B-\sin B).$

15. $\cos(A+B)+\sin(A-B)$
$=(\cos A+\sin A)(\cos B-\sin B).$

16. $\sin A\sin(B-C)+\sin B\sin(C-A)+\sin C\sin(A-B)=0.$

17. $\cos A\sin(B-C)+\cos B\sin(C-A)+\cos C\sin(A-B)=0.$

18. $\sin(A+B)\sin(A-B)+\sin(B+C)\sin(B-C)$
$+\sin(C+A)\sin(C-A)=0.$

19. $\dfrac{\sin(B-C)}{\sin B\sin C}+\dfrac{\sin(C-A)}{\sin C\sin A}+\dfrac{\sin(A-B)}{\sin A\sin B}=0.$

20. $\dfrac{\tan(A+B)-\tan A}{1+\tan(A+B)\tan A}=\tan B.$

21. $\tan(A+B)\tan(A-B)=\dfrac{\sin^2A-\sin^2B}{\cos^2A-\sin^2B}.$

22. $\tan^2A-\tan^2B=\dfrac{\sin(A+B)\sin(A-B)}{\cos^2A\cos^2B}.$

23. $\tan(A+B)+\tan(A-B)=\dfrac{\sin 2A}{\cos^2A-\sin^2B}.$

24. $\tan 20^\circ+\tan 25^\circ+\tan 20^\circ\tan 25^\circ=1.$

25. $\cos A+\cos(120^\circ+A)+\cos(120^\circ-A)=0.$

26. $\sin(60^\circ+A)-\sin(60^\circ-A)=\sin A.$

27. $\sin(A-B+C)=\sin A\cos B\cos C-\sin B\cos C\cos A$
$+\sin C\cos A\cos B+\sin A\sin B\sin C.$

28. $\tan(A-B-C)$

$$=\frac{\tan A-\tan B-\tan C-\tan A\tan B\tan C}{1-\tan B\tan C+\tan C\tan A+\tan A\tan B}.$$

29. $A+B+C=90^\circ$ হইলে, প্রমাণ কর যে,

$$\tan B\tan C+\tan C\tan A+\tan A\tan B=1.$$

প্রমাণ কর :

30. $\cos^2(A-B)+\cos^2 B-2\cos(A-B)\cos A\cos B=\sin^2 A.$

31. $\sin^2(A-B)+\sin^2 B+2\sin(A-B)\cos A\sin B=\sin^2 A.$

32. প্রমাণ কর : $\sec(x+y)=\dfrac{\sec x\sec y}{1-\tan x\tan y}.$

33. $\tan\theta=\dfrac{a\sin x+b\sin y}{a\cos x+b\cos y}$ হইলে, প্রমাণ কর যে,

$$a\sin(\theta-x)+b\sin(\theta-y)=0.$$

34. প্রমাণ কর যে, $\cot 2A+\tan A=\operatorname{cosec} 2A.$

35. প্রমাণ কর যে, $\dfrac{\cot A}{\cot A-\cot 3A}-\dfrac{\tan A}{\tan 3A-\tan A}=1.$

36. প্রমাণ কর যে, $\dfrac{1}{\tan 3A-\tan A}-\dfrac{1}{\cot 3A-\cot A}=\cot 2A.$

37. যদি θ কোণকে এমন দুই অংশে ভাগ করা যায় যে, অংশদ্বয়ের tangent-এর অনুপাত K হয়, এবং অংশদ্বয়ের অন্তর x হয়, তবে প্রমাণ কর যে,

$$\sin x=\frac{K-1}{K+1}\sin\theta.$$

38. প্রমাণ কর যে, $\tan 3A\tan 2A\tan A$

$$=\tan 3A-\tan 2A-\tan A.$$

[ইঙ্গিত : $\tan 3A=\tan(2A+A)$.]

39. $\cos(B-C)+\cos(C-A)+\cos(A-B)=-\frac{3}{2}$ হইলে, প্রমাণ কর যে, $\cos A+\cos B+\cos C=0$ এবং $\sin A+\sin B+\sin C=0.$

তৃতীয় অধ্যায়

গুণফল, যোগফল ও বিয়োগফলের পরিবর্তন

(Transformation of Products, Sums and Differences)

3·1. Sine ও Cosine-এর গুণফলকে যোগফল বা বিয়োগফলে এবং যোগফল বা বিয়োগফলকে গুণফলে পরিবর্তিত করার পদ্ধতি।

প্রমাণ করিতে হইবে যে,

(i) $2 \sin A \cos B = \sin (A+B) + \sin (A-B)$.

(ii) $2 \cos A \sin B = \sin (A+B) - \sin (A-B)$.

(iii) $2 \cos A \cos B = \cos (A+B) + \cos (A-B)$.

(iv) $2 \sin A \sin B = \cos (A-B) - \cos (A+B)$.

(v) $\sin C + \sin D = 2 \sin \frac{C+D}{2} \cos \frac{C-D}{2}$.

(vi) $\sin C - \sin D = 2 \cos \frac{C+D}{2} \sin \frac{C-D}{2}$.

(vii) $\cos C + \cos D = 2 \cos \frac{C+D}{2} \cos \frac{C-D}{2}$.

(viii) $\cos D - \cos C = 2 \sin \frac{C+D}{2} \sin \frac{C-D}{2}$.

(i) হইতে (iv) পর্যন্ত সূত্রাবলীর প্রমাণ যৌগিক কোণের সূত্র অনুসারে

$$\sin (A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B \quad \cdots \quad (1)$$

$$\sin (A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B \quad \cdots \quad (2)$$

(i) ∴ (1) এবং (2) যোগ করিয়া,

$$2 \sin A \cos B = \sin (A+B) + \sin (A-B) \quad \cdots \quad (3)$$

(ii) সেইরূপ, (1) হইতে (2) বিয়োগ করিয়া,

$$2 \cos A \sin B = \sin (A+B) - \sin (A-B) \quad \cdots \quad (4)$$

আবার, যৌগিক cosine সূত্র হইতে

$$\cos (A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B \quad \cdots \quad (5)$$

$$\cos (A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B \quad \cdots \quad (6)$$

(iii) ∴ (5) এবং (6) যোগ করিয়া,

$$2 \cos A \cos B = \cos (A+B) + \cos (A-B) \quad \cdots \quad (7)$$

(iv) সেইরূপ, (6) হইতে (5) বিয়োগ করিয়া,

$$2 \sin A \sin B = \cos (A-B) - \cos (A+B) \quad \cdots \quad (8)$$

(v) হইতে (viii) পর্যন্ত সূত্রাবলীর প্রমাণ

ধরা যাক, $A+B=C$, $A-B=D$.

$$\therefore \quad A=\frac{C+D}{2}, \; B=\frac{C-D}{2}.$$

(v) $\therefore$ (3) হইতে, $\sin C+\sin D=2\sin\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}.$

(vi) (4) হইতে, $\sin C-\sin D=2\cos\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2}.$

(vii) (7) হইতে, $\cos C+\cos D=2\cos\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}.$

(viii) (8) হইতে, $\cos D-\cos C=2\sin\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2}.$

উদাহরণমালা

উদা. 1. প্রমাণ কর :

$$\frac{\cos 2\theta-\cos 12\theta}{\sin 12\theta+\sin 2\theta}=\tan 5\theta.$$

$$\text{বাম পক্ষ}=\frac{2\sin\frac{12\theta+2\theta}{2}\sin\frac{12\theta-2\theta}{2}}{2\sin\frac{12\theta+2\theta}{2}\cos\frac{12\theta-2\theta}{2}}=\frac{2\sin 7\theta\sin 5\theta}{2\sin 7\theta\cos 5\theta}=\tan 5\theta.$$

উদা. 2. প্রমাণ কর :

$$\frac{\sin A+\sin 3A+\sin 5A+\sin 7A}{\cos A+\cos 3A+\cos 5A+\cos 7A}=\tan 4A.$$

$$\text{বাম পক্ষ}=\frac{(\sin 7A+\sin A)+(\sin 5A+\sin 3A)}{(\cos 7A+\cos A)+(\cos 5A+\cos 3A)}$$

$$=\frac{2\sin\frac{7A+A}{2}\cos\frac{7A-A}{2}+2\sin\frac{5A+3A}{2}\cos\frac{5A-3A}{2}}{2\cos\frac{7A+A}{2}\cos\frac{7A-A}{2}+2\cos\frac{5A+3A}{2}\cos\frac{5A-3A}{2}}$$

$$=\frac{\sin 4A\cos 3A+\sin 4A\cos A}{\cos 4A\cos 3A+\cos 4A\cos A}$$

$$=\frac{\sin 4A(\cos 3A+\cos A)}{\cos 4A(\cos 3A+\cos A)}=\tan 4A.$$

উদা. 3. প্রমাণ কর :

$$\sin\frac{11\theta}{4}\sin\frac{\theta}{4}+\sin\frac{7\theta}{4}\sin\frac{3\theta}{4}=\sin 2\theta\sin\theta.$$

$$\text{বাম পক্ষ} = \tfrac{1}{2}\left[2\sin\frac{11\theta}{4}\sin\frac{\theta}{4} + 2\sin\frac{7\theta}{4}\sin\frac{3\theta}{4}\right]$$

$$= \tfrac{1}{2}\left[\left\{\cos\left(\frac{11\theta}{4} - \frac{\theta}{4}\right) - \cos\left(\frac{11\theta}{4} + \frac{\theta}{4}\right)\right\} + \left\{\cos\left(\frac{7\theta}{4} - \frac{3\theta}{4}\right) - \cos\left(\frac{7\theta}{4} + \frac{3\theta}{4}\right)\right\}\right]$$

$$= \tfrac{1}{2}\left[\cos\frac{5\theta}{2} - \cos 3\theta + \cos\theta - \cos\frac{5\theta}{2}\right]$$

$$= \tfrac{1}{2}\left[\cos\theta - \cos 3\theta\right] = \tfrac{1}{2}\left[2\sin\frac{3\theta+\theta}{2}\sin\frac{3\theta-\theta}{2}\right]$$

$$= \sin 2\theta \sin\theta.$$

উদা. 4. প্রমাণ কর যে,

$$\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 60^\circ \cos 80^\circ = \tfrac{1}{16}.$$

$$\text{বাম পক্ষ} = \cos 60^\circ . \cos 20^\circ . \cos 40^\circ \cos 80^\circ$$

$$= \tfrac{1}{2}\cos 20^\circ . \tfrac{1}{2}(2\cos 80^\circ \cos 40^\circ)$$

$$= \tfrac{1}{4}\cos 20^\circ (\cos 120^\circ + \cos 40^\circ)$$

$$= \tfrac{1}{4}\cos 20^\circ (-\tfrac{1}{2} + \cos 40^\circ)$$

$$= -\tfrac{1}{8}\cos 20^\circ + \tfrac{1}{4}\cos 40^\circ \cos 20^\circ$$

$$= -\tfrac{1}{8}\cos 20^\circ + \tfrac{1}{8}(2\cos 40^\circ \cos 20^\circ)$$

$$= -\tfrac{1}{8}\cos 20^\circ + \tfrac{1}{8}(\cos 60^\circ + \cos 20^\circ)$$

$$= -\tfrac{1}{8}\cos 20^\circ + \tfrac{1}{8}(\tfrac{1}{2} + \cos 20^\circ)$$

$$= -\tfrac{1}{8}\cos 20^\circ + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{8}\cos 20^\circ = \tfrac{1}{16}.$$

প্রশ্নমালা 3

প্রমাণ কর :

1. $\dfrac{\cos 2A - \cos 4A}{\sin 4A + \sin 2A} = \tan 3A.$ 2. $\dfrac{\sin A + \sin B}{\cos A + \cos B} = \tan\dfrac{A+B}{2}.$

3. $\dfrac{\sin 3A + \sin 5A}{\cos 3A - \cos 5A} = \cot A.$ 4. $\dfrac{\sin A + \sin B}{\sin A - \sin B} = \dfrac{\tan\frac{A+B}{2}}{\tan\frac{A-B}{2}}.$

5. $\dfrac{\cos 9^\circ + \sin 9^\circ}{\cos 9^\circ - \sin 9^\circ} = \tan 54^\circ.$ 6. $\cos 55^\circ + \cos 65^\circ + \cos 175^\circ = 0.$

7. $\sin 40^\circ - \sin 80^\circ + \sin 20^\circ = 0.$

8. $\sin A + \sin 2A + \sin 3A + \sin 4A = 4\cos A \cos\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{5A}{2}.$

9. $\cos A + \cos 3A + \cos 7A + \cos 9A = 4\cos A \cos 3A \cos 5A.$

10. $\dfrac{\sin 5A + 2\sin 9A + \sin 13A}{\cos 5A + 2\cos 9A + \cos 13A} = \tan 9A.$

11. $\dfrac{\sin 11A \sin A + \sin 7A \sin 3A}{\cos 11A \sin A + \cos 7A \sin 3A} = \tan 8A.$

12. $A + B + C = 90°$ হইলে, প্রমাণ কর যে,
$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 1 - 2 \sin A \sin B \sin C.$

13. $A + B = C$ হইলে, প্রমাণ কর যে,
$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 + 2 \cos A \cos B \cos C.$

14. $\cos(A+B)\sin(C+D) = \cos(A-B)\sin(C-D)$ হইলে, প্রমাণ কর যে, $\cot A \cot B \cot C = \cot D.$

15. যদি $a \cos(x+y) = b \cos(x-y)$ হয়, প্রমাণ কর যে,
$(a+b)\tan x = (a-b)\cot y.$

16. প্রমাণ কর যে, $\sin 20° \sin 40° \sin 60° \sin 80° = \frac{3}{16}.$

17. প্রমাণ কর যে, $\cos A + \cos B + \cos C + \cos(A+B+C)$
$$= 4\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{C+A}{2}\cos\frac{A+B}{2}.$$

18. যদি $\sin A + \sin B = x$ এবং $\cos A + \cos B = y$ হয়,
প্রমাণ কর যে, $\tan\dfrac{A-B}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{4-x^2-y^2}{x^2+y^2}}.$

19. প্রমাণ কর যে, $\left(\dfrac{\cos A + \cos B}{\sin A - \sin B}\right)^n + \left(\dfrac{\sin A + \sin B}{\cos A - \cos B}\right)^n$
$= 2\cot^n\dfrac{A-B}{2}$ (যদি n যুগ্ম হয়)
$= 0$ (যদি n অযুগ্ম হয়)।

20. $\sin x = k \sin y$ হইলে, প্রমাণ কর যে, $\tan\dfrac{x-y}{2} = \dfrac{k-1}{k+1}\tan\dfrac{x+y}{2}.$

21. $\cos x + \cos y = \frac{1}{3}$ এবং $\sin x + \sin y = \frac{1}{4}$ হইলে, প্রমাণ কর যে,
$\tan\dfrac{x+y}{2} = \frac{3}{4}.$

22. $x\cos A + y\sin A = k = x\cos B + y\sin B$ হইলে,
প্রমাণ কর যে, $\dfrac{x}{\cos\frac{A+B}{2}} = \dfrac{y}{\sin\frac{A+B}{2}} = \dfrac{k}{\cos\frac{A-B}{2}}.$

23. প্রমাণ কর : (i) $\sin A \sin(60° - A)\sin(60° + A) = \frac{1}{4}\sin 3A.$
(ii) $\cos A \cos(60° - A)\cos(60° + A) = \frac{1}{4}\cos 3A.$

24. প্রমাণ কর যে, $\dfrac{\cos 10° - \sin 10°}{\cos 10° + \sin 10°} = \tan 35°.$

চতুর্থ অধ্যায়

গুণিতক ও আংশিক কোণের ত্রৈকোণমিতিক অনুপাত

(Trigonometrical ratios of Multiple and Submultiple angles)

4·1. $\sin 2A = \sin(A + A)$

$$= \sin A \cos A + \cos A \sin A$$

$$= 2 \sin A \cos A \qquad \cdots \quad (1)$$

অর্থাৎ কোন প্রদত্ত কোণের $\sin = 2 \times$ প্রদত্ত কোণের অর্ধাংশের $\sin \times$ অর্ধাংশের cosine.

$$\therefore \quad \sin A = 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}. \qquad \cdots \quad (2)$$

আবার (1) হইতে, $\sin 2A = 2 \sin A \cos A$

$$= \frac{2 \sin A \cos A}{\cos^2 A + \sin^2 A}, \quad [\because \ \cos^2 A + \sin^2 A = 1]$$

$$= \frac{\dfrac{2 \sin A \cos A}{\cos^2 A}}{\dfrac{\cos^2 A + \sin^2 A}{\cos^2 A}}$$ (লব ও হরকে $\cos^2 A$ দিয়া ভাগ করিয়া)

$$= \frac{2 \tan A}{1 + \tan^2 A}. \qquad \cdots \quad (3)$$

অনুরূপে (2) হইতে, $\sin A = \dfrac{2 \tan \frac{A}{2}}{1 + \tan^2 \frac{A}{2}} \qquad \cdots \quad (4)$

4·2. $\cos 2A = \cos(A + A)$

$$= \cos A \cos A - \sin A \sin A$$

$$= \cos^2 A - \sin^2 A \qquad \cdots \quad (5)$$

$$= (1 - \sin^2 A) - \sin^2 A$$

$$= 1 - 2 \sin^2 A \qquad \cdots \quad (6)$$

$$= \cos^2 A - (1 - \cos^2 A)$$

$$= 2 \cos^2 A - 1 \qquad \cdots \quad (7)$$

অর্থাৎ কোন প্রদত্ত কোণের cosine

= প্রদত্ত কোণের অর্ধাংশের cosine-এর বর্গ

− " " " sin-এর বর্গ

= 1 − 2 × প্রদত্ত কোণের অর্ধাংশের sin-এর বর্গ

= 2 প্রদত্ত কোণের অর্ধাংশের cosine-এর বর্গ − 1.

$$\therefore \quad \left.\begin{aligned} \cos A &= \cos^2\frac{A}{2} - \sin^2\frac{A}{2} \\ &= 1 - 2\sin^2\frac{A}{2} \\ &= 2\cos^2\frac{A}{2} - 1 \end{aligned}\right\} \quad \cdots \quad \cdots \quad (8)$$

(6) এবং (7) হইতে,

$$1 - \cos 2A = 2\sin^2 A \quad \cdots \quad \cdots \quad (9)$$

$$1 + \cos 2A = 2\cos^2 A \quad \cdots \quad \cdots \quad (10)$$

অনুরূপে, $$1 - \cos A = 2\sin^2\frac{A}{2} \quad \cdots \quad \cdots \quad (11)$$

$$1 + \cos A = 2\cos^2\frac{A}{2} \quad \cdots \quad \cdots \quad (12)$$

পুনশ্চ, (5) হইতে,

$$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$$

$$= \frac{\cos^2 A - \sin^2 A}{\cos^2 A + \sin^2 A}$$

$$= \frac{\dfrac{\cos^2 A - \sin^2 A}{\cos^2 A}}{\dfrac{\cos^2 A + \sin^2 A}{\cos^2 A}}$$

$$= \frac{1 - \tan^2 A}{1 + \tan^2 A} \quad \cdots \quad \cdots \quad (13)$$

অনুরূপে, $$\cos A = \frac{1 - \tan^2\dfrac{A}{2}}{1 + \tan^2\dfrac{A}{2}} \quad \cdots \quad \cdots \quad (14)$$

(9)-কে (10) দ্বারা ভাগ করিলে,

$$\frac{1 - \cos 2A}{1 + \cos 2A} = \tan^2 A \quad \cdots \quad \cdots \quad (15)$$

অনুরূপে, $$\frac{1 - \cos A}{1 + \cos A} = \tan^2\frac{A}{2}. \quad \cdots \quad \cdots \quad (16)$$

4·3. $\tan 2A = \tan (A + A)$

$$= \frac{\tan A + \tan A}{1 - \tan A \tan A}$$

$$= \frac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A} \quad \cdots \quad \cdots \quad (17)$$

অর্থাৎ কোন প্রদত্ত কোণের tangent

$$= \frac{2 \times \text{প্রদত্ত কোণের অর্ধাংশের tangent}}{1 - \text{প্রদত্ত কোণের অর্ধাংশের tangent-এর বর্গ}}।$$

$$\therefore \quad \tan A = \frac{2 \tan \frac{A}{2}}{1 - \tan^2 \frac{A}{2}} \quad \cdots \quad \cdots \quad (18)$$

4·4. $\sin 3A = \sin (2A + A)$

$$= \sin 2A \cos A + \cos 2A \sin A$$
$$= 2 \sin A \cos A \cos A + (1 - 2 \sin^2 A) \sin A$$
$$= 2 \sin A \cos^2 A + (1 - 2 \sin^2 A) \sin A$$
$$= 2 \sin A (1 - \sin^2 A) + (1 - 2 \sin^2 A) \sin A$$
$$= 3 \sin A - 4 \sin^3 A \quad \cdots \quad \cdots \quad (19)$$

অর্থাৎ কোন প্রদত্ত কোণের sin

= 3 × প্রদত্ত কোণের এক-তৃতীয়াংশের sin

− 4 × " " " " sin-এর তৃতীয় ঘাত ;

$$\therefore \quad \sin A = 3 \sin \frac{A}{3} - 4 \sin^3 \frac{A}{3}. \quad \cdots \quad \cdots \quad (20)$$

4·5. $\cos 3A = \cos (2A + A)$

$$= \cos 2A \cos A - \sin 2A \sin A$$
$$= (2 \cos^2 A - 1) \cos A - 2 \sin A \cos A \sin A$$
$$= (2 \cos^2 A - 1) \cos A - 2 \cos A \sin^2 A$$
$$= (2 \cos^2 A - 1) \cos A - 2 \cos A (1 - \cos^2 A)$$
$$= 4 \cos^3 A - 3 \cos A \quad \cdots \quad \cdots \quad (21)$$

অর্থাৎ কোন প্রদত্ত কোণের cosine

= 4 × প্রদত্ত কোণের এক-তৃতীয়াংশের cosine-এর তৃতীয় ঘাত

− 3 × " " " " cosine.

অতএব, $\cos A = 4 \cos^3 \frac{A}{3} - 3 \cos \frac{A}{3}. \quad \cdots \quad \cdots \quad (22)$

4·6. $\tan 3A = \tan(2A + A)$

$$= \frac{\tan 2A + \tan A}{1 - \tan 2A \tan A} = \frac{\dfrac{2\tan A}{1-\tan^2 A} + \tan A}{1 - \dfrac{2\tan A}{1-\tan^2 A} \times \tan A}$$

$$= \frac{2\tan A + \tan A - \tan^3 A}{1 - \tan^2 A - 2\tan^2 A}$$

$$= \frac{3\tan A - \tan^3 A}{1 - 3\tan^2 A} \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad (23)$$

অর্থাৎ কোন প্রদত্ত কোণের tangent

$$= \frac{3 \times \text{প্রদত্ত কোণের এক-তৃতীয়াংশের tangent} - \text{প্রদত্ত কোণের এক-তৃতীয়াংশের tangent-এর তৃতীয় ঘাত}}{1 - 3 \times \text{প্রদত্ত কোণের এক-তৃতীয়াংশের tangent-এর বর্গ}}।$$

অতএব, $\tan A = \dfrac{3\tan\frac{A}{3} - \tan^3\frac{A}{3}}{1 - 3\tan^2\frac{A}{3}} \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad (24)$

উদাহরণমালা

উদা. 1. প্রমাণ কর যে, $\cos 4A = 8\cos^4 A - 8\cos^2 A + 1$.

$$\cos 4A = 2\cos^2 2A - 1 = 2(2\cos^2 A - 1)^2 - 1$$
$$= 8\cos^4 A - 8\cos^2 A + 1.$$

উদা. 2. প্রমাণ কর যে, $\cos 5A = 16\cos^5 A - 20\cos^3 A + 5\cos A$.

$$\cos 5A = \cos 5A + \cos A - \cos A$$
$$= 2\cos 3A \cos 2A - \cos A$$
$$= 2(4\cos^3 A - 3\cos A)(2\cos^2 A - 1) - \cos A$$
$$= 16\cos^5 A - 20\cos^3 A + 5\cos A.$$

উদা. 3. প্রমাণ কর যে,

$$\sin A = 2^4 \cos\frac{A}{2}\cos\frac{A}{4}\cos\frac{A}{8}\cos\frac{A}{16}\sin\frac{A}{16}.$$

$$\sin A = 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2},$$

$$\sin\frac{A}{2} = 2\sin\frac{A}{4}\cos\frac{A}{4},$$

$$\sin\frac{A}{4}=2\sin\frac{A}{8}\cos\frac{A}{8},$$

$$\sin\frac{A}{8}=2\sin\frac{A}{16}\cos\frac{A}{16},$$

$$\therefore\quad \sin A\sin\frac{A}{2}\sin\frac{A}{4}\sin\frac{A}{8}$$

$$=2^4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{A}{4}\sin\frac{A}{8}\sin\frac{A}{16}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{A}{4}\cos\frac{A}{8}\cos\frac{A}{16};$$

$$\therefore\quad \sin A=2^4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{A}{4}\cos\frac{A}{8}\cos\frac{A}{16}\sin\frac{A}{16}.$$

উদা. 4. (i) $\sin 18°$ এবং (ii) $\cos 36°$-এর মান নির্ণয় কর।

(i) মনে কর, $\theta=18°$; $\therefore\ 5\theta=90°$; $\therefore\ 2\theta=90°-3\theta$;

$$\therefore\quad \sin 2\theta=\sin(90°-3\theta)=\cos 3\theta,$$

অথবা, $2\sin\theta\cos\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta=\cos\theta\,(4\cos^2\theta-3)$,

কিন্তু $\cos\theta=0$ হইতে পারে না, কারণ তাহা হইলে $\theta=90°$;

$\therefore\quad 2\sin\theta=4\cos^2\theta-3=4(1-\sin^2\theta)-3=1-4\sin^2\theta$;

$\therefore\quad 4\sin^2\theta+2\sin\theta-1=0.$

$$\therefore\quad \sin\theta=\frac{-2\pm\sqrt{4+16}}{8}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}.$$

কিন্তু $\theta<90°$, $\therefore$ $\sin\theta$ ধনাত্মক হইবে।

$\therefore\quad \sin\theta=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$ অর্থাৎ $\sin 18°=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}.$

$$\text{(ii)}\ \cos 36°=1-2\sin^2 18°=1-2\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2$$

$$=1-2\times\frac{6-2\sqrt{5}}{16}=1-\frac{3-\sqrt{5}}{4}=\frac{\sqrt{5}+1}{4}.$$

উদা. 5. যদি $\tan x=\dfrac{b}{a}$ হয়, তবে $a\cos 2x+b\sin 2x$-এর মান নির্ণয় কর।

$$a\cos 2x+b\sin 2x=a\cdot\frac{1-\tan^2x}{1+\tan^2x}+b\cdot\frac{2\tan x}{1+\tan^2x}$$

$$=a\cdot\frac{1-\dfrac{b^2}{a^2}}{1+\dfrac{b^2}{a^2}}+b\cdot\frac{2\dfrac{b}{a}}{1+\dfrac{b^2}{a^2}}$$

$$=a\cdot\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}+\frac{2ab^2}{a^2+b^2}=\frac{a(a^2+b^2)}{a^2+b^2}=a.$$

উদা. 6. যদি A এবং B দুইটি সূক্ষ্ম এবং ধনাত্মক কোণ

এবং $\cos 2A = \dfrac{3\cos 2B - 1}{3 - \cos 2B}$ হয়, প্রমাণ কর যে, $\tan A = \sqrt{2}\tan B$.

$$\cos 2A = \frac{3\cos 2B - 1}{3 - \cos 2B}.$$

∴ যোগ এবং বিয়োগ প্রক্রিয়া দ্বারা,

$$\frac{1-\cos 2A}{1+\cos 2B} = \frac{(3-\cos 2B)-(3\cos 2B - 1)}{(3-\cos 2B)+(3\cos 2B-1)}$$

$$= \frac{4 - 4\cos 2B}{2 + 2\cos 2B} = 2 \times \frac{1-\cos 2B}{1+\cos 2B}.$$

$$\therefore \quad \frac{2\sin^2 A}{2\cos^2 A} = 2 \times \frac{2\sin^2 B}{2\cos^2 B};$$

অথবা, $\tan^2 A = 2\tan^2 B$; ∴ $\tan A = \pm\sqrt{2}\tan B$.

কিন্তু, যেহেতু A এবং B প্রত্যেকেই ধনাত্মক কোণ,

∴ $\tan A$ এবং $\tan B$ উভয়ই ধনাত্মক ; ∴ $\tan A = \sqrt{2}\tan B$.

উদা. 7. $A + B = 90°$ হইলে, প্রমাণ কর যে,

$$\frac{\cos 2B - \cos 2A}{\sin 2A} = \tan A - \tan B.$$

বাম পক্ষ $= \dfrac{2\sin(A+B)\sin(A-B)}{2\sin A\cos A}$

$$= \frac{\sin 90°\sin(A-B)}{\cos A\sin(90°-B)}$$

$$= \frac{\sin A\cos B - \cos A\sin B}{\cos A\cos B}$$

$$= \frac{\sin A\cos B}{\cos A\cos B} - \frac{\cos A\sin B}{\cos A\cos B}$$

$$= \tan A - \tan B.$$

উদা. 8. যদি $2\tan A = 3\tan B$,

প্রমাণ কর যে, $\tan(A-B) = \dfrac{\sin 2B}{5 - \cos 2B}$.

প্রদত্ত শর্তানুসারে, $\tan A = \frac{3}{2}\tan B$.

অতএব, $\tan(A-B)$

$$= \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A\tan B} = \frac{\frac{3}{2}\tan B - \tan B}{1 + \frac{3}{2}\tan^2 B}$$

$$= \frac{\tan B}{2 + 3\tan^2 B}$$

$$=\frac{\dfrac{\sin B}{\cos B}}{2+3\dfrac{\sin^2 B}{\cos^2 B}}=\frac{\sin B\cos B}{2\cos^2 B+3\sin^2 B}$$

$$=\frac{2\sin B\cos B}{4\cos^2 B+6\sin^2 B}$$

$$=\frac{\sin 2B}{2(1+\cos 2B)+3(1-\cos 2B)}=\frac{\sin 2B}{5-\cos 2B}.$$

প্রশ্নমালা 4

প্রমাণ কর :

1. $\dfrac{\sin 2A}{1+\cos 2A}=\tan A.$

2. $\dfrac{\sin 2A}{1-\cos 2A}=\cot A.$

3. $\cot A+\tan A=2\operatorname{cosec} 2A.$

4. $\cot A-\tan A=2\cot 2A.$

5. $\dfrac{\cot A-\tan A}{\cot A+\tan A}=\cos 2A.$

6. $\cos^4\theta-\sin^4\theta=\cos 2\theta.$

7. $\cos^4 A+\sin^4 A=\frac{1}{2}(1+\cos^2 2A).$

8. $\cos^6 A+\sin^6 A=\frac{1}{4}(1+3\cos^2 2A).$

9. $\cos^6 A-\sin^6 A=\cos 2A\,(1-\frac{1}{4}\sin^2 2A).$

10. $\dfrac{\cos^3 A+\sin^3 A}{\cos A+\sin A}=1-\frac{1}{2}\sin 2A.$

11. $\dfrac{\sin^2 A-\sin^2 B}{\sin A\cos A-\sin B\cos B}=\tan(A+B).$

12. $\dfrac{1-\cos\theta+\sin\theta}{1+\cos\theta+\sin\theta}=\tan\dfrac{\theta}{2}.$

13. $\dfrac{1-\tan^2(45^\circ-A)}{1+\tan^2(45^\circ-A)}=\sin 2A.$

14. $\dfrac{\sin A-\sqrt{1+\sin 2A}}{\cos A-\sqrt{1+\sin 2A}}=\cot A.$

15. $\dfrac{\cos A-\sin A}{\cos A+\sin A}=\sec 2A-\tan 2A.$

16. $\dfrac{\cos A+\sin A}{\cos A-\sin A}-\dfrac{\cos A-\sin A}{\cos A+\sin A}=2\tan 2A.$

17. $\dfrac{\sin A+\sin 2A}{1+\cos A+\cos 2A}=\tan A.$

18. $\dfrac{\sin 4A}{\cos 2A}\cdot\dfrac{1-\cos 2A}{1-\cos 4A}=\tan A.$

19. $\sin 5A=16\sin^5 A-20\sin^3 A+5\sin A.$

20. $\sin 8A=8\sin A\cos A\cos 2A\cos 4A.$

21. $\tan 4A=\dfrac{4\tan A-4\tan^3 A}{1-6\tan^2 A+\tan^4 A}.$

22. $\cos^3 A\cos 3A+\sin^3 A\sin 3A=\cos^3 2A.$

23. $\sin^3 A+\sin^3(120^\circ+A)+\sin^3(240^\circ+A)=-\frac{3}{4}\sin 3A.$

24. $\dfrac{\sec 8A-1}{\sec 4A-1}=\dfrac{\tan 8A}{\tan 2A}.$

25. $\cos 4A-\cos 4B=8(\cos A-\cos B)(\cos A+\cos B)$
$\times(\cos A-\sin B)(\cos A+\sin B).$

26. $\sin^4 A=\frac{3}{8}-\frac{1}{2}\cos 2A+\frac{1}{8}\cos 4A.$

27. $\cos^4 A=\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\cos 2A+\frac{1}{8}\cos 4A.$

28. যদি $\cos A=\frac{1}{2}\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$ হয়,

প্রমাণ কর : (i) $\cos 2A=\frac{1}{2}\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)$

এবং (ii) $\cos 3A=\frac{1}{2}\left(x^3+\dfrac{1}{x^3}\right).$

29. যদি $\tan A=\cos 2B$ হয়,

প্রমাণ কর যে, $\sin 2A=\dfrac{1-\tan^4 B}{1+\tan^4 B}.$

30. যদি $\tan^2 A=1+2\tan^2 B$ হয়, প্রমাণ কর যে, $\cos 2B=1+2\cos 2A.$

31. যদি $\tan\dfrac{A}{2}=\tan^3\dfrac{B}{2}$, এবং $\tan B=2\tan C$ হয়,

প্রমাণ কর যে, $A+B=2C.$

32. যদি $\tan\dfrac{A}{2}=\sqrt{\dfrac{1-K}{1+K}}\tan\dfrac{B}{2}$ হয়,

প্রমাণ কর যে, $\cos B=\dfrac{\cos A-K}{1-K\cos A}.$

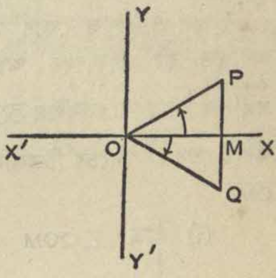
33. প্রমাণ কর যে, $\cos^2 18^\circ\sin^2 36^\circ-\cos 72^\circ\sin 54^\circ=\frac{1}{16}.$

পঞ্চম অধ্যায়

পূরক, সম্পূরক এবং যে-কোন কোণের অনুপাত

মাধ্যমিক স্তরে পূরক কোণের অনুপাতসমূহ নির্ণয় করার পদ্ধতি আলোচিত হইয়াছে। এই অধ্যায়ে তাহার পুনরালোচনা এবং সম্পূরক কোণের অনুপাত সম্বন্ধে আলোচনা করা হইবে। সেই প্রসঙ্গে যে-কোন কোণের অনুপাত-নির্ণয়ের পদ্ধতিও প্রদর্শিত হইবে। ইহার প্রস্তুতি হিসাবে, ঋণাত্মক কোণের অনুপাত ও বিভিন্ন পাদে অবস্থিত কোণের ত্রৈকোণমিতিক অনুপাতগুলির মধ্যে কোন্‌গুলির মান ধনাত্মক এবং কোন্‌গুলিরই বা মান ঋণাত্মক হয়, তাহা জানা দরকার। এই কারণে প্রথমে এখানে উল্লিখিত প্রসঙ্গসমূহের আলোচনা করা হইতেছে।

5·1. ঋণাত্মক কোণের অনুপাত :



ঘড়ির কাঁটার বিপরীতমুখে আবর্তনশীল $\overline{OP}$ রেখা যেন $\angle XOP = \theta$ কোণ উৎপন্ন করিয়াছে এবং $\overline{OP}$-এর সমান দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট $\overline{OQ}$ রেখা ঘড়ির কাঁটার মুখে ঘুরিয়া যেন $\angle XOQ = \angle XOP$ কোণ উৎপন্ন করিয়াছে। $\overline{OQ}$ ঘড়ির কাঁটার মুখে আবর্তনশীল বলিয়া $\angle XOQ$ নিশ্চয় ঋণাত্মক এবং তাহার জ্যামিতিক মান $\angle XOP$ বা θ-এর সমান বলিয়া নিশ্চয় $\angle XOQ = -\theta$.

এইবার P হইতে $\overrightarrow{OX}$-এর উপর অঙ্কিত লম্বটিকে Q পর্যন্ত বর্ধিত করা হইল।

এখন POM ও QOM ত্রিভুজ-দুইটিতে $\overline{OP} \cong \overline{OQ}$, $\overline{OM}$ সাধারণ এবং সাংখ্যমানে $\angle MOP = \angle MOQ$.

অতএব ত্রিভুজ-দুইটি সর্বসম ; $\therefore$ $\angle QMO = \angle PMO =$ এক সমকোণ এবং সাংখ্যমানে MP = MQ ; কিন্তু $\overline{MP}$ ধনাত্মক এবং $\overline{MQ}$ ঋণাত্মক।

$\therefore$ $MQ = -PM$. বলা বাহুল্য, $\overline{OP}$ ও $\overline{OQ}$ উভয়েই ধনাত্মক।

$$\therefore \sin(-\theta) = \frac{MQ}{OQ} = \frac{-PM}{OP} = -\sin\theta \,;$$

$$\cos(-\theta) = \frac{OM}{OQ} = \frac{OM}{OP} = \cos\theta \,;$$

$$\tan(-\theta) = \frac{MQ}{OM} = \frac{-PM}{OM} = -\tan\theta.$$

অতএব,

$$\operatorname{cosec}(-\theta)=\frac{1}{\sin(-\theta)}=\frac{1}{-\sin\theta}=-\operatorname{cosec}\theta\,;$$

$$\sec(-\theta)=\frac{1}{\cos(-\theta)}=\frac{1}{\cos\theta}=\sec\theta\,;$$

$$\cot(-\theta)=\frac{1}{\tan(-\theta)}=\frac{1}{-\tan\theta}=-\cot\theta.$$

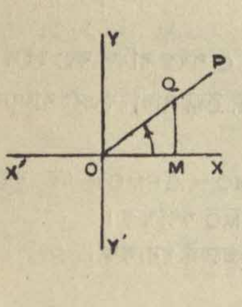
লক্ষণীয় যে ঋণাত্মক কোণের একমাত্র cos ও sec ধনাত্মক।

5·2. বিভিন্ন পাদে অবস্থিত কোণের অনুপাতসমূহের (চিহ্ন) বিচার :

মাধ্যমিক স্তরে একমাত্র সূক্ষ্মকোণের অনুপাত সম্বন্ধে আলোচনা করা হইয়াছে। সূক্ষ্মকোণ মাত্রই প্রথম পাদে অবস্থিত। স্থূলকোণ অবস্থিত দ্বিতীয় পাদে এবং তৃতীয় ও চতুর্থ পাদে অবস্থিত প্রবৃদ্ধকোণ।

স্থূল ও প্রবৃদ্ধ কোণ অর্থাৎ দ্বিতীয় হইতে চতুর্থ পাদ পর্যন্ত যে-সকল কোণ অবস্থিত হয় তাহাদের অনুপাত নির্ণয়ের সময় সন্নিহিত বাহুর স্থলে স্থির রেখা $\overleftrightarrow{XX'}$-এর উপর আবর্তনশীল $\overline{OQ}$ রেখার লম্ব-অভিক্ষেপ বা সংক্ষেপে, অভিক্ষেপ ব্যবহার করাই শ্রেয়। নিচের চিত্রগুলিতে সর্বত্র স্থির রেখা $\overleftrightarrow{XX}$-এর উপর $\overline{OQ}$-এর অভিক্ষেপ $\overline{OM}$.

(i) চিত্রে $\angle QOM$ প্রথম পাদে অবস্থিত বলিয়া লম্ব $\overline{QM}$ এবং $\overline{OX}$-এর উপর $\overline{OQ}$-এর অভিক্ষেপ $\overline{OM}$ উভয়েই ধনাত্মক।



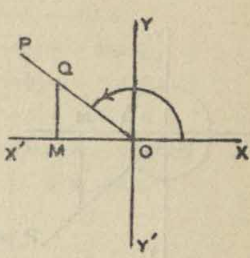
$$\therefore\ \sin QOM=\frac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}}=\frac{QM}{OQ}\ \text{ধনাত্মক},$$

$$\cos QOM=\frac{\text{অভিক্ষেপ}}{\text{অতিভুজ}}=\frac{OM}{OQ}\ \text{ধনাত্মক},$$

$$\tan QOM=\frac{\text{লম্ব}}{\text{অভিক্ষেপ}}=\frac{QM}{OM}\ \text{ধনাত্মক।}$$

$\because$ cosec QOM, sec QOM এবং cot QOM যথাক্রমে sin QOM, cos QOM ও tan QOM-এর অন্যোন্যক ; $\therefore$ তাহারও ধনাত্মক। অতএব, **প্রথম পাদে অবস্থিত কোণের সবকয়টি ত্রৈকোণমিতিক অনুপাতই ধনাত্মক।**

(ii) চিত্রে $\angle QOM$ দ্বিতীয় পাদে অবস্থিত বলিয়া লম্ব $\overline{QM}$ ধনাত্মক হইলেও অভিক্ষেপ $\overline{OM}$-এর মান ঋণাত্মক।



$\therefore \quad \sin QOM = \frac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{QM}{OQ}$ ধনাত্মক

$\cos QOM = \frac{\text{অভিক্ষেপ}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{OM}{OQ}$ ঋণাত্মক

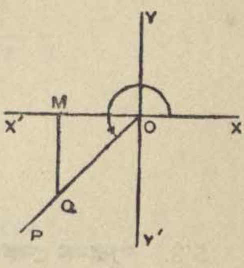
[$\because$ OM ঋণাত্মক]

$\tan QOM = \frac{\text{লম্ব}}{\text{অভিক্ষেপ}} = \frac{QM}{OM}$ ঋণাত্মক

[$\because$ OM ঋণাত্মক]

$\therefore$ sin QOM-এর অন্যোন্যক cosec QOM ধনাত্মক, কিন্তু cos QOM ও tan QOM-এর অন্যোন্যক যথাক্রমে sec QOM ও cot QOM ঋণাত্মক। অতএব, দ্বিতীয় পাদে অবস্থিত **যে-কোন কোণের একমাত্র sine ও cosec ধনাত্মক।** অন্য সব-কয়টি ত্রৈকোণমিতিক অনুপাত ঋণাত্মক।

(iii) চিত্রে $\angle QOM$ তৃতীয় পাদে অবস্থিত বলিয়া লম্ব $\overline{QM}$ ও অভিক্ষেপ $\overline{OM}$—উভয়ের মানই ঋণাত্মক।



$\therefore \quad \sin QOM = \frac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{QM}{OQ}$ ঋণাত্মক

[$\because$ MQ ঋণাত্মক]

$\cos QOM = \frac{\text{অভিক্ষেপ}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{OM}{OQ}$ ঋণাত্মক

[$\because$ OM ঋণাত্মক]

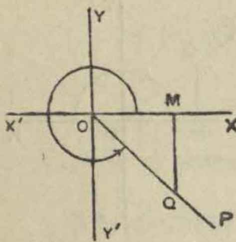
$\tan QOM = \frac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{QM}{OM}$ ধনাত্মক

[$\because$ QM ও OM উভয়ে ঋণাত্মক]

$\therefore$ sin QOM ও cos QOM-এর অন্যোন্যক যথাক্রমে cosec QOM ও sec QOM ও ঋণাত্মক। কিন্তু tan QOM-এর অন্যোন্যক cot QOM ধনাত্মক।

অতএব, **তৃতীয় পাদে অবস্থিত যে-কোন কোণের একমাত্র tan ও cot ধনাত্মক।**

(iv) চিত্রে $\angle QOM$ চতুর্থ পাদে অবস্থিত বলিয়া, লম্ব QM-এর মান ঋণাত্মক কিন্তু অভিক্ষেপ OM-এর মান ধনাত্মক।



$\therefore \quad \sin QOM = \frac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{QM}{OQ}$ ঋণাত্মক

[$\because$ QM ঋণাত্মক]

$\cos QOM = \frac{\text{অভিক্ষেপ}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{OM}{OQ}$ ধনাত্মক

[$\because$ OM ধনাত্মক]

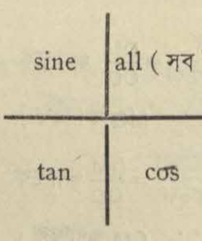
$\tan QOM = \frac{\text{লম্ব}}{\text{অভিক্ষেপ}} = \frac{QM}{OM}$ ঋণাত্মক

[$\because$ QM ঋণাত্মক এবং OM ধনাত্মক]

$\therefore$ sin QOM ও tan QOM-এর অন্যোন্যক যথাক্রমে cosec QOM ও cot QOM, উভয়েই ঋণাত্মক। কিন্তু cos QOM-এর অন্যোন্যক sec QOM ধনাত্মক।

অতএব, **চতুর্থ পাদে অবস্থিত যে-কোন কোণের একমাত্র cos ও sec ধনাত্মক।**

(i) হইতে (iv)-এর সিদ্ধান্ত অনুসারে বিভিন্ন পাদের কোণগুলির **ধনাত্মক** অনুপাতগুলিকে চিত্র দ্বারা নিম্নরূপে সূচিত করা যায়।



5·3. পূরক কোণের ত্রৈকোণমিতিক অনুপাত :

দুইটি কোণের সমষ্টি যখন এক সমকোণ হয়, তখন একটিকে অপরটির পূরক কোণ বলে। θ কোণের পূরক কোণ $(90° - \theta)$, কেননা $\theta + 90° - \theta = 90°$ বা এক সমকোণ। মাধ্যমিক স্তরে দশম শ্রেণীর পাঠ্যক্রমে $(90° - \theta)$ কোণের অনুপাত সম্বন্ধে বিশদ আলোচনা হইয়া গিয়াছে। পুনরালোচনা প্রসঙ্গে অনুপাতগুলির মান নিম্নে আবার বিবৃত হইল।

$\sin(90° - \theta) = \cos\theta$; $\quad \sec(90° - \theta) = \operatorname{cosec}\theta$;

$\cos(90° - \theta) = \sin\theta$; $\quad \operatorname{cosec}(90° - \theta) = \sec\theta$;

$\tan(90° - \theta) = \cot\theta$; $\quad \cot(90° - \theta) = \tan\theta.$

5·4. $(90°+\theta)$ কোণের ত্রৈকোণমিতিক অনুপাত :

পূরক কোণের সূত্র প্রয়োগ করিয়া অনায়াসেই $(90°+\theta)$-এর অনুপাতগুলি নির্ণয় করা যায়। কারণ $(90°+\theta)$ কোণ $(-\theta)$-এর পূরক।

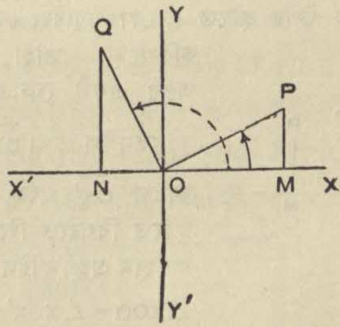
$$\therefore \quad \sin(90°+\theta)=\sin\{90°-(-\theta)\}=\cos(-\theta)=\cos\theta\ ;$$
$$\cos(90°+\theta)=\cos\{90°-(-\theta)\}=\sin(-\theta)=-\sin\theta\ ;$$
$$\tan(90°+\theta)=\tan\{90°-(-\theta)\}=\cot(-\theta)=-\cot\theta\ ;$$
$$\cot(90°+\theta)=\cot\{90°-(-\theta)\}=\tan(-\theta)=-\tan\theta\ ;$$
$$\sec(90°+\theta)=\sec\{90°-(-\theta)\}=\text{cosec}(-\theta)=-\text{cosec}\,\theta\ ;$$
$$\text{cosec}(90°+\theta)=\text{cosec}\{90°-(-\theta)\}=\sec(-\theta)=\sec\theta.$$

বিকল্প জ্যামিতিক প্রমাণ

আবর্তনশীল $\overline{OP}$ রেখা $\overline{OX}$-এর উপর অবস্থান হইতে θ কোণে ঘুরিয়া যেন $\angle XOP$ উৎপন্ন করিয়াছে এবং $\overline{OP}$-এর সমান দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট অপর একটি রেখা $\overline{OP}$-র অবস্থান হইতে 90° কোণ ঘুরিয়া যেন $\overline{OQ}$ অবস্থান গ্রহণ করিয়াছে।

তাহা হইলে, $\angle XOQ=\angle XOP+\angle POQ=90°+\theta.$

P ও Q হইতে $\overleftrightarrow{XOX'}$-এর উপর যথাক্রমে $\overline{PM}$ ও $\overline{QN}$ লম্ব অঙ্কিত হইল।



এখন $\overrightarrow{OY} \parallel \overline{NO}$ বলিয়া $\angle OQN=$ একান্তর $\angle YOQ$.

$\therefore$ $\triangle POM$ ও $\triangle OQN$-এর মধ্যে

$\overline{OP}\cong\overline{OQ}$, $\angle PMO=\angle QNO$ [প্রত্যেকটি এক সমকোণ বলিয়া]

এবং $\angle POM=90°-\angle POY=\angle POQ-\angle POY=\angle YOQ=\angle OQN.$

$\therefore$ $\triangle POM\cong\triangle OQN.$

$\therefore$ $OM=QN$ এবং সাংখ্যমানে $PM=ON$; কিন্তু PM ধনাত্মক এবং ON ঋণাত্মক বলিয়া $ON=-PM.$

$$\therefore \quad \sin(90°+\theta)=\sin XOQ=\frac{QN}{OQ}=\frac{OM}{OP}=\cos\theta\ ;$$

$$\cos(90^\circ+\theta)=\cos XOQ=\frac{ON}{OQ}=\frac{-PM}{OP}=-\sin\theta\ ;$$

$$\tan(90^\circ+\theta)=\tan XOQ=\frac{QN}{ON}=\frac{OM}{-PM}=-\cot\theta\ ;$$

$$\cot(90^\circ+\theta)=\cot XOQ=\frac{ON}{QN}=\frac{-PM}{OM}=-\tan\theta\ ;$$

$$\sec(90^\circ+\theta)=\sec XOQ=\frac{OQ}{ON}=\frac{OP}{-PM}=-\operatorname{cosec}\theta\ ;$$

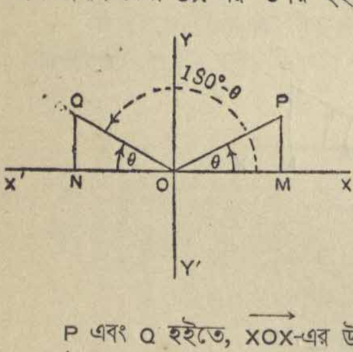
$$\operatorname{cosec}(90^\circ+\theta)=\operatorname{cosec} XOQ=\frac{OQ}{QN}=\frac{OP}{OM}=\sec\theta.$$

উদাহরণ ঃ

$\sin 120^\circ=\sin(90^\circ+30^\circ)=\cos 30^\circ$;
$\cos 120^\circ=\cos(90^\circ+30^\circ)=-\sin 30^\circ$;
$\tan 120^\circ=\tan(90^\circ+30^\circ)=-\cot 30^\circ$; ইত্যাদি।

5·5. $180^\circ-\theta$ এবং θ কোণদ্বয়ের অর্থাৎ সম্পূরক কোণদ্বয়ের ত্রৈকোণমিতিক অনুপাতের সম্পর্ক।

যদি θ একটি সূক্ষ্মকোণ হয়, তাহা হইলে $180^\circ-\theta$ ইহার সম্পূরক কোণ। একটি আবর্তনশীল রেখা $\overrightarrow{OX}$-এর উপর হইতে θ কোণ ঘুরিয়া যেন $\overline{OP}$ অবস্থান গ্রহণ করিয়াছে। তাহা হইলে $\angle XOP=\theta$. অপর একটি $\overline{OP}$-এর সমান দৈর্ঘ্য-বিশিষ্ট আবর্তনশীল রেখা $\overrightarrow{OX}$ হইতে ঘুরিতে আরম্ভ করিয়া $\overrightarrow{OX'}$ পর্যন্ত যাইয়া আবার $\overrightarrow{OX'}$ হইতে বিপরীত দিকে θ কোণে ঘুরিয়া $\overline{OQ}$ অবস্থান গ্রহণ করিল ; তাহা হইলে,



$\angle XOQ=\angle XOX'-\angle X'OQ=180^\circ-\theta.$

P এবং Q হইতে, $\overleftrightarrow{XOX}$-এর উপর যথাক্রমে $\overline{PM}$ এবং $\overline{QN}$ লম্ব টানা হইল। তাহা হইলে PMO এবং QNO ত্রিভুজদ্বয় সমকোণী এবং অতিভুজ $\overline{OP}$ ও অতিভুজ $\overline{OQ}$ উভয়ই ধনাত্মক এবং সমান।

$\therefore$ উক্ত ত্রিভুজদ্বয়ের বাহু $\overline{OP}\cong\overline{OQ}$;
$\angle POM=\angle QON$; $\angle PMO=\angle QNO=$ এক সমকোণ ;
$\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম।
$\therefore$ সাংখ্যমান হিসাবে, $PM=QN$, এবং উভয়ই ধনাত্মক ;
এবং $\overline{OM}\cong\overline{ON}$, কিন্তু $\overline{OM}$ ধনাত্মক এবং $\overline{ON}$ ঋণাত্মক।
অর্থাৎ $ON=-OM$.

$$\therefore \quad \sin(180^\circ - \theta) = \frac{QN}{OQ} = \frac{PM}{OP} = \sin\theta;$$

$$\cos(180^\circ - \theta) = \frac{ON}{OQ} = \frac{-OM}{OP} = -\cos\theta;$$

$$\tan(180^\circ - \theta) = \frac{QN}{ON} = \frac{PM}{-OM} = -\tan\theta;$$

$$\cot(180^\circ - \theta) = \frac{ON}{QN} = \frac{-OM}{PM} = -\cot\theta;$$

$$\sec(180^\circ - \theta) = \frac{OQ}{ON} = \frac{OP}{-OM} = -\sec\theta;$$

$$\operatorname{cosec}(180^\circ - \theta) = \frac{OQ}{QN} = \frac{OP}{PM} = \operatorname{cosec}\theta.$$

উদাহরণ :

$\sin 120^\circ = \sin(180^\circ - 60^\circ) = \sin 60^\circ,$

$\cos 120^\circ = \cos(180^\circ - 60^\circ) = -\cos 60^\circ,$

$\tan 120^\circ = \tan(180^\circ - 60^\circ) = -\tan 60^\circ,$

$\sin 150^\circ = \sin(180^\circ - 30^\circ) = \sin 30^\circ,$

$\cos 150^\circ = \cos(180^\circ - 30^\circ) = -\cos 30^\circ,$

$\tan 150^\circ = \tan(180^\circ - 30^\circ) = -\tan 30^\circ,$

$\sin 180^\circ = \sin(180^\circ - 0^\circ) = \sin 0^\circ,$

$\cos 180^\circ = \cos(180^\circ - 0^\circ) = -\cos 0^\circ,$

ইত্যাদি।

5·6. $(180^\circ + \theta)$ কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত : $(180^\circ + \theta)$ কোণ, $(-\theta)$ কোণের সম্পূরক। $\therefore$ সম্পূরক কোণের সূত্র প্রয়োগ করিয়া

$\sin(180^\circ + \theta) = \sin\{180^\circ - (-\theta)\} = \sin(-\theta) = -\sin\theta;$

$\cos(180^\circ + \theta) = \cos\{180^\circ - (-\theta)\} = -\cos(-\theta) = -\cos\theta;$

$\tan(180^\circ + \theta) = \tan\{180^\circ - (-\theta)\} = -\tan(-\theta) = \tan\theta;$

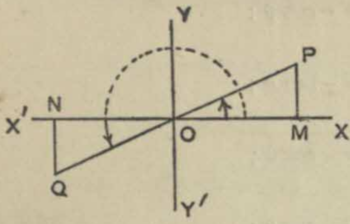
$\cot(180^\circ + \theta) = \cot\{180^\circ - (-\theta)\} = -\cot(-\theta) = \cot\theta;$

$\sec(180^\circ + \theta) = \sec\{180^\circ - (-\theta)\} = -\sec(-\theta) = -\sec\theta;$

$\operatorname{cosec}(180^\circ + \theta) = \operatorname{cosec}\{180^\circ - (-\theta)\} = \operatorname{cosec}(-\theta) = -\operatorname{cosec}\theta.$

বিকল্প (জ্যামিতিক) প্রমাণ

আবর্তনশীল একটি রেখা $\angle XOP = \theta$ কোণ ঘুরিয়া $\overline{OP}$ অবস্থান গ্রহণ করিল,



এবং অপর একটি সমান দৈর্ঘ্য-বিশিষ্ট আবর্তনশীল রেখা আরও ঘুরিয়া এমনভাবে $\overline{OQ}$ অবস্থান গ্রহণ করিল, যেন POQ একই সরল রেখা হয়। তাহা হইলে $\angle XOQ = \angle QOP + \angle XOP$
$= 180° + \theta.$

P এবং Q হইতে $\overleftrightarrow{XOX'}$-এর উপর যথাক্রমে $\overline{PM}$ এবং $\overline{QN}$ লম্ব পাতিত করা হইল। সমকোণী ত্রিভুজদ্বয় PMO এবং QNO-এর অতিভুজ $\overline{OP}$ এবং অতিভুজ $\overline{OQ}$ উভয়ই সমান এবং ধনাত্মক।

$\therefore$ উক্ত ত্রিভুজদ্বয়ের, বাহু $\overline{OP} \cong$ বাহু $\overline{OQ}$,
$\angle PMO = \angle QNO =$ এক সমকোণ,
$\angle POM = \angle QON.$

$\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম।

$\therefore$ সাংখ্যমান হিসাবে PM = QN, কিন্তু PM ধনাত্মক এবং QN ঋণাত্মক ;
এবং " " OM = ON, কিন্তু OM ধনাত্মক এবং ON ঋণাত্মক।

$$\therefore \sin(180° + \theta) = \frac{QN}{OQ} = \frac{-PM}{OP} = -\sin\theta ;$$

$$\cos(180° + \theta) = \frac{ON}{OQ} = \frac{-OM}{OP} = -\cos\theta ;$$

$$\tan(180° + \theta) = \frac{QN}{ON} = \frac{-PM}{-OM} = \tan\theta ;$$

$$\cot(180° + \theta) = \frac{ON}{QN} = \frac{-OM}{-PM} = \cot\theta ;$$

$$\sec(180° + \theta) = \frac{OQ}{ON} = \frac{OP}{-OM} = -\sec\theta ;$$

$$\operatorname{cosec}(180° + \theta) = \frac{OQ}{QN} = \frac{OP}{-PM} = -\operatorname{cosec}\theta.$$

উদাহরণ ঃ

$\sin 240° = \sin(180° + 60°) = -\sin 60°$,
$\cos 240° = \cos(180° + 60°) = -\cos 60°$,
$\tan 240° = \tan(180° + 60°) = \tan 60°$,
ইত্যাদি।

5·7. $270°-\theta$ এবং θ কোণদ্বয়ের ত্রৈকোণমিতিক অনুপাতের সম্পর্ক।

$$\sin(270°-\theta)=\sin[180°+(90°-\theta)]$$
$$=-\sin(90°-\theta)=-\cos\theta;$$
$$\cos(270°-\theta)=\cos[180°+(90°-\theta)]$$
$$=-\cos(90°-\theta)=-\sin\theta;$$
$$\tan(270°-\theta)=\tan[180°+(90°-\theta)]$$
$$=\tan(90°-\theta)=\cot\theta;$$
$$\cot(270°-\theta)=\cot[180°+(90°-\theta)]$$
$$=\cot(90°-\theta)=\tan\theta;$$
$$\sec(270°-\theta)=\sec[180°+(90°-\theta)]$$
$$=-\sec(90°-\theta)=-\text{cosec}\,\theta;$$
$$\text{cosec}(270°-\theta)=\text{cosec}[180°+(90°-\theta)]$$
$$=-\text{cosec}(90°-\theta)=-\sec\theta.$$

উদাহরণ ঃ

$$\sin 240°=\sin(270°-30°)=-\cos 30°,$$
$$\cos 240°=\cos(270°-30°)=-\sin 30°,$$
$$\tan 240°=\tan(270°-30°)=\cot 30°,$$
$$\cot 240°=\cot(270°-30°)=\tan 30°,$$

ইত্যাদি।

5·8. $270°+\theta$ এবং θ কোণদ্বয়ের ত্রৈকোণমিতিক অনুপাতের সম্পর্ক।

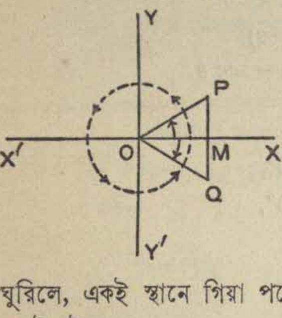
$$\sin(270°+\theta)=\sin[180°+(90°+\theta)]$$
$$=-\sin(90°+\theta)=-\cos\theta;$$
$$\cos(270°+\theta)=\cos[180°+(90°+\theta)]$$
$$=-\cos(90°+\theta)=-(-\sin\theta)=\sin\theta;$$
$$\tan(270°+\theta)=\tan[180°+(90°+\theta)]$$
$$=\tan(90°+\theta)=-\cot\theta;$$
$$\cot(270°+\theta)=\cot[180°+(90°+\theta)]$$
$$=\cot(90°+\theta)=-\tan\theta;$$
$$\sec(270°+\theta)=\sec[180°+(90°+\theta)]$$
$$=-\sec(90°+\theta)=-(-\text{cosec}\,\theta)=\text{cosec}\,\theta;$$
$$\text{cosec}(270°+\theta)=\text{cosec}[180°+(90°+\theta)]$$
$$=-\text{cosec}(90°+\theta)=-\sec\theta.$$

উদাহরণ ঃ

$$\sin 315° = \sin (270° + 45°) = -\cos 45°,$$
$$\cos 315° = \cos (270° + 45°) = \sin 45°,$$
$$\tan 315° = \tan (270° + 45°) = -\cot 45°,$$
ইত্যাদি।

5·9. $360° - \theta$ এবং θ কোণদ্বয়ের ত্রৈকোণমিতিক অনুপাতের সম্পর্ক।

$(360° - \theta)$-কে $\{180° + 180° - \theta\}$ আকারে লিখিয়া সম্পূরক কোণের সূত্র অনুসারে উহার অনুপাতগুলি সহজেই নির্ণয় করা যায়। জ্যামিতিক নিয়মে $(360° - \theta)$-এর অনুপাত নিম্নরূপে নির্ণয় করা যায় :—একটি ঘূর্ণ্যমান রেখা θ কোণ ঘুরিয়া $\overline{OP}$ অবস্থান গ্রহণ করিল ; ফলে $\angle XOP = \theta$; আবার অপর একটি সমান দৈর্ঘ্য-বিশিষ্ট ঘূর্ণ্যমান রেখা $\overrightarrow{OX}$ হইতে আরম্ভ করিয়া O বিন্দুর চতুর্দিকে একবার প্রদক্ষিণ করিয়া $\overrightarrow{OX}$-এ আসিয়া মিশিল এবং তাহার পর বিপরীত দিকে θ কোণ ঘুরিয়া $\overline{OQ}$ অবস্থান গ্রহণ করিল। তাহা হইলে $\angle XOQ = 360° - \theta$, এবং ঘূর্ণ্যমান রেখা $\overline{OQ}$ $(-\theta)$ অথবা $(360° - \theta)$ ঘুরিলে, একই স্থানে গিয়া পড়ে। সুতরাং, উভয় কোণের ত্রৈকোণমিতিক অনুপাত একই হইবে।



$$\therefore \quad \sin (360° - \theta) = \sin (-\theta) = -\sin \theta ;$$
$$\cos (360° - \theta) = \cos (-\theta) = \cos \theta ;$$
$$\tan (360° - \theta) = \tan (-\theta) = -\tan \theta ;$$
$$\cot (360° - \theta) = \cot (-\theta) = -\cot \theta ;$$
$$\sec (360° - \theta) = \sec (-\theta) = \sec \theta ;$$
$$\operatorname{cosec} (360° - \theta) = \operatorname{cosec} (-\theta) = -\operatorname{cosec} \theta.$$

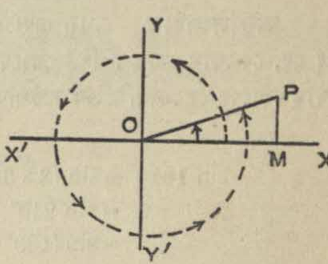
উদাহরণ ঃ

$$\sin 315° = \sin (360° - 45°) = -\sin 45°.$$
$$\cos 315° = \cos (360° - 45°) = \cos 45°.$$
$$\tan 315° = \tan (360° - 45°) = -\tan 45°.$$
$$\cot 315° = \cot (360° - 45°) = -\cot 45°.$$
$$\sec 315° = \sec (360° - 45°) = \sec 45°.$$
$$\operatorname{cosec} 315° = \operatorname{cosec} (360° - 45°) = -\operatorname{cosec} 45°.$$

5·10. $360°+\theta$ এবং θ কোণদ্বয়ের ত্রৈকোণমিতিক অনুপাতের সম্পর্ক।

$(360°+\theta)$ কোণকে $\{180°+(180°+\theta)\}$ রূপে লিখিয়া সম্পূরক কোণের সূত্র দ্বারা অনায়াসে উহার অনুপাতসমূহ নির্ণয় করা যায়। নিম্নে জ্যামিতিক নিয়মে উহার অনুপাতগুলি নির্ণয় করা হইতেছে।

একটি ঘূর্ণ্যমান রেখা θ কোণ ঘুরিয়া $\overline{OP}$ অবস্থান গ্রহণ করিল; ফলে $\angle XOP=\theta$. আবার এই ঘূর্ণ্যমান রেখাই $\overline{OP}$ অবস্থান হইতে ঘুরিতে আরম্ভ করিয়া, O বিন্দুর চতুর্দিকে একবার প্রদক্ষিণ করিয়া পুনরায় $\overline{OP}$ অবস্থানে প্রত্যাবর্তন করিল; তাহা হইলে এই ঘূর্ণনের পরে $\angle XOP$-এর পরিমাণ $360°+\theta$ হইল।



সুতরাং, ঘূর্ণ্যমান রেখা $(360°+\theta)$ অথবা θ ঘুরিলে একই স্থানে গিয়া পড়ে।

অতএব, উভয়ের ত্রৈকোণমিতিক অনুপাত একই।

$\therefore \quad \sin(360°+\theta)=\sin\theta\ ;\ \cos(360°+\theta)=\cos\theta\ ;$
$\tan(360°+\theta)=\tan\theta\ ;\ \cot(360°+\theta)=\cot\theta\ ;$
$\sec(360°+\theta)=\sec\theta\ ;\ \text{cosec}\,(360°+\theta)=\text{cosec}\,\theta.$

উদাহরণঃ

$\sin 390°=\sin(360°+30°)=\sin 30°,$
$\cos 390°=\cos(360°+30°)=\cos 30°,$
$\tan 390°=\tan(360°+30°)=\tan 30°,$
ইত্যাদি।

5·11. 5·10. (i)-এ যদি ঘূর্ণ্যমান রেখা θ কোণ ঘুরিয়া যে-কোনও পাদে $\overline{OP}$-তে অবস্থান করে এবং পরে $\overline{OP}$ অবস্থান হইতে ঘুরিতে আরম্ভ করিয়া O-বিন্দুর চতুর্দিকে একবার, দুইবার, তিনবার ইত্যাদি করিয়া পূর্ণসংখ্যকবার ঘুরিয়া আসে, তবে $360°+\theta$, $2\times360°+\theta$, $3\times360°+\theta$, ইত্যাদি পরিমাণের কোণ উৎপন্ন করিয়া পুনরায় $\overline{OP}$-তে অবস্থান করে। অতএব, $(360°+\theta)$, $(2\times360°+\theta)$, $(3\times360°+\theta)$, ইত্যাদি কোণসমূহের এবং θ কোণের ত্রৈকোণমিতিক অনুপাত একই হইবে; অর্থাৎ 360°-এর যে-কোন পূর্ণসংখ্যক গুণ, যে-কোন কোণের পরিমাণের সহিত যোগ করিলে, অথবা যে-কোন কোণের পরিমাণ হইতে বিয়োগ করিলে প্রাপ্ত কোণের ত্রৈকোণমিতিক অনুপাতগুলি মূলকোণের অনুপাতের সমান হইবে।

অনুসিদ্ধান্ত 1. n একটি ধনাত্মক বা ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা হইলে, $(n.360° \pm \theta)$ বা $(2n\pi \pm \theta)$ কোণের ত্রৈকোণমিতিক অনুপাতগুলি $\pm \theta$ কোণের অনুপাতগুলির সমান হইবে।

অর্থাৎ $\sin(2n\pi \pm \theta) = \sin(\pm\theta)$;
$\cos(2n\pi \pm \theta) = \cos(\pm\theta)$;
$\tan(2n\pi \pm \theta) = \tan(\pm\theta)$; ইত্যাদি।

অনুসিদ্ধান্ত 2. 5·10 এবং 5·11 অনুচ্ছেদদ্বয় হইতে ইহা স্পষ্টই প্রতীয়মান হয় যে, যে-কোন মান-বিশিষ্ট কোণের ত্রৈকোণমিতিক অনুপাত, 0° হইতে 45°-এর মধ্যস্থ কোণের ত্রৈকোণমিতিক অনুপাতরূপে প্রকাশ করা যায়।

যথা—

$$\sin 1320° = \sin[3 \times 360° + 240°]$$
$$= \sin 240°$$
$$= \sin(180° + 60°) = -\sin 60° = -\cos 30° ;$$
$$\cos(-1230°) = \cos 1230° = \cos(3 \times 360° + 150°)$$
$$= \cos 150° = \cos(180° - 30°) = -\cos 30° ;$$
$$\tan 1760° = \tan(4 \times 360° + 320°)$$
$$= \tan 320° = \tan(360° - 40°)$$
$$= \tan(-40°) = -\tan 40° ;$$
$$\operatorname{cosec}(-1460°) = -\operatorname{cosec} 1460°$$
$$= -\operatorname{cosec}(4 \times 360° + 20°)$$
$$= -\operatorname{cosec} 20° ;$$ ইত্যাদি।

5·12. চিহ্নের দ্ব্যর্থতা (Ambiguity of signs)।

আমরা দেখিয়াছি যে, θ-এর যে-কোন মানে

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1, \ \sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta, \ \operatorname{cosec}^2\theta = 1 + \cot^2\theta.$$

$$\therefore \cos\theta = \pm\sqrt{1 - \sin^2\theta}, \quad \sec\theta = \pm\sqrt{1 + \tan^2\theta},$$
$$\operatorname{cosec}\theta = \pm\sqrt{1 + \cot^2\theta}.$$

$\therefore$ $\sin\theta$-এর মান দেওয়া থাকিলে, $\cos\theta$-এর মান দুইটি হইবে—একটি ধনাত্মক, একটি ঋণাত্মক।

θ কোন্ পাদে অবস্থিত জানিলে প্রকৃত চিহ্নটি নির্ণয় করা যায়। অনুরূপে দ্বিতীয় ও তৃতীয় সূত্রটি প্রয়োগের সময়ে যেসকল চিহ্নের দ্ব্যর্থতা দেখা দিবে, তথায় অনুরূপভাবে সমাধান করিতে হইবে।

মনে কর, $\sin 126° 53' = \frac{4}{5}$.

$\because$ 126° 53′, দ্বিতীয় পাদে অবস্থিত ; $\therefore$ ইহার cosine-এর মান ঋণাত্মক হইবে ; $\therefore$ $\cos 126° 53' = \sqrt{1-\sin^2 126° 53'}$

$$= -\sqrt{1-\tfrac{16}{25}} = -\tfrac{3}{5}.$$

আবার cot 126° 53′-এর মান ঋণাত্মক বলিয়া,

$$\cot 126° 53' = -\sqrt{\operatorname{cosec}^2 126° 53' - 1}$$
$$= -\sqrt{(\tfrac{5}{4})^2 - 1} = -\sqrt{\tfrac{9}{16}} = -\tfrac{3}{4}.$$

5·13. 0°, 30°, 45°, 60° এবং 90°-এর ত্রৈকোণমিতিক অনুপাতের সাহায্যে কয়েকটি বিশেষ কোণের ত্রৈকোণমিতিক অনুপাতের মান নির্ণয়।

$$\sin 120° = \sin(180° - 60°) = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2};$$
$$\cos 120° = \cos(180° - 60°) = -\cos 60° = -\tfrac{1}{2};$$
$$\tan 120° = \tan(180° - 60°) = -\tan 60° = -\sqrt{3};$$

ইত্যাদি।

$$\sin 150° = \sin(180° - 30°) = \sin 30° = \tfrac{1}{2};$$
$$\cos 150° = \cos(180° - 30°) = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2};$$
$$\tan 150° = \tan(180° - 30°) = -\tan 30° = -\frac{1}{\sqrt{3}};$$

ইত্যাদি।

$$\sin 180° = \sin(180° - 0°) = \sin 0° = 0;$$
$$\cos 180° = \cos(180° - 0°) = -\cos 0° = -1;$$
$$\tan 180° = \tan(180° - 0°) = -\tan 0° = 0;$$ ইত্যাদি।
$$\sin 270° = \sin(180° + 90°) = -\sin 90° = -1;$$
$$\cos 270° = \cos(180° + 90°) = -\cos 90° = 0;$$ ইত্যাদি।

উদাহরণমালা

উদা. 1. প্রমাণ কর যে,

(i) $\cos(-1305)° = -\frac{1}{\sqrt{2}}$; (ii) $\tan 840° = -\sqrt{3}$.

(i) $\cos(-1305°) = \cos 1305° = \cos(3 \times 360° + 225°) = \cos 225°$

$$= \cos(180° + 45°) = -\cos 45° = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

(ii) $\tan 840° = \tan(2 \times 360° + 120°) = \tan 120°$

$$= \tan(180° - 60°) = -\tan 60° = -\sqrt{3}.$$

উদা. 2. $\operatorname{cosec} 202^\circ 37' = -\frac{13}{5}$ হইলে, $\cos 202^\circ 37'$ এবং $\cot 202^\circ 37$-এর মান নির্ণয় কর।

$202^\circ\ 37'\ (=180^\circ+22^\circ\ 37')$ কোণটি তৃতীয় পাদে অবস্থিত বলিয়া $\cos 202^\circ 37'$ ঋণাত্মক এবং $\cot 202^\circ 37'$ ধনাত্মক।

$$\therefore\ \cos 202^\circ 37' = -\sqrt{1-\sin^2 202^\circ 37'}$$
$$= -\sqrt{1-(-\tfrac{5}{13})^2} = -\tfrac{12}{13};$$
$$\cot 202^\circ 37' = +\sqrt{\operatorname{cosec}^2 202^\circ 37' - 1}$$
$$= +\sqrt{(-\tfrac{13}{5})^2-1} = \tfrac{12}{5}.$$

উদা. 3. প্রমাণ কর যে,

$$\sin^2 60^\circ + \cos^2 150^\circ + \tan^2 120^\circ + \cos 180^\circ - \tan 135^\circ = 4\tfrac{1}{2}.$$

বাম পক্ষ $= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + (-\sqrt{3})^2 + (-1) - (-1)$

$= \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + 3 - 1 + 1$

$= 4\frac{1}{2}.$

উদা. 4. $\sin(-1230^\circ) - \cos\left\{(2n+1)\pi + \frac{\pi}{3}\right\}$-এর মান নির্ণয় কর।

প্রদত্ত রাশি $= -\sin 1230^\circ - \cos\left(2n\pi + \pi + \frac{\pi}{3}\right)$

$= -\sin(3\times 360^\circ + 150^\circ) - \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)$

$= -\sin 150^\circ + \cos\frac{\pi}{3}$

$= -\sin(180^\circ - 30^\circ) + \cos\frac{\pi}{3}$

$= -\sin 30^\circ + \cos\frac{\pi}{3}$

$= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0.$

উদা. 5. n একটি পূর্ণসংখ্যা হইলে, $\tan\left\{\frac{n\pi}{2} + (-1)^n\frac{\pi}{4}\right\}$-এর মান নির্ণয় কর।

(i) মনে কর, n = একটি যুগ্মসংখ্যা $= 2m$.

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $= \tan\left(m\pi + \frac{\pi}{4}\right)$, যেহেতু $(-1)^{2m} = +1.$

এখন, m যুগ্মসংখ্যা হইলে, $m\pi + \frac{\pi}{4}$ প্রথম পাদে অবস্থিত ;

এখন m বিযুগ্মসংখ্যা হইলে, $m\pi + \frac{\pi}{4}$ তৃতীয় পাদে অবস্থিত।

∴ উভয় ক্ষেত্রেই $\tan\left(m\pi + \frac{\pi}{4}\right) = 1.$

(ii) মনে কর, n = বিযুগ্মসংখ্যা $= 2m + 1$.

∴ প্রদত্ত রাশি $= \tan\left(m\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$ $[\because (-1)^{2m+1} = -1]$

$$= \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \cot\frac{\pi}{4} = 1.$$

উদা. 6. প্রমাণ কর যে,

$$\frac{\sin 250° + \tan 290°}{\cot 200° + \cos 340°} = -1.$$

বাম পক্ষের লব $= \sin(180° + 70°) + \tan(270° + 20°)$
$= -\sin 70° - \cot 20°$;

এবং বাম পক্ষের হর $= \cot(180° + 20°) + \cos(270° + 70°)$
$= \cot 20° + \sin 70°$;

∴ বাম পক্ষ $= \frac{-(\sin 70° + \cot 20°)}{(\sin 70° + \cot 20°)} = -1.$

উদা. 7. $\tan\theta = -\sqrt{3}$ এবং $0° < \theta < 360°$ হইলে, θ-এর মান নির্ণয় কর।

$$\tan\theta = -\sqrt{3} = -\tan 60° = \tan(180° - 60°),$$

অথবা, $\tan(360° - 60°)$;

∴ $\theta = 120°$ বা $300°$.

উদা. 8. $\cos\theta = -\frac{1}{2}$ এবং $450° < \theta < 540°$ হইলে, θ-এর মান নির্ণয় কর।

$$\cos\theta = -\tfrac{1}{2} = -\cos 60° = \cos(180° - 60°)$$
$$= \cos(360° + 180° - 60°) = \cos 480° ;$$

∴ $\theta = 480°$.

উদা. 9. $2\sin^2\theta + 3\cos\theta = 0$ এবং $0° < \theta < 360°$ হইলে, θ-এর মান নির্ণয় কর।

$2\sin^2\theta + 3\cos\theta = 0$,

বা, $2(1 - \cos^2\theta) + 3\cos\theta = 0$, বা, $2\cos^2\theta - 3\cos\theta - 2 = 0$,

বা, $(\cos\theta - 2)(2\cos\theta + 1) = 0$; কিন্তু $\cos\theta$ কখনও 1 অপেক্ষা বড় হইতে পারে না।

$\therefore\ 2\cos\theta+1=0$;

$\therefore\ \cos\theta=-\frac{1}{2}=-\cos 60^\circ=\cos(180^\circ-60^\circ)$,

বা, $\cos(180^\circ+60^\circ)$;

$\therefore\ \theta=120^\circ$ বা 240°.

উদা. 10. A, B, C, D একটি সামতলিক চতুর্ভুজের চারিটি কোণ, প্রমাণ কর যে, $\cos\frac{A+C}{2}+\cos\frac{B+D}{2}=0$.

$$A+B+C+D=360^\circ;$$

$$\therefore\ \frac{A+B+C+D}{2}=180^\circ;$$

$$\therefore\ \frac{A+C}{2}=180^\circ-\frac{B+D}{2};$$

$$\therefore\ \cos\frac{A+C}{2}=\cos\left(180^\circ-\frac{B+D}{2}\right)=-\cos\frac{B+D}{2};$$

$$\therefore\ \cos\frac{A+C}{2}+\cos\frac{B+D}{2}=-\cos\frac{B+D}{2}+\cos\frac{B+D}{2}=0.$$

উদা. 11. $\cos\theta-\sin\theta=\sqrt{2}\sin\theta$ হইলে, প্রমাণ কর যে,

$$\cos\theta+\sin\theta=\sqrt{2}\cos\theta.$$

$$\cos\theta=(\sqrt{2}+1)\sin\theta;$$

$$\therefore\ (\sqrt{2}-1)\cos\theta=(2-1)\sin\theta;$$

$$\therefore\ \sqrt{2}\cos\theta=\sin\theta+\cos\theta.$$

উদা. 12. প্রমাণ কর যে, x-এর কোন বাস্তব মানের দ্বারা $\sin\theta=x+\frac{1}{x}$ সমীকরণটি সিদ্ধ হয় না।

x বাস্তব হইলে $(x-1)^2$ ধনাত্মক, অথবা, $=0$,

অর্থাৎ $(x-1)^2\geq 0$.

$\therefore\ x^2+1\geq 2x$;

$\therefore\ x+\frac{1}{x}\geq 2$. (x দ্বারা উভয় পক্ষকে ভাগ করিয়া)

$\therefore\ \sin\theta=x+\frac{1}{x}$ অসম্ভব, কারণ $\sin\theta$-এর মান 1 অপেক্ষা বড় হইতে পারে না।

প্রশ্নমালা 5

1. নিম্নলিখিত ত্রৈকোণমিতিক অনুপাতগুলির মান নির্ণয় কর (Find the value of the following trigonometrical ratios) :

(i) $\sin(-3330^\circ)$; (ii) $\cos(-840^\circ)$; (iii) $\cot(-1380^\circ)$.

প্রমাণ কর যে,

2. $\sin 420^\circ \cos 390^\circ + \cos(-300^\circ)\sin(-330^\circ) = 1$.

3. $\cos 570^\circ \sin 510^\circ - \sin 330^\circ \cos 390^\circ = 0$.

4. $\cot A + \tan(180^\circ + A) + \tan(90^\circ + A) + \tan(360^\circ - A) = 0$.

5. $\sec(270^\circ - \theta)\sec(90^\circ - \theta) - \tan(270^\circ - \theta)\tan(90^\circ + \theta) + 1 = 0$.

6. $\cot\frac{17\pi}{3} - \tan\frac{17\pi}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

7. $4\cos^2 210^\circ - \tan 315^\circ + 4\operatorname{cosec} 90^\circ = 8$.

8. $\sin^2 240^\circ - 3\tan^2 300^\circ - 2\sin^2 120^\circ = -\frac{39}{4}$.

9. $\cos^2 1485^\circ - \tan^2(-840^\circ) + \operatorname{cosec} 2130^\circ = -\frac{9}{2}$.

10. $$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\sin\left(3\frac{\pi}{2} - \theta\right)\cot\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)}{\sin\theta\cos\theta} = 1.$$

45° অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর ধনাত্মক কোণের অনুপাতে নিম্নলিখিত কোণগুলিকে প্রকাশ কর (Express the following angles in terms of a positive angle less than 45°) :

11. $\sin(-67^\circ)$.
12. $\cos(-86^\circ)$.
13. $\tan 139^\circ$.
14. $\sin 160^\circ$.
15. $\cos 288^\circ$.
16. $\tan(-263^\circ)$.
17. $\operatorname{cosec}(867^\circ)$.
18. $\sec(-930^\circ)$.
19. $\tan 1163^\circ$.
20. $\cot(-1056^\circ)$.

21. $A = \frac{5\pi}{4}$ হইলে, $\cos A - \sin A$-এর মান নির্ণয় কর।

22. $A = \frac{11\pi}{3}$ হইলে, $\tan A + \cot A$-এর মান নির্ণয় কর।

23. যখন $A = 278^\circ$ এবং -1125°, $\sin A + \cos A$-এর চিহ্ন কি হইবে ?

24. যখন $A = 215^\circ$ এবং -457°, $\sin A - \cos A$-এর চিহ্ন কি হইবে ?

25. $\sec A = -\frac{25}{7}$ এবং $180^\circ < A < 270^\circ$ হইলে, $\cot A$-এর মান নির্ণয় কর।

26. $3 \tan \theta = 4$ এবং $180° < A < 270°$ হইলে, প্রমাণ কর যে,
$$2 \cot \theta - 5 \cos \theta + \sin \theta = 3\tfrac{7}{10}.$$

যদি A, B, C কোন ত্রিভুজের তিনটি কোণ হয়, প্রমাণ কর যে
(If A, B, C are the three angles of a triangle, prove that),

27. $\tan A = \tan B + \tan C.$

28. $\cot A \tan (B + C) - \cos A \sec (B + C) = 0.$

29. $\sin A \cos (B + C) + \cos A \sin (B + C) = 0.$

30. $\sin (B + C) \sin A - \cos (B + C) \cos A = 1.$

31. $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C.$

32. $\dfrac{\tan (B + C) + \tan (C + A) + \tan (A + B)}{\tan (\pi - A) + \tan (2\pi - B) + \tan (3\pi - C)} = 1.$

33. প্রমাণ কর : $\cos^2 (90° + A) + \sin^2 (270° - A)$
$- \cot (90° + A) \cot (270° - A) = \sec^2 A.$

34. ABCD একটি চতুর্ভুজ, প্রমাণ কর যে,
$$\tan \tfrac{1}{2} (A + B) + \tan \tfrac{1}{2} (C + D) = 0.$$

35. ABCD একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ, প্রমাণ কর যে,
(i) $\cos A + \cos B + \cos C + \cos D = 0.$
(ii) $\cot A + \cot B + \cot C + \cot D = 0.$

$0° < \theta < 360°$ হইলে, নিম্নলিখিত সমীকরণগুলি হইতে θ-এর মান নির্ণয় কর :

36. $\cos \theta + \sqrt{3} \sin \theta = 2.$ [C. U. 1936]

37. $\sin \theta = \cos \theta.$

38. $2 \cos \theta + 5 \tan \theta = 4 \sec \theta.$

39. $\cos^2\theta - \sin^2\theta = 1.$

40. $3(\sec^2\theta + \tan^2\theta) = 5.$

41. $\cot \theta + \tan \theta = 2 \sec \theta.$

42. প্রমাণ কর যে, $x = y$ হইলেই সমীকরণ
$\sec^2\theta = \dfrac{4xy}{(x + y)^2}$ সম্ভব এবং x-এর যে-কোন বাস্তব মানের জন্য
$\cos \theta = x + \dfrac{1}{x}$ অসম্ভব।

43. n যে-কোন পূর্ণসংখ্যা হইলে, $\sin \left\{n\pi + (-1)^n \dfrac{\pi}{3}\right\}$-এর মান নির্ণয় কর।

44. m-এর যে-কোন পূর্ণসংখ্যক মানের জন্যই $\cos\left(2m\pi \pm \frac{\pi}{3}\right)$

এবং $\tan\left(m\pi + \frac{\pi}{6}\right)$-এর প্রত্যেকের একই মান থাকিবে।

45. $A+B+C=180°$ এবং $\cos A = \cos B \cos C$ হইলে, প্রমাণ কর যে,
$\cot B \cot C = \frac{1}{2}$.

5·14. ত্রৈকোণমিতিক অভেদাবলী : তিন বা ততোধিক কোণ সম্বন্ধযুক্ত হইলে, বিশেষ করিয়া পূরক বা সম্পূরক সম্পর্কিত হইলে কয়েকটি অত্যন্ত প্রয়োজনীয় অভেদ পাওয়া যায়। অভেদের উভয়পার্শ্বস্থ রাশিদ্বয়ের সমতা প্রতিপন্ন করিতে পারিলেই অভেদটি প্রতিষ্ঠিত হয়। এ-সমস্ত ক্ষেত্রে পূরক বা সম্পূরক কোণের ধর্ম অনুসারে যথাযোগ্য সূত্র প্রয়োগ করিতে হয়। উদাহরণস্বরূপ,

তিনটি কোণ A, B ও C যদি এমন হয় যে,

$$A+B+C=180°, \text{ তবে}$$

$$B+C=180°-A\ ;\ C+A=180°-B \text{ এবং } A+B=180°-C.$$

অতএব, (i) $\sin(B+C)=\sin(180°-A)=\sin A$.

(ii) $\cos(B+C)=\cos(180°-A)=-\cos A$;

অথবা, $\cos A = -\cos(B+C)$.

(iii) $\tan(B+C)=\tan(180°-A)=-\tan A$;

অথবা, $\tan A = -\tan(B+C)$; ইত্যাদি।

আবার, $\because\ A+B+C=180°$,

$$\therefore\ \frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{C}{2}=90°.$$

$$\therefore\ \frac{B}{2}+\frac{C}{2}=90°-\frac{A}{2}, \text{ ইত্যাদি।}$$

অতএব (i) $\sin\left(\frac{B}{2}+\frac{C}{2}\right)=\sin\left(90°-\frac{A}{2}\right)=\cos\frac{A}{2}$;

অথবা, $\cos\frac{A}{2}=\sin\left(\frac{B}{2}+\frac{C}{2}\right)$.

(ii) $\cos\left(\frac{B}{2}+\frac{C}{2}\right)=\cos\left(90°-\frac{A}{2}\right)=\sin\frac{A}{2}$,

অথবা, $\sin\frac{A}{2}=\cos\left(\frac{B}{2}+\frac{C}{2}\right)$;

(iii) $\tan\left(\frac{B}{2}+\frac{C}{2}\right)=\tan\left(90^\circ-\frac{A}{2}\right)=\cot\frac{A}{2},$

অথবা, $\cot\frac{A}{2}=\tan\left(\frac{B}{2}+\frac{C}{2}\right),$

অথবা, $\tan\frac{A}{2}=\cot\left(\frac{B}{2}+\frac{C}{2}\right),$

ইত্যাদি।

উদাহরণমালা

উদা. 1. যদি $A+B+C=\pi$, প্রমাণ কর যে,

$$\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A\sin B\sin C.$$

বাম পক্ষ $=2\sin A\cos A+2\sin(B+C)\cos(B-C)$

$=2\sin A\cos A+2\sin(\pi-A)\cos(B-C)$

$=2\sin A\cos A+2\sin A\cos(B-C)$

$=2\sin A[\cos(B-C)+\cos A]$

$=2\sin A[\cos(B-C)+\cos\{\pi-(B+C)\}]$

$=2\sin A[\cos(B-C)-\cos(B+C)]$

$=2\sin A[2\sin B\sin C]$

$=4\sin A\sin B\sin C.$

উদা. 2. যদি $A+B+C=\pi$, প্রমাণ কর যে,

$$\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C=-1-4\cos A\cos B\cos C.$$

বাম পক্ষ $=2\cos^2A-1+2\cos(B+C)\cos(B-C)$

$=-1+2\cos^2A+2\cos(\pi-A)\cos(B-C)$

$=-1+2\cos^2A-2\cos A\cos(B-C)$

$=-1-2\cos A[\cos(B-C)-\cos A]$

$=-1-2\cos A[\cos(B-C)-\cos\{\pi-(B+C)\}]$

$=-1-2\cos A[\cos(B-C)+\cos(B+C)]$

$=-1-2\cos A.2\cos B\cos C$

$=-1-4\cos A\cos B\cos C.$

উদা. 3. যদি $A+B+C=\pi$, প্রমাণ কর যে,

$$\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$$

বাম পক্ষ $=2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}+2\sin\left(\frac{B}{2}+\frac{C}{2}\right)\cos\left(\frac{B}{2}-\frac{C}{2}\right)$

$=2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}+2\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}\right)\cos\left(\frac{B}{2}-\frac{C}{2}\right)$

$$= 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2} + 2\cos\frac{A}{2}\cos\left(\frac{B}{2}-\frac{C}{2}\right)$$
$$= 2\cos\frac{A}{2}\left[\sin\frac{A}{2} + \cos\left(\frac{B}{2}-\frac{C}{2}\right)\right]$$
$$= 2\cos\frac{A}{2}\left[\sin\left\{\frac{\pi}{2} - \left(\frac{B}{2}+\frac{C}{2}\right)\right\} + \cos\left(\frac{B}{2}-\frac{C}{2}\right)\right]$$
$$= 2\cos\frac{A}{2}\left[\cos\left(\frac{B}{2}+\frac{C}{2}\right) + \cos\left(\frac{B}{2}-\frac{C}{2}\right)\right]$$
$$= 2\cos\frac{A}{2}\cdot 2\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$$

উদা. 4. যদি $A+B+C=\pi$, প্রমাণ কর যে,

$$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

বাম পক্ষ $= 1 - 2\sin^2\frac{A}{2} + 2\cos\left(\frac{B}{2}+\frac{C}{2}\right)\cos\left(\frac{B}{2}-\frac{C}{2}\right)$

$$= 1 - 2\sin^2\frac{A}{2} + 2\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}\right)\cos\left(\frac{B}{2}-\frac{C}{2}\right)$$
$$= 1 - 2\sin^2\frac{A}{2} + 2\sin\frac{A}{2}\cos\left(\frac{B}{2}-\frac{C}{2}\right)$$
$$= 1 + 2\sin\frac{A}{2}\left[\cos\left(\frac{B}{2}-\frac{C}{2}\right) - \sin\frac{A}{2}\right]$$
$$= 1 + 2\sin\frac{A}{2}\left[\cos\left(\frac{B}{2}-\frac{C}{2}\right)\left\{-\cos\left(\frac{B}{2}+\frac{C}{2}\right)\right\}\right]$$
$$= 1 + 2\sin\frac{A}{2}\cdot 2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$
$$= 1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

উদা. 5. $A+B+C=\pi$ হইলে, প্রমাণ কর যে,

$$\sin^2 A = \cos^2 B + \cos^2 C + 2\cos A\cos B\cos C.$$

বাম পক্ষ $= \sin^2\{\pi-(B+C)\}$

$$= \sin^2(B+C)$$
$$= (\sin B\cos C + \cos B\sin C)^2$$
$$= \sin^2 B\cos^2 C + \cos^2 B\sin^2 C + 2\sin B\cos C\times\cos B\sin C$$
$$= (1-\cos^2 B)\cos^2 C + \cos^2 B(1-\cos^2 C)$$
$$+ 2\sin B\sin C\cos B\cos C$$

$$= \cos^2 C + \cos^2 B - 2\cos^2 B\cos^2 C + 2\sin B\sin C\cos B\cos C$$
$$= \cos^2 B + \cos^2 C - 2\cos B\cos C \times [\cos B\cos C - \sin B\sin C]$$
$$= \cos^2 B + \cos^2 C - 2\cos B\cos C\cos(B+C)$$
$$= \cos^2 B + \cos^2 C - 2\cos B\cos C\cos(\pi - A)$$
$$= \cos^2 B + \cos^2 C - 2\cos B\cos C(-\cos A)$$
$$= \cos^2 B + \cos^2 C + 2\cos A\cos B\cos C.$$

উদা. 6. $A+B+C=\pi$ হইলে, প্রমাণ কর যে,

$$\sin^2\frac{A}{2} + \sin^2\frac{B}{2} - \sin^2\frac{C}{2} = 1 - 2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

বাম পক্ষ $= 1 - \cos^2\frac{A}{2} + \sin\left(\frac{B}{2}+\frac{C}{2}\right)\sin\left(\frac{B}{2}-\frac{C}{2}\right)$

$$= 1 - \cos^2\frac{A}{2} + \sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}\right)\sin\left(\frac{B}{2}-\frac{C}{2}\right)$$
$$= 1 - \cos^2\frac{A}{2} + \cos\frac{A}{2}\sin\left(\frac{B}{2}-\frac{C}{2}\right)$$
$$= 1 - \cos\frac{A}{2}\left[\cos\frac{A}{2} - \sin\left(\frac{B}{2}-\frac{C}{2}\right)\right]$$
$$= 1 - \cos\frac{A}{2}\left[\sin\left(\frac{B}{2}+\frac{C}{2}\right) - \sin\left(\frac{B}{2}-\frac{C}{2}\right)\right]$$
$$= 1 - \cos\frac{A}{2}\cdot 2\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$
$$= 1 - 2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

উদা. 7. যদি $A+B+C=\pi$ হয়, প্রমাণ কর যে,

$$\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} + \tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} = 1.$$

$$\frac{A}{2} + \frac{B}{2} + \frac{C}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

$$\therefore \frac{B}{2} + \frac{C}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}.$$

$$\therefore \tan\left(\frac{B}{2}+\frac{C}{2}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}\right) = \cot\frac{A}{2};$$

$$\therefore \frac{\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2}}{1 - \tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}} = \frac{1}{\tan\frac{A}{2}};$$

$$\therefore\ \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2}=1-\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2};$$

$$\therefore\ \tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}=1.$$

উদা. 8. যদি $A+B+C=\pi$ হয়, প্রমাণ কর যে,

$$\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}=4\cos\frac{\pi-A}{4}\cos\frac{\pi-B}{4}\cos\frac{\pi-C}{4}$$

$$=4\cos\frac{B+C}{4}\cos\frac{C+A}{4}\cos\frac{A+B}{4}.$$

বাম পক্ষ $=\cos\frac{\pi}{2}+\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}\quad\left(\because\ \cos\frac{\pi}{2}=0\right)$

$$=2\cos\frac{\pi+A}{4}\cos\frac{\pi-A}{4}+2\cos\frac{B+C}{4}\cos\frac{B-C}{4}$$

$$=2\cos\frac{\pi+A}{4}\cos\frac{\pi-A}{4}+2\cos\frac{\pi-A}{4}\cos\frac{B-C}{4}$$

$$=2\cos\frac{\pi-A}{4}\left[\cos\frac{\pi+A}{4}+\cos\frac{B-C}{4}\right]$$

$$=2\cos\frac{\pi-A}{4}\cdot 2\cos\frac{\pi+A+B-C}{8}\cos\frac{\pi+A-B+C}{8}$$

$$=4\cos\frac{\pi-A}{4}\cdot\cos\frac{\pi+(\pi-C)-C}{8}\cos\frac{\pi+(\pi-B)-B}{8}$$

$$=4\cos\frac{\pi-A}{4}\cos\frac{\pi-C}{4}\cos\frac{\pi-B}{4}$$

$$=4\cos\frac{\pi-A}{4}\cos\frac{\pi-B}{4}\cos\frac{\pi-C}{4}$$

$$=4\cos\frac{B+C}{4}\cos\frac{C+A}{4}\cos\frac{A+B}{4}.\quad[\because\ \pi-A=B+C,$$

ইত্যাদি]

উদা. 9. যদি $A+B+C=\pi$ হয়, প্রমাণ কর যে,

$$\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}=1+4\sin\frac{\pi-A}{4}\sin\frac{\pi-B}{4}\sin\frac{\pi-C}{4}$$

$$=1+4\sin\frac{B+C}{4}\sin\frac{C+A}{4}\sin\frac{A+B}{4}.$$

বাম পক্ষ $= 1 - \sin\frac{\pi}{2} + \sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2} \quad \left(\because \sin\frac{\pi}{2} = 1\right)$

$$= 1 - 2\cos\frac{\pi+A}{4}\sin\frac{\pi-A}{4} + 2\sin\frac{B+C}{4}\cos\frac{B-C}{4}$$

$$= 1 - 2\cos\frac{\pi+A}{4}\sin\frac{\pi-A}{4} + 2\sin\frac{\pi-A}{4}\cos\frac{B-C}{4}$$

$$= 1 + 2\sin\frac{\pi-A}{4}\left[\cos\frac{B-C}{4} - \cos\frac{\pi+A}{4}\right]$$

$$= 1 + 2\sin\frac{\pi-A}{4} \cdot 2\sin\frac{\pi+A+B-C}{8}\sin\frac{\pi+A-B+C}{8}$$

$$= 1 + 4\sin\frac{\pi-A}{4}\sin\frac{\pi+(\pi-C)-C}{8}\sin\frac{\pi+(\pi-B)-B}{8}$$

$$= 1 + 4\sin\frac{\pi-A}{4}\sin\frac{\pi-C}{4}\sin\frac{\pi-B}{4}$$

$$= 1 + 4\sin\frac{\pi-A}{4}\sin\frac{\pi-B}{4}\sin\frac{\pi-C}{4}$$

$$= 1 + 4\sin\frac{B+C}{4}\sin\frac{C+A}{4}\sin\frac{A+B}{4}. \quad [\because \pi - A = B + C, \text{ ইত্যাদি}]$$

উদা. 10. যদি $A + B + C = 2S$ হয়, প্রমাণ কর যে,

$$\cos^2 S + \cos^2(S-A) + \cos^2(S-B) + \cos^2(S-C) = 2 + 2\cos A\cos B\cos C.$$

বাম পক্ষ $= \cos^2 S + \cos^2(S-A) + 1 - \sin^2(S-B) + 1 - \sin^2(S-C)$

$$= 2 + [\cos^2 S - \sin^2(S-B)] + [\cos^2(S-A) - \sin^2(S-C)]$$

$$= 2 + \cos\{S+(S-B)\}\cos\{S-(S-B)\} + \cos\{(S-A)+(S-C)\}\cos\{(S-A)-(S-C)\}$$

$$= 2 + \cos(2S-B)\cos B + \cos(2S-A-C)\cos(C-A)$$

$$= 2 + \cos(2S-B)\cos B + \cos B\cos(C-A)$$

$$= 2 + \cos B[\cos(2S-B) + \cos(C-A)]$$

$$= 2 + \cos B . 2\cos\frac{2S-B-A+C}{2}\cos\frac{2S-B-C+A}{2}$$

$$= 2 + 2\cos B\cos C\cos A \quad [\because 2S - B - A = C]$$

$$= 2 + 2\cos A\cos B\cos C.$$

উদা. 11. যদি $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 2\pi$ হয়, প্রমাণ কর যে,

$$\tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma + \tan\delta = \tan\alpha\tan\beta\tan\gamma\tan\delta(\cot\alpha + \cot\beta + \cot\gamma + \cot\delta).$$

$\alpha+\beta=2\pi-(\gamma+\delta)$;

$\therefore\ \tan(\alpha+\beta)=\tan[2\pi-(\gamma+\delta)]$
$=-\tan(\gamma+\delta)$;

$$\therefore\ \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=-\frac{\tan\gamma+\tan\delta}{1-\tan\gamma\tan\delta};$$

$\therefore\ \tan\alpha+\tan\beta-\tan\alpha\tan\gamma\tan\delta-\tan\beta\tan\gamma\tan\delta$
$=-\tan\gamma-\tan\delta+\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma+\tan\alpha\tan\beta\tan\delta$;

$\therefore\ \tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma+\tan\delta=\tan\beta\tan\gamma\tan\delta$
$+\tan\alpha\tan\gamma\tan\delta+\tan\alpha\tan\beta\tan\delta+\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma$
$=\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma\tan\delta(\cot\alpha+\cot\beta+\cot\gamma+\cot\delta)$.

উদা. 12. যদি $A+B+C=\pi$, হয়, প্রমাণ কর যে,

$$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}+\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C-A}{2}+\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$
$$=\sin A+\sin B+\sin C.$$

প্রথম পদ $=\cos\left[\frac{\pi}{2}-\frac{B+C}{2}\right]\cos\frac{B-C}{2}$

$$=\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}=\tfrac{1}{2}.2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}$$
$$=\tfrac{1}{2}(\sin B+\sin C).$$

অনুরূপে দ্বিতীয় পদ $=\frac{1}{2}(\sin C+\sin A)$

এবং তৃতীয় পদ $=\frac{1}{2}(\sin A+\sin B)$.

$\therefore$ বাম পক্ষ $=\sin A+\sin B+\sin C$.

উদা 13. যদি $x+y+z=xyz$ হয়, প্রমাণ কর যে,

$$\frac{2x}{1-x^2}+\frac{2y}{1-y^2}+\frac{2z}{1-z^2}=\frac{2x}{1-x^2}\cdot\frac{2y}{1-y^2}\cdot\frac{2z}{1-z^2}.$$

মনে কর, $x=\tan A$, $y=\tan B$, $z=\tan C$,

$\therefore\ \tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$,

$\therefore\ \tan A(1-\tan B\tan C)=-(\tan B+\tan C)$,

$$\therefore\ \tan A=-\frac{\tan B+\tan C}{1-\tan B\tan C}=-\tan(B+C)$$
$$=\tan[\pi-(B+C)],$$

$\therefore\ A=\pi-(B+C)$, $\quad\therefore\ A+B+C=\pi$.

$\therefore\ 2A+2B+2C=2\pi$, $\quad\therefore\ 2B+2C=2\pi-2A$,

$\therefore\ \tan(2B+2C)=\tan(2\pi-2A)$
$=-\tan 2A$,

$$\therefore \quad \frac{\tan 2B + \tan 2C}{1 - \tan 2B \tan 2C} = -\tan 2A,$$

$$\therefore \quad \tan 2B + \tan 2C = -\tan 2A + \tan 2A \tan 2B \tan 2C,$$

$$\therefore \quad \tan 2A + \tan 2B + \tan 2C = \tan 2A \tan 2B \tan 2C,$$

$$\therefore \quad \frac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A} + \frac{2 \tan B}{1 - \tan^2 B} + \frac{2 \tan C}{1 - \tan^2 C}$$

$$= \frac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A} \cdot \frac{2 \tan B}{1 - \tan^2 B} \cdot \frac{2 \tan C}{1 - \tan^2 C},$$

$$\therefore \quad \frac{2x}{1-x^2} + \frac{2y}{1-y^2} + \frac{2z}{1-z^2} = \frac{2x}{1-x^2} \cdot \frac{2y}{1-y^2} \cdot \frac{2z}{1-z^2}.$$

প্রশ্নমালা 6

যদি $A + B + C = \pi$ হয়, প্রমাণ কর যে,

1. $\sin 2A + \sin 2B - \sin 2C = 4 \cos A \cos B \sin C.$
2. $\cos 2A + \cos 2B - \cos 2C + 4 \sin A \sin B \cos C = 1.$
3. $\cos^2 2A + \cos^2 2B + \cos^2 2C = 1 + 2 \cos 2A \cos 2B \cos 2C.$
4. $\sin A + \sin B - \sin C = 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}.$
5. $\cos A + \cos B - \cos C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} - 1.$
6. $\cos^2 A + \cos^2 B - \cos^2 C = 1 - 2 \sin A \sin B \cos C.$
7. $\sin^2 A + \sin^2 B - \sin^2 C = 2 \sin A \sin B \cos C.$
8. $1 - 2 \sin A \sin B \cos C + \cos^2 C = \cos^2 A + \cos^2 B.$
9. যদি $A + B + C = \pi$, প্রমাণ কর যে,

   $$\tan 2A + \tan 2B + \tan 2C = \tan 2A \tan 2B \tan 2C.$$
10. $A + B + C = \pi$ হইলে, প্রমাণ কর যে,

    $$\tan A + \tan B + \tan C - \tan A \tan B \tan C = 0.$$
11. $A + B + C = \pi$ হইলে, প্রমাণ কর যে,

    $$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2 \cos A \cos B \cos C = 1.$$
12. $\cot B \cot C + \cot C \cot A + \cot A \cot B = 1.$
13. $\sin^2 \frac{A}{2} + \sin^2 \frac{B}{2} + \sin^2 \frac{C}{2} = 1 - 2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}.$

14. $\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{C}{2}=2+2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$.

[C. U. 1948]

15. $\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}=\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}$.

16. $\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}-\cos\frac{C}{2}=4\cos\frac{\pi+A}{4}\cos\frac{\pi+B}{4}\cos\frac{\pi-C}{4}$.

17. $\frac{\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C}{\sin A+\sin B+\sin C}=8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$.

18. $\frac{\sin B+\sin C-\sin A}{\sin A+\sin B+\sin C}=\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}$.

19. $\frac{1+\cos A-\cos B+\cos C}{1+\cos A+\cos B-\cos C}=\tan\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}$.

20. $\frac{\cos A}{\sin B\sin C}+\frac{\cos B}{\sin C\sin A}+\frac{\cos C}{\sin A\sin B}=2$.

21. $\frac{\cot B+\cot C}{\tan B+\tan C}+\frac{\cot C+\cot A}{\tan C+\tan A}+\frac{\cot A+\cot B}{\tan A+\tan B}=1$.

22. $\frac{\tan A+\tan B+\tan C}{\sin A+\sin B+\sin C}=\frac{2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\cos A\cos B\cos C}$.

23. $\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B+C}{2}=\sec\frac{A}{2}\sec\frac{B+C}{2}$.

24. $\sin A\cos B\cos C+\sin B\cos C\cos A+\sin C\cos A\cos B$
$=\sin A\sin B\sin C$.

25. $\cos A\sin B\sin C+\cos B\sin C\sin A+\cos C\sin A\sin B$
$=1+\cos A\cos B\cos C$.

26. $(\tan A+\tan B+\tan C)(\cot A+\cot B+\cot C)$
$=1+\sec A\sec B\sec C$.

27. $\sin 5A+\sin 5B+\sin 5C=4\cos\frac{5A}{2}\cos\frac{5B}{2}\cos\frac{5C}{2}$.

28. $\sin 6A+\sin 6B+\sin 6C=4\sin 3A\sin 3B\sin 3C$.

29. $\sin^3 A+\sin^3 B+\sin^3 C$

$$=3\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}-\cos\frac{3A}{2}\cos\frac{3B}{2}\cos\frac{3C}{2}.$$

30. $\sin^4 A + \sin^4 B + \sin^4 C$
$= \frac{3}{8} + 2 \cos A \cos B \cos C + \frac{1}{8} \cos 2A \cos 2B \cos 2C.$

31. $\sin (B + 2C) + \sin (C + 2A) + \sin (A + 2B)$
$= 4 \sin \frac{B - C}{2} \sin \frac{C - A}{2} \sin \frac{A - B}{2}.$

32. $\sin (B + C - A) + \sin (C + A - B) + \sin (A + B - C)$
$= 4 \sin A \sin B \sin C.$

33. $\tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} = \frac{n-1}{n+1}$, যখন $n \sin \frac{C}{2} = \sin \left(A + \frac{C}{2}\right)$.

34. $(\cot B + \cot C)(\cot C + \cot A)(\cot A + \cot B)$
$= \operatorname{cosec} A \operatorname{cosec} B \operatorname{cosec} C.$

35. $\sin \frac{A}{2} \cos \frac{B - C}{2} + \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C - A}{2} + \sin \frac{C}{2} \cos \frac{A - B}{2}$
$= \cos A + \cos B + \cos C.$

36. $\tan (B + C - A) + \tan (C + A - B) + \tan (A + B - C)$
$= \tan (B + C - A) \tan (C + A - B) \tan (A + B - C).$

যদি $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$ হয়, প্রমাণ কর যে,

37. $\tan \beta \tan \gamma + \tan \gamma \tan \alpha + \tan \alpha \tan \beta = 1.$

38. $\cot \alpha + \cot \beta + \cot \gamma = \cot \alpha \cot \beta \cot \gamma.$

39. $\frac{\cos \alpha + \sin \beta + \sin \gamma}{\sin \alpha + \cos \beta + \sin \gamma} = \frac{1 - \tan \frac{\alpha}{2}}{1 - \tan \frac{\beta}{2}}.$

40. $\cos (\alpha - \beta - \gamma) + \cos (\beta - \gamma - \alpha) + \cos (\gamma - \alpha - \beta)$
$- 4 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma = 0.$

যদি $\alpha + \beta + \gamma = 2\pi$ হয়, প্রমাণ কর যে,

41. $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma - 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma = 1.$

42. $\sin^3 \alpha + \sin^3 \beta + \sin^3 \gamma = 3 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}$
$- \sin \frac{3\alpha}{2} \sin \frac{3\beta}{2} \sin \frac{3\gamma}{2}.$

A, B, C, D একটি চতুর্ভুজের চারিটি কোণ হইলে, প্রমাণ কর যে,

43. $\frac{\tan A + \tan B + \tan C + \tan D}{\cot A + \cot B + \cot C + \cot D} = \tan A \tan B \tan C \tan D.$

44. $\cos A + \cos B + \cos C + \cos D$

$$= 4 \cos \frac{B+C}{2} \cos \frac{C+A}{2} \cos \frac{A+B}{2}.$$

45. দেখাও যে,

$\cos^2 \theta + \cos^2 (\alpha + \theta) - 2 \cos \alpha \cos \theta \cos (\alpha + \theta)$ রাশিমালাটি θ-বর্জিত।

যদি $A + B + C = 2S$ হয়, প্রমাণ কর যে :

46. $\sin (S - A) \sin (S - B) + \sin S \sin (S - C) = \sin A \sin B.$

47. $4 \sin S \sin (S - A) \sin (S - B) \sin (S - C)$

$$= 1 - \cos^2 A - \cos^2 B - \cos^2 C + 2 \cos A \cos B \cos C.$$

48. $\sin (S - A) + \sin (S - B) + \sin (S - C) - \sin S$

$$= 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}.$$

49. $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2 \cos A \cos B \cos C$

$$= 1 + 4 \cos S \cos (S - A) \cos (S - B) \cos (S - C).$$

যদি $\alpha + \beta + \gamma = 0$ হয়, প্রমাণ কর যে :

50. $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} - 1.$

51. $\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 2(\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma)$

$$\times (1 + \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma).$$

52. যদি $\cos A + \cos B + \cos C = 0$ হয়, প্রমাণ কর যে,

$$\cos 3A + \cos 3B + \cos 3C = 12 \cos A \cos B \cos C.$$

[ইঙ্গিত : $\cos 3A = 4 \cos^3 A - 3 \cos A.$
$a + b + c = 0$ হইলে, $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc.$]

53. যদি $x + y + z = xyz$ হয়, প্রমাণ কর যে,

$$\frac{3x - x^3}{1 - 3x^2} + \frac{3y - y^3}{1 - 3y^2} + \frac{3z - z^3}{1 - 3z^2} = \frac{3x - x^3}{1 - 3x^2} \cdot \frac{3y - y^3}{1 - 3y^2} \cdot \frac{3z - z^3}{1 - 3z^2}.$$

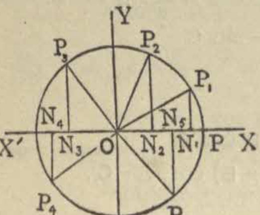
ষষ্ঠ অধ্যায়

ত্রৈকোণমিতিক অপেক্ষকের লেখ

(Graphs of Trigonometrical Functions)

6·1. কোণের পরিমাণ-বৃদ্ধির সহিত ত্রৈকোণমিতিক অনুপাতের পরিবর্তন।

O বিন্দুর চারিদিকে আবর্তনশীল $\overline{OP}$ সরলরেখা $\overrightarrow{OX}$-এর উপর অবস্থান হইতে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত মুখে 0° হইতে ক্রমশঃ 360° কোণ পর্যন্ত ঘুরিয়া আসিলে P বিন্দুর সঞ্চারপথ $P_1\ P_2\ P_3\ P_4\ P_5$ বৃত্তরেখায় শায়িত হইবে।



O-কে কেন্দ্র করিয়া এবং যে-কোন ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত আঁক। P_1, P_2 ইত্যাদি ঘূর্ণ্যমান সরল রেখা OP-এর বিভিন্ন অবস্থানে বৃত্তের সহিত উহার ছেদবিন্দুসমূহ। স্পষ্টই বৃত্তের ব্যাসার্ধ $=\overline{OP_1}=\overline{OP_2}=\overline{OP_3}=\overline{OP_4}=\overline{OP_5}$. $\overline{OP}$-এর বিভিন্ন অবস্থানে P_1, P_2 প্রভৃতি বিন্দু হইতে $\overline{P_1N_1}$, $\overline{P_2N_2}$, $\overline{P_3N_3}$, $\overline{P_4N_4}$, $\overline{P_5N_5}$, $\overline{OX}$-এর উপর লম্ব। ঐ সকল ক্ষেত্রে OP_1, OP_2, $\overline{OP_3}$, $\overline{OP_4}$, $\overline{OP_5}$ অতিভুজ $\overline{ON_1}$, $\overline{ON_2}$, ON_3, $\overline{ON_4}$, $\overline{ON_5}$ সন্নিহিত বাহু এবং $\overline{P_1N_1}$, $\overline{P_2N_2}$, $\overline{P_3N_3}$, $\overline{P_4N_4}$, $\overline{P_5N_5}$ হইবে বিপরীত বাহু।

(a) কোণের sine-এর মানের পরিবর্তন :

$\text{Sine}=\dfrac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}}$। যখন ঘূর্ণ্যমান সরল রেখাটি $\overrightarrow{OX}$-এর সহিত মিলিয়া থাকে, তখন $\angle XOP=0°$ এবং অতিভুজ = বৃত্তের ব্যাসার্ধ, কিন্তু লম্বের মান 0 ; সুতরাং, $\sin 0°=0$. কোণ 0° হইতে 90° পর্যন্ত বাড়িতে থাকিলে, স্পষ্টই অতিভুজ সর্বদা ব্যাসার্ধের সমান থাকে, কিন্তু চিত্রটি পরীক্ষা করিলে দেখা যাইবে, $\overline{P_1N_1}$, $\overline{P_2N_2}$ ক্রমেই বাড়িয়া চলিবে ; তাহা হইলে $\angle XOP=\theta$ মনে করিলে, $\sin\theta$-এর মানও θ-এর 0° হইতে 90° মানের জন্য ক্রমেই বাড়িয়া চলিবে। যখন $\theta=90°$ হইবে, তখন অতিভুজ ও লম্ব সমান হইবে বলিয়া $\sin\theta=1$ হইবে। θ যখন 90° হইতে বাড়িয়া 180° পর্যন্ত অগ্রসর হয়, তখন চিত্র হইতে দেখা যায়, অতিভুজ $\overline{OP_3}$ ব্যাসার্ধের সমানই থাকে, কিন্তু লম্ব $\overline{P_3N_3}$ ক্রমেই কমিতে থাকে এবং θ যখন 180° হয়, তখন উহা 0 হয় এবং সেইজন্য $\sin\theta$-এর মান 0 হয়। অতএব, θ যখন 90° হইতে বাড়িয়া 180° পর্যন্ত অগ্রসর হয়, তখন $\sin\theta$-এর মান 1 হইতে কমিয়া 0 হয়। θ যখন বাড়িয়া তৃতীয়

পাদে আসে, তখন অতিভুজ ধনাত্মক থাকিবে, কিন্তু লম্ব ঋণাত্মক হইবে ; অতএব, তৃতীয় পাদে sin θ-এর মান সর্বদাই ঋণাত্মক হইবে। অধিকন্তু, এক্ষেত্রে অতিভুজটি সর্বদাই ব্যাসার্ধের সমান থাকিবে, কিন্তু লম্বটি বাড়িতে থাকিবে এবং θ যখন 270°-এর সমান হইবে, তখন উহার দৈর্ঘ্য ব্যাসার্ধের সমান হইবে। সেইজন্য θ যখন বাড়িয়া 180° হইতে 270°-তে আসে, তখন sin θ-এর মান 0 হইতে কমিতে কমিতে -1-এ আসে। চতুর্থ পাদেও লম্ব সর্বদাই ঋণাত্মক, কিন্তু অতিভুজটি সর্বদাই ধনাত্মক ; সুতরাং, এই পাদেও sin θ-এর মান সর্বদাই ঋণাত্মক। অধিকন্তু, চিত্র হইতে দেখা যাইবে, θ যখন বাড়িতে বাড়িতে 270° হইতে 360°-এর দিকে আসে, লম্বের দৈর্ঘ্য তখন কমিতে থাকে এবং θ যখন 360°, তখন লম্বের দৈর্ঘ্য শূন্য হইয়া যায় বলিয়া sin θও 0 (শূন্য) হয়। অতএব দেখা গেল,

(i) প্রথম পাদে, θ যখন 0° হইতে 90° পর্যন্ত বাড়ে,
তখন sin θ-এর মান 0 হইতে 1 পর্যন্ত বাড়ে ;

(ii) দ্বিতীয় পাদে, θ যখন 90° হইতে 180° পর্যন্ত বাড়ে,
তখন sin θ-এর মান 1 হইতে কমিতে কমিতে 0-এ আসে ;

(iii) তৃতীয় পাদে, θ যখন 180° হইতে 270° পর্যন্ত বাড়ে,
তখন sin θ-এর মান 0 হইতে কমিতে কমিতে -1-এ আসে ;

এবং (iv) চতুর্থ পাদে, θ যখন 270° হইতে 360° পর্যন্ত বাড়ে,
তখন sin θ-এর মান -1 হইতে বাড়িতে বাড়িতে 0-এ আসে।

(b) কোণের cosine-এর মানের পরিবর্তন ঃ

$\text{Cosine} = \dfrac{\text{সন্নিহিত বাহু}}{\text{অতিভুজ}} \left(= \dfrac{\text{অভিক্ষেপ}}{\text{অতিভুজ}} \right)$। যখন ঘূর্ণ্যমান সরল রেখাটি $\overrightarrow{OX}$-এর সহিত মিলিয়া থাকে, তখন XOP কোণের পরিমাণ 0° এবং তখন অতিভুজ এবং সন্নিহিত বাহু বৃত্তের ব্যাসার্ধের সমান ; সুতরাং, $\cos 0° = 1$. কোণ 0° হইতে 90° পর্যন্ত বাড়িতে থাকিলে স্পষ্টই অতিভুজ সর্বদা ব্যাসার্ধের সমান থাকে, কিন্তু সন্নিহিত বাহু $\overline{ON_1}$, $\overline{ON_2}$ ক্রমশঃই কমিতে থাকিবে। তাহা হইলে cos θ-এর মানও, (ইহা $\dfrac{\text{সন্নিহিত বাহু } \overline{ON_1}}{\text{অতিভুজ}}$-এর সমান বলিয়া) θ-এর 0° হইতে 90° পর্যন্ত ক্রমবর্ধমান মানসমূহের জন্য ক্রমশঃই কমিতে থাকিবে। যখন $\theta = 90°$ হইবে, তখন অতিভুজ ব্যাসার্ধের সমান থাকিবে, কিন্তু সন্নিহিত বাহু 0 হইবে বলিয়া $\cos\theta = 0$ হইবে। θ যখন 90° হইতে বাড়িয়া দ্বিতীয় পাদে 180° পর্যন্ত অগ্রসর হয়, তখন চিত্র হইতে দেখা যায়, অতিভুজ $\overline{OP_3}$ ব্যাসার্ধের সমানই থাকে, এবং ইহা সর্বদাই ধনাত্মক, কিন্তু সন্নিহিত বাহু এই পাদে সর্বদাই ঋণাত্মক। অতএব, cos θ-এর মান এই পাদে সর্বদা ঋণাত্মক হইবে এবং ইহার দৈর্ঘ্য 0 হইতে ক্রমশঃ বাড়িয়া ব্যাসার্ধের সমান হয় ; অতএব, এই পাদে cos θ-এর মান শূন্য হইতে কমিতে কমিতে, θ যখন 180° হয়, তখন -1

হয়। θ যখন আরও বাড়িয়া তৃতীয় পাদে আসে, তখনও এই পাদের সকল অবস্থানেই সন্নিহিত বাহু ঋণাত্মক থাকে, কিন্তু অতিভুজ সর্বদাই ধনাত্মক ; সুতরাং, তৃতীয় পাদেও $\cos\theta$ ঋণাত্মক ; অধিকন্তু, এক্ষেত্রে অতিভুজটি সর্বদাই ব্যাসার্ধের সমান এবং ধনাত্মক থাকিবে, কিন্তু সন্নিহিত বাহুর দৈর্ঘ্য কমিতে কমিতে θ যখন 270° হইবে, তখন 0 হইবে ; অতএব, এই পাদে $\cos\theta$-এর মান -1 হইতে বাড়িতে বাড়িতে θ যখন 270° হইবে, তখন 0 হইবে। চিত্র হইতে স্পষ্টই দেখা যায়, চতুর্থ পাদে সন্নিহিত বাহু ধনাত্মক ; সুতরাং অতিভুজ সর্বদাই ধনাত্মক বলিয়া এই পাদে $\cos\theta$ সর্বদাই ধনাত্মক হইবে। অধিকন্তু, এই পাদে সন্নিহিত বাহু সর্বদাই ধনাত্মক থাকিয়া 0 হইতে বাড়িতে বাড়িতে, θ যখন 360° হইবে, তখন ব্যাসার্ধের সমান হইবে ; সুতরাং $\cos\theta$-এর মান এই পাদে 0 হইতে বাড়িয়া 1 হইবে।

অতএব, দেখা গেল,

(i) প্রথম পাদে θ যখন 0° হইতে 90° পর্যন্ত বাড়ে,
তখন $\cos\theta$-এর মান 1 হইতে ক্রমশঃ কমিয়া 0 হয় ;

(ii) দ্বিতীয় পাদে θ যখন 90° হইতে 180° পর্যন্ত বাড়ে,
তখন $\cos\theta$-এর মান 0 হইতে ক্রমশঃ কমিয়া -1 হয় ;

(iii) তৃতীয় পাদে θ যখন 180° হইতে 270° পর্যন্ত বাড়ে,
তখন $\cos\theta$-এর মান -1 হইতে ক্রমশঃ বাড়িতে বাড়িতে 0 হয় ;

এবং (iv) চতুর্থ পাদে θ যখন 270° হইতে 360° পর্যন্ত বাড়ে,
তখন $\cos\theta$-এর মান 0 হইতে ক্রমশঃ বাড়িতে বাড়িতে 1 হয়।

(c) কোণের tangent-এ মানের পরিবর্তন :

Tangent $= \dfrac{\text{লম্ব}}{\text{সন্নিহিত বাহু}}$, যখন ঘূর্ণ্যমান সরল রেখাটি $\overrightarrow{OX}$-এর সহিত মিলিয়া থাকে, তখন XOP কোণের পরিমাণ 0° এবং তখন, চিত্র হইতে দেখা যায়, লম্বের দৈর্ঘ্য 0 হইবে, এবং সন্নিহিত বাহু ব্যাসার্ধের সমান হইবে ; অতএব, $\tan 0° = 0$. কোণটি 0° হইতে 90° পর্যন্ত বাড়িতে থাকিলে স্পষ্টই লম্বের দৈর্ঘ্য 0 হইতে বাড়িয়া ব্যাসার্ধের সমান হইবে আর সন্নিহিত বাহুর দৈর্ঘ্য ক্রমশঃ কমিতে কমিতে, θ যখন 90° হইবে, তখন 0 হইবে। অতএব, $\tan\theta = \dfrac{\text{লম্ব}}{\text{সন্নিহিত বাহু}}$ বলিয়া এবং হরের (সন্নিহিত বাহুর) দৈর্ঘ্য ক্রমশঃই কমিয়া আসে বলিয়া $\tan\theta$-এর মান ক্রমশঃই বাড়িতে থাকে ; θ যখন 90°-এর অতি নিকটবর্তী হয়, তখন সন্নিহিত বাহুর মানও অতি ক্ষুদ্র হয় এবং $\tan\theta$, তখন অতিবৃহৎ হয় এবং θ যতই 90°-এর নিকটবর্তী হয়, $\tan\theta$-ও তত বৃহৎ হইতে থাকে, কিন্তু θ যখন 90° হয়, তখন সন্নিহিত বাহুর দৈর্ঘ্য 0 হইয়া পড়ে এবং শূন্য হরবিশিষ্ট ভগ্নাংশ অর্থহীন বলিয়া $\tan\theta$-ও তখন অনির্দিষ্ট হয়। θ যখন 90° হইতে

বাড়িয়া দ্বিতীয় পাদে 180° পর্যন্ত অগ্রসর হয়, তখন চিত্র হইতে দেখা যায়, সন্নিহিত বাহু ON_3 শূন্য হইতে ক্রমশঃ বাড়িতে থাকে এবং θ যখন 180°-এর সমান হয়, তখন উহা ব্যাসার্ধের সমান হয়; আর লম্বটি কমিতে কমিতে শূন্য হয়। অধিকন্তু এই পাদে লম্বটি সর্বদাই ধনাত্মক, কিন্তু সন্নিহিত বাহু সর্বদাই ঋণাত্মক; সুতরাং, এই পাদে $\tan\theta$ সর্বদাই ঋণাত্মক হইবে। θ প্রথম পাদ অতিক্রম করিয়া দ্বিতীয় পাদে আসামাত্রই সন্নিহিত বাহু ঋণাত্মক হইয়া যাইবে, কিন্তু লম্বটি ধনাত্মকই থাকিবে। ফলে $\tan\theta$-এর মান সুবৃহৎ পরম মান-বিশিষ্ট ঋণাত্মক হইয়া পড়ে। ইহার পর θ-এর মান বাড়িতে বাড়িতে যখন 180° হয় $\tan\theta$-এর মান তখন সেই সুবৃহৎ এই পরম মান হইতে কমিতে কমিতে শূন্যে পরিণত হয়। তৃতীয় পাদে লম্বটি এবং সন্নিহিত বাহু উভয়ই ঋণাত্মক বলিয়া এই পাদে $\tan\theta$ সর্বদাই ধনাত্মক; অধিকন্তু, θ 180° হইতে 270° পর্যন্ত বাড়িয়া চলিলে লম্বের দৈর্ঘ্য 0 হইতে বাড়িয়া ব্যাসার্ধের সমান হইবে, আর সন্নিহিত বাহু কমিতে কমিতে শূন্য হইবে। সুতরাং, এক্ষেত্রে $\tan\theta$-এর মান, θ যত 270°-এর দিকে যাইবে ততই বাড়িতে থাকিবে; কিন্তু θ যখন 270° হইবে, তখন সন্নিহিত বাহুর দৈর্ঘ্য 0 হয় বলিয়া $\tan\theta$, $\tan 90°$-এর ন্যায় অর্থহীন, অনির্দিষ্ট হইয়া পড়ে। অতএব $\tan\theta$-এর মান, এই পাদে, শূন্য হইতে 270°-এর পূর্ব পর্যন্ত ক্রমেই বাড়িতে থাকিবে, কিন্তু $\theta = 270°$ হইলে $\tan\theta$-এর মান কত, নির্দিষ্ট করিয়া বলা যাইবে না, অর্থাৎ $\tan\theta$ তখন অনির্দিষ্ট হইবে। চতুর্থ পাদে সন্নিহিত বাহু ধনাত্মক, কিন্তু বিপরীত বাহু ঋণাত্মক; সুতরাং, এই পাদে $\tan\theta$ সর্বদাই ঋণাত্মক। এই পাদে θ যখন 270°-এর অতি নিকটবর্তী থাকে, তখন সন্নিহিত বাহু অতিক্ষুদ্র বলিয়া $\tan\theta$ ঋণাত্মক হইলেও উহার পরম মান অতিবৃহৎ হইবে। সুতরাং, θ-এর মান 270° অতিক্রম করিয়া চতুর্থ পাদে আসিলে $\tan\theta$-এর ধনাত্মক সুবৃহৎ মান হঠাৎ ঋণাত্মক হইয়া যায়; কিন্তু পরম মান সুবৃহৎই থাকে। তারপর θ যতই 360°-এর দিকে অগ্রসর হয় ততই $\tan\theta$-এর পরম মান কমিতে কমিতে শূন্য হয়, অথবা বলা চলে $\tan\theta$-এর মান বাড়িতে বাড়িতে শূন্য হয়। অতএব,

(i) প্রথম পাদে θ-এর মান যখন 0° হইতে 90° পর্যন্ত বাড়ে, তখন $\tan\theta$-এর মান 0 হইতে ক্রমাগত বাড়িয়াই চলে, কিন্তু সর্বদাই সসীম থাকে; θ-এর 90°-এর নিকটবর্তী মানসমূহের জন্য $\tan\theta$-এর মান সসীম হইলেও সুবৃহৎ; কিন্তু $\theta = 90°$ হইলে, $\tan\theta$ অনির্দিষ্ট হইয়া পড়ে।

(ii) θ-এর মান প্রথম পাদ অতিক্রম করিয়া দ্বিতীয় পাদে আসিবামাত্রই $\tan\theta$-এর মান ঋণাত্মক, কিন্তু 90°-এর অব্যবহিত পূর্বে যেরূপ ছিল সেইরূপ অতিবৃহৎ পরম মান-বিশিষ্ট হইয়া পড়ে এবং θ যতই বাড়িতে থাকে, এই পরম মান ততই কমিতে থাকে এবং কমিয়া কমিয়া θ যখন 180° হয় তখন $\tan\theta$-এর মান 0 হয়, অর্থাৎ এই পাদে $\tan\theta$-এর ঋণাত্মক অতি বৃহৎ পরম মান বাড়িয়া 0 হয়।

(iii) তৃতীয় পাদে tan θ-এর মান সর্বদাই ধনাত্মক এবং θ, 180° হইতে 270° পর্যন্ত যতই বাড়িতে থাকিবে, tan θ-এর মানও শূন্য হইতে ততই বাড়িতে থাকে। θ-এর 270°-এর নিকটতম মানসমূহের জন্য tan θ-এর মান সসীম হইলেও সুবৃহৎ; কিন্তু $\theta = 270^\circ$ হইলে, tan θ আবার অনির্দিষ্ট হইয়া পড়ে।

(iv) θ-এর মান তৃতীয় পাদ অতিক্রম করিয়া চতুর্থ পাদে আসিবামাত্রই tan θ-এর মান ঋণাত্মক, কিন্তু 270°-এর অব্যবহিত পূর্বে যেরূপ ছিল সেইরূপ অতিবৃহৎ পরম মান-বিশিষ্ট হইয়া পড়ে এবং θ যতই বাড়িতে থাকে এই পরম মান ততই কমিতে থাকে এবং কমিয়া কমিয়া θ যখন 360° হয় তখন 0 হয়। এই পাদেও tan θ-এর ঋণাত্মক অতি বৃহৎ পরম মান বাড়িয়া 0 হয়।

(d) কোণের cosecant-এর মানের পরিবর্তন :

(i) $\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta}$ বলিয়া, $\theta = 0^\circ$ হইলে cosec θ অনির্দিষ্ট হয়, কিন্তু 0°-এর নিকটবর্তী মানসমূহের জন্য ইহার মান সসীম কিন্তু সুবৃহৎ; θ যতই 90°-এর দিকে যায়, cosec θ-এর মানও ততই কমিতে থাকে এবং যখন $\theta = 90^\circ$ হয়, তখন $\operatorname{cosec}\theta = 1$ হয়।

(ii) দ্বিতীয় পাদে cosec θ ধনাত্মক এবং θ যখন বাড়িতে বাড়িতে 90° হইতে 180°-তে যায়, cosec θ-এর মান আবার 1 হইতে বাড়িতে বাড়িতে সর্বদা সসীম থাকিলেও 180°-এর নিকটবর্তী মানসমূহের জন্য ধনাত্মক কিন্তু সুবৃহৎ হইয়া পড়ে; এবং 180°-তে cosec θ অনির্দিষ্ট হয়।

(iii) তৃতীয় পাদে cosec θ সর্বদাই ঋণাত্মক এবং θ দ্বিতীয় পাদ অতিক্রম করিয়া তৃতীয় পাদে আসিবামাত্রই cosec θ-এর মান, ধনাত্মক সুবৃহৎ হইতে ঋণাত্মক কিন্তু সুবৃহৎ পরম মান-বিশিষ্ট হইয়া পড়ে এবং বাড়িতে বাড়িতে যখন $\theta = 270^\circ$ হয়, তখন $\operatorname{cosec}\theta = -1$ হয়।

(iv) চতুর্থ পাদেও cosec θ ঋণাত্মক। θ, 270° হইতে 360° পর্যন্ত বাড়িতে থাকিলে, cosec θ, -1 হইতে ক্রমশঃ কমিতে থাকে এবং ইহার পরম মান ক্রমশঃ বৃদ্ধি পাইতে থাকে। θ-এর 360°-এর নিকটবর্তী মানসমূহের জন্য cosec θ ঋণাত্মক কিন্তু সুবৃহৎ পরম মান-বিশিষ্ট হয়; $\theta = 360^\circ$ হইলে, cosec θ অনির্দিষ্ট হইয়া পড়ে।

(e) কোণের secant-এর মানের পরিবর্তন :

(i) $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$ বলিয়া, θ কোণ যখন 0°, তখন $\sec\theta = 1$. প্রথম পাদে sec θ সর্বদাই ধনাত্মক এবং θ যতই 90°-এর দিকে যায়, ইহার মান ধনাত্মক এবং সসীম থাকিয়া ততই বাড়িতে থাকে। 90°-এর নিকটবর্তী মানসমূহের জন্য sec θ

ধনাত্মক, সসীম কিন্তু সুবৃহৎ পরম মান-বিশিষ্ট হয়। যখন $\theta = 90°$, তখন sec θ অনির্দিষ্ট হইয়া পড়ে।

(ii) দ্বিতীয় পাদে sec θ ঋণাত্মক। θ-এর মান 90° অতিক্রম করিয়া দ্বিতীয় পাদে আসিবামাত্রই sec θ-এর মান ঋণাত্মক কিন্তু সুবৃহৎ এবং সসীম পরম মান-বিশিষ্ট হইয়া পড়ে এবং θ যতই 180°-এর দিকে যায়, ততই sec θ-এর মান ক্রমশঃ বাড়িতে বাড়িতে -1-এর দিকে যায়। $\theta = 180°$ হইলে, sec $\theta = -1$ হয়।

(iii) তৃতীয় পাদে sec θ ঋণাত্মক। এই পাদে θ যতই বাড়িতে থাকে sec θ-এর মানও ততই -1 হইতে কমিতে থাকে এবং θ-এর 270°-এর নিকটবর্তী মান-সমূহের জন্য sec θ ঋণাত্মক, কিন্তু সসীম ও সুবৃহৎ পরম মান-বিশিষ্ট হয়। $\theta = 270°$ হইলে, sec θ অনির্দিষ্ট হইয়া পড়ে।

(iv) চতুর্থ পাদে sec θ ধনাত্মক। θ-এর মান 270° অতিক্রম করিয়া চতুর্থ পাদে আসিলেই sec θ ধনাত্মক, কিন্তু সসীম ও সুবৃহৎ পরম মান-বিশিষ্ট হইয়া পড়ে এবং θ যতই 360°-এর দিকে যায়, sec θ কমিতে থাকে এবং θ যখন 360° হয়, তখন উহা 1 হয়।

(f) কোণের cotangent-এর মানের পরিবর্তন :

(i) $\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$ বলিয়া, প্রথম পাদে cot θ ধনাত্মক ; θ কোণ যখন 0°, তখন cot θ অনির্দিষ্ট ; θ কোণ 0° হইতে একটু বাড়িলেই cot θ ধনাত্মক, কিন্তু সসীম ও সুবৃহৎ হইয়া পড়ে এবং θ কোণ বাড়িতে বাড়িতে 90° পর্যন্ত অগ্রসর হইলে cot θ কমিতে কমিতে 0 হয়।

(ii) দ্বিতীয় পাদে cot θ ঋণাত্মক এবং θ যখন বাড়িতে বাড়িতে 180°-এর দিকে যায়, cot θ ঋণাত্মক থাকিয়াই ক্রমবর্ধমান পরম মান-বিশিষ্ট হয়। θ কোণের 180°-এর নিকটবর্তী মানসমূহের জন্য cot θ ঋণাত্মক, কিন্তু সসীম ও সুবৃহৎ পরম মান-বিশিষ্ট হয়। $\theta = 180°$ হইলে cot θ অনির্দিষ্ট হইয়া পড়ে।

(iii) তৃতীয় পাদে cot θ ধনাত্মক। θ কোণ 180° অতিক্রম করিয়া তৃতীয় পাদে আসিবামাত্রই cot θ-এর মান ধনাত্মক, কিন্তু সুবৃহৎ ও সসীম পরম মান-বিশিষ্ট হইয়া পড়ে এবং θ যতই 180° হইতে 270°-এর দিকে অগ্রসর হয়, cot θ-এর মান ততই কমিতে থাকে এবং θ যখন 270° হয়, তখন উহা 0 হয়।

(iv) চতুর্থ পাদে cot θ ঋণাত্মক। θ-এর মান 270° হইতে যতই 360°-এর দিকে যায়, cot θ-এর মান 0 হইতে ততই কমিতে থাকে। চতুর্থ পাদে 360°-এর নিকটবর্তী মানসমূহের জন্য cot θ ঋণাত্মক, কিন্তু সসীম ও সুবৃহৎ পরম মান-বিশিষ্ট হয়। θ যখন 360° হয়, তখন cot θ অনির্দিষ্ট হইয়া পড়ে।

6·2. ত্রৈকোণমিতিক অপেক্ষকের লেখ (Graphs of Trigonometrical Functions)। বীজগণিতের ন্যায় ত্রৈকোণমিতিক অপেক্ষকের লেখ অঙ্কন করিবার সময়ে দুইটি পরস্পরচ্ছেদী সরল রেখাকে $\overleftrightarrow{XOX'}$ এবং $\overleftrightarrow{YOY'}$ অক্ষ হিসাবে লওয়া হয়। x-অক্ষ বরাবর কোণের মান এবং y-অক্ষ বরাবর ঐ সকল কোণের অনুরূপ ত্রৈকোণমিতিক অনুপাতগুলির মান বসানো হয়। এইরূপে কোণ ও তাহার ত্রৈকোণমিতিক অপেক্ষক-প্রকাশক যেসকল বিভিন্ন বিন্দু পাওয়া যায়, তাহাদিগকে একটি সন্তত রেখা দ্বারা যোগ করিলে ত্রৈকোণমিতিক অপেক্ষকটির লেখ পাওয়া যায়।

কোণের বিভিন্ন মানের জন্য অনুরূপ বিভিন্ন ত্রৈকোণমিতিক অনুপাত sine, cos, tan প্রভৃতি মান-সংবলিত তালিকার ব্যবহার করিতে হয়।

6·3. sin x-এর লেখ।

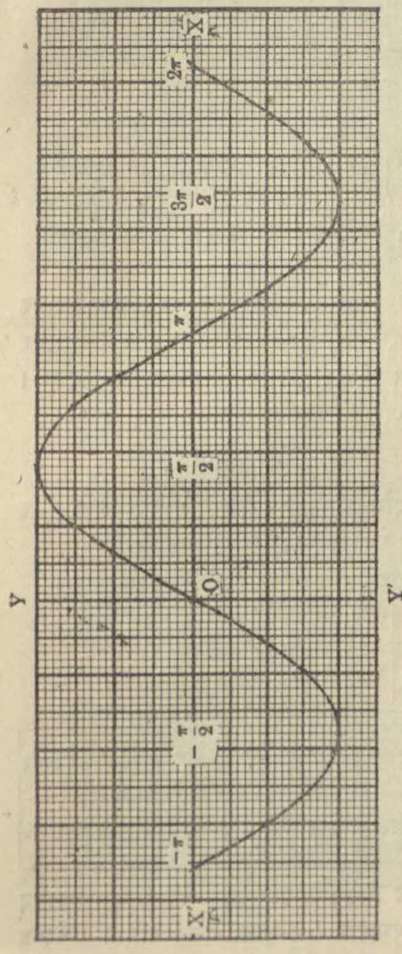
মনে কর, $y = \sin x$; x-এর বিভিন্ন মান এবং এই সমীকরণ হইতে প্রাপ্ত y-এর অনুরূপ মানসমূহ লইয়া নিম্নের তালিকা প্রস্তুত করা হইল।

x	$-90°$	$-80°$	$-70°$	$-60°$	$-50°$	$-40°$	$-30°$	$-20°$	$-10°$	$0°$
$y=\sin x$	-1	$-·98$	$-·94$	$-·87$	$-·77$	$-·64$	$-·50$	$-·34$	$-·17$	0

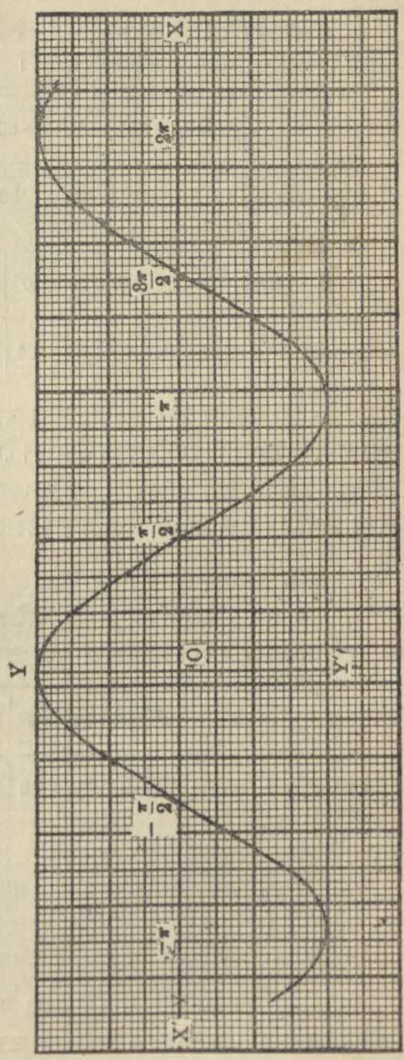
x	$10°$	$20°$	$30°$	$40°$	$50°$	$60°$	$70°$	$80°$	$90°$
$y=\sin x$	·17	·34	·50	·64	·77	·87	·94	·98	1

x	$100°$	$110°$	$120°$	$130°$	$140°$	$150°$	$160°$	$170°$	$180°$
$y=\sin x$	·98	·94	·87	·77	·64	·50	·34	·17	0

x-অক্ষ বরাবর ছক-কাগজের ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের এক বাহুর দ্বিগুণ দৈর্ঘ্যকে 10° এবং y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের এক বাহুর 20 গুণ দৈর্ঘ্যকে sine-সূচক একক ধরিয়া উপরের বিন্দুগুলি স্থাপন করা হইল এবং একটি সন্তত রেখা দ্বারা উহাদিগকে যোগ করা হইল। প্রাপ্ত রেখাই (পরপৃষ্ঠার চিত্র) এই অপেক্ষকের লেখ।



Sine-এর লেখ



Cosine-এর লেখ

6·4. cos x-এর লেখ।

মনে কর, $y = \cos x$.

x-এর বিভিন্ন মান এবং এই সমীকরণ হইতে প্রাপ্ত y-এর অনুরূপ মানসমূহ লইয়া নিম্নের তালিকা প্রস্তত করা হইল।

x	$-90°$	$-80°$	$-70°$	$-60°$	$-50°$	$-40°$	$-30°$	$-20°$	$-10°$
$y = \cos x$	0	·17	·34	·50	·64	·77	·87	·94	·98

x	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°	100°	110°	ইত্যাদি
$y = \cos x$	1	·98	·94	·87	·77	·64	·50	·34	·17	0	$-$·17	$-$·34	ইত্যাদি

x-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের 1 বাহুর দ্বিগুণ দৈর্ঘ্যকে 10° এবং y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের 1 বাহুর দৈর্ঘ্যের 20 গুণ দৈর্ঘ্যকে cosine-সূচক একক ধরিয়া উপরের বিন্দুগুলি স্থাপন করা হইল এবং একটি সন্তত রেখা দ্বারা উহাদিগকে যোগ করা হইল। প্রাপ্ত রেখাই (পৃষ্ঠা 69-এর ডানদিকের চিত্র) এই অপেক্ষকের লেখ।

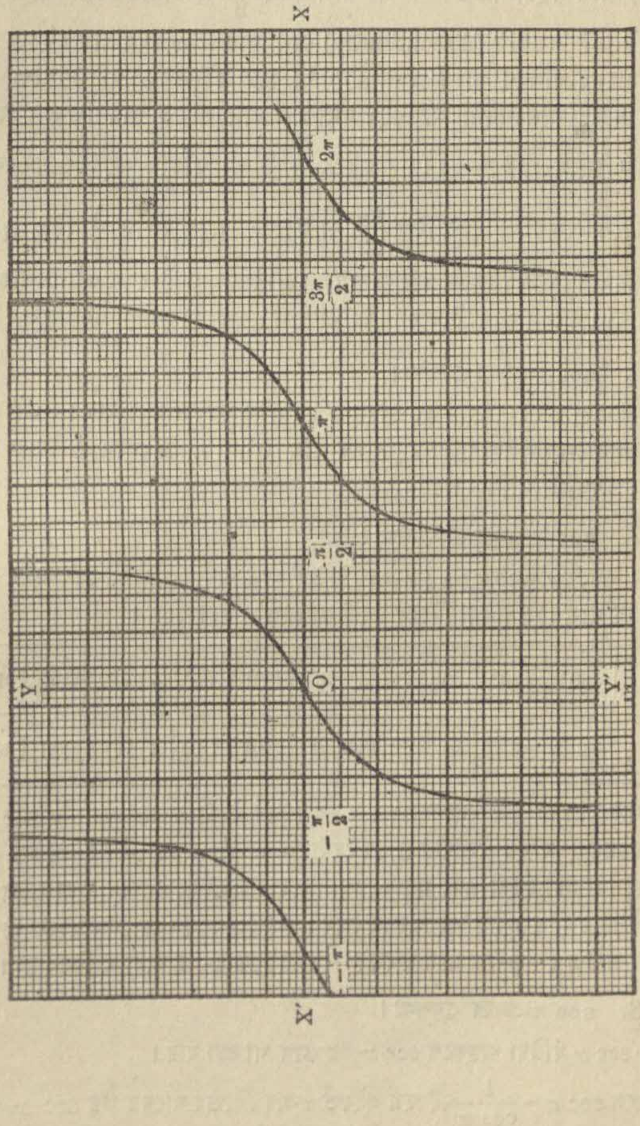
6·5. tan x-এর লেখ।

মনে কর, $y = \tan x$; x-এর বিভিন্ন মান এবং এই সমীকরণ হইতে প্রাপ্ত y-এর অনুরূপ মানসমূহ লইয়া নিম্নের তালিকা প্রস্তত করা হইল।

x	$-20°$	$-10°$	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°	100°	ইত্যাদি
$y = \tan x$	$-$·36	$-$·18	0	·18	·36	·58	·84	1·19	1·73	2·75	5·67	∞	$-$5·67	ইত্যাদি

x-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের 1 বাহুর দ্বিগুণ দৈর্ঘ্যকে 10° এবং y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের এক বাহুর দৈর্ঘ্যের 6 গুণ দৈর্ঘ্যকে tan-সূচক একক ধরিয়া উপরের বিন্দুগুলি স্থাপন করা হইল এবং একটি সন্তত রেখা দ্বারা উহাদিগকে যোগ করা হইল। এই চিত্রটি (পরপৃষ্ঠার চিত্র) এই অপেক্ষকের লেখ।

দ্রষ্টব্য। tangent লেখ-এর বৈশিষ্ট্য : চিত্র হইতে দেখা যাইতেছে যে,



Tangent-এর লেখ

এই লেখটি একটিমাত্র সন্তত রেখা নহে। ইহা অনুরূপ আকৃতির অসংখ্য বিচ্ছিন্ন (separate) অংশ লইয়া গঠিত। x-এর মান যখন $\frac{\pi}{2}$ বা তাহার কোন অযুগ্ম গুণিতক হয়, তখনই এই অসন্ততি (discontinuity) দেখা যায়। x যখন বাম হইতে আসিয়া এইসকল মানের দক্ষিণে যায় (যেমন 80° বা 85° হইতে 95° বা 96°-তে গেলে) তখন $\tan x$-এর মান সহসা অতিবৃহৎ ধনাত্মক মান হইতে পরিবর্তিত হইয়া অতি বৃহৎ ঋণাত্মক মানে পরিণত হয়। x-এর মান $\frac{\pi}{2}$ বা তাহার অযুগ্ম গুণিতকের যত নিকটে আসে, লেখটিও সেই বিন্দু $\left(\frac{\pi}{2}\right.$ বা তাহার অযুগ্ম গুণিতক$\left.\right)$ দিয়া y-রেখার সমান্তরাল রেখার তত নিকটে চলিয়া আসে। কিন্তু কখনই লেখ এই রেখার সহিত মিলিত হয় না। সেই রেখাটিকে লেখটির **অসীম রেখা** (asymptote) বলে।

6·6. cot x-এর লেখ।

$y=\cot x$ ধরিয়া $\tan x$-এর ন্যায় এই লেখটিও অঙ্কিত করা যায়। এই লেখটিও অসংখ্য অসন্তত লেখ লইয়া গঠিত। x-এর মান 0° বা π-এর কোন গুণিতক হইলেই এই লেখ-এ অসন্ততি আসিয়া পড়ে।

6·7. cosec x-এর লেখ।

মনে কর, $y=\operatorname{cosec} x$; x-এর বিভিন্ন মান এবং এই সমীকরণ হইতে প্রাপ্ত y-এর অনুরূপ মানসমূহ লইয়া নিম্নের তালিকা প্রস্তুত করা হইল।

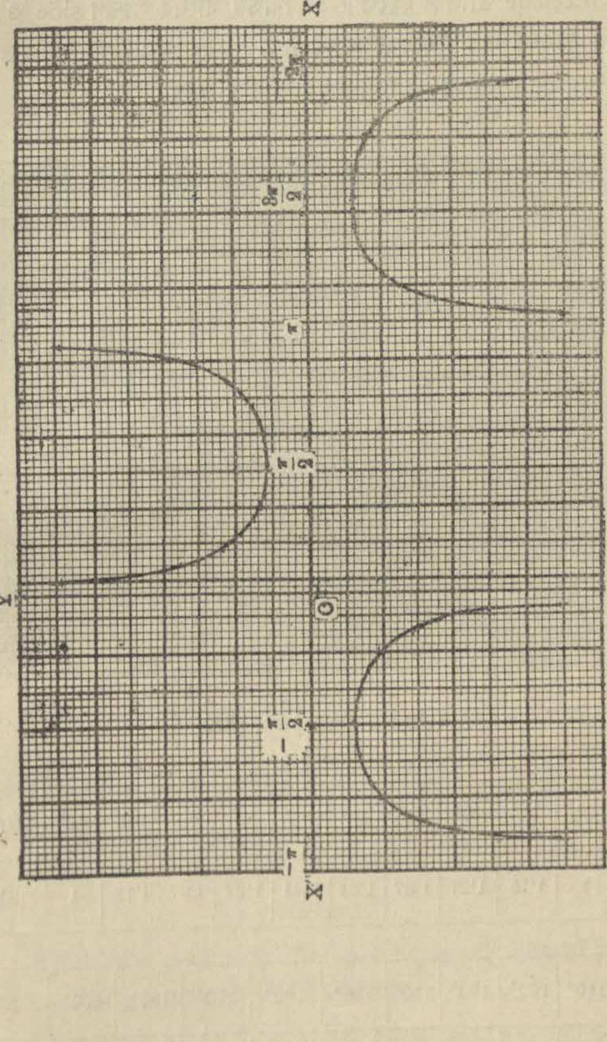
x	−20°	−10°	0°	10°	20°	30°	ইত্যাদি	80°	90°	100°	110°	ইত্যাদি
$y=$ cosec x	−2·92	−5·76	∞	5·76	2·92	2	ইত্যাদি	1·02	1	1·02	1·06	ইত্যাদি

x-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের 1 বাহুর দ্বিগুণ দৈর্ঘ্যকে 10° এবং y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের 1 বাহুর দৈর্ঘ্যের 6 গুণ দৈর্ঘ্যকে cosec-সূচক একক ধরিয়া উপরের বিন্দুগুলি স্থাপন করা হইল এবং সন্তত রেখা দ্বারা উহাদিগকে যোগ করা হইল। এই চিত্রটি (পরপৃষ্ঠার চিত্র) এই অপেক্ষকের লেখ। [cosec x-এর লেখও অসংখ্য অসন্তত রেখা লইয়া গঠিত। y-এর মান কখনই −1 হইতে 1-এর মধ্যে থাকিবে না।]

6·8. sec x-এর লেখ।

$y=\sec x$ ধরিয়া অনুরূপে $\sec x$-এর লেখ পাওয়া যায়।

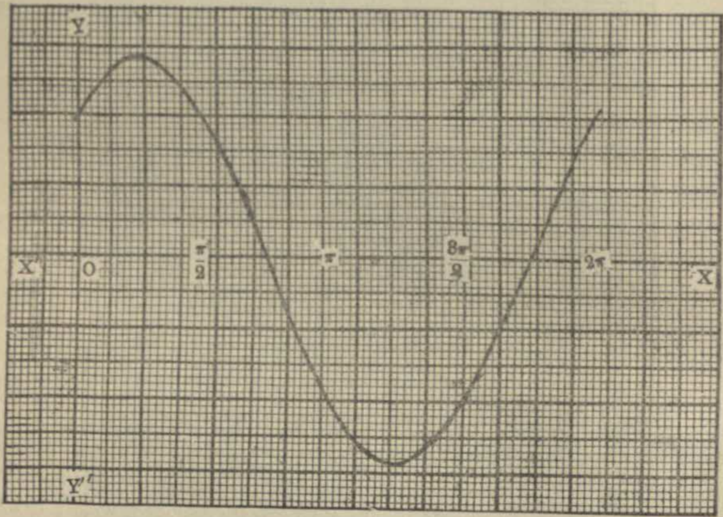
এস্থলে $\sec x=\frac{1}{\cos x}$ এই সূত্র হইতে x-এর বিভিন্ন মানের জন্য $\sec x$-এর মান নির্ণয় করিয়া চিত্রটি অঙ্কিত করিতে হইবে।



Cosecant-এর লেখ

6·9. উদা. 1. x-এর মান $0°$ হইতে 2π-এর মধ্যে লইয়া $y = \sin x + \cos x$-এর লেখ অঙ্কন কর। লেখ হইতে x-এর যে মানের জন্য (i) $y = 0$, (ii) y চরম এবং (iii) y অবম হয়, সেই মানগুলি নির্ণয় কর।

sine ও cosine তালিকা হইতে x-এর বিভিন্ন মানের অনুরূপ sine ও cosine-এর মান নির্ণয় করিয়া এই সমীকরণের সাহায্যে y-এর মান নির্ণয় করিতে হইবে। নিম্নের তালিকায় x ও অনুরূপ y-এর মানসমূহ সন্নিবিষ্ট হইল।



$(\sin x + \cos x)$-এর লেখ

x	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°	100°
y	1	1·15	1·27	1·37	1·41	1·41	1·37	1·27	1·15	1	·81

x	110°	120°	130°	140°	150°	160°	170°	180°	190°	200°
y	·59	·37	·13	−·13	−·37	−·59	−·81	−1	−1·15	−1·27

x	210°	220°	230°	240°	250°	260°	270°	280°
y	−1·37	−1·41	−1·41	−1·37	−1·27	−1·15	−1	−·81

x	290°	300°	310°	320°	330°	340°	350°	360°
y	−·59	−·37	−·13	·13	·37	·59	·81	1

x-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের এক বাহুর দ্বিগুণ দৈর্ঘ্যকে 10° এবং y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের এক বাহুর দৈর্ঘ্যের 20 গুণ দৈর্ঘ্যকে sine ও cosine-এর সমষ্টিসূচক একক ধরিয়া এই বিন্দুগুলি স্থাপন করা হইল এবং একটি সন্তত রেখা দ্বারা উহাদিগকে যোগ করা হইল। প্রাপ্ত রেখাই (পূর্বপৃষ্ঠার চিত্র) উদ্দিষ্ট লেখ।

লেখ হইতে দেখা যাইতেছে, (i) $y=0$, যখন $x=135°$ এবং $x=315°$, (ii) y-এর মান চরম, যখন $x=45°$, (iii) y-এর মান অবম, যখন $x=225°$.

6·10. ত্রৈকোণমিতিক সমীকরণের লৈখিক সমাধান (Trigonometrical Solutions of equations)।

বীজগণিতের সমীকরণের ন্যায় সাধারণতঃ সমীকরণের দুই পক্ষের দুইটি লেখ অঙ্কন করিয়া ত্রৈকোণমিতিক সমীকরণেরও সমাধান করা যায়। সময়ে সময়ে অবশ্য পক্ষান্তর করিয়া একপক্ষকে একেবারে শূন্য করিয়া, অথবা, সুবিধামতো পক্ষান্তর করিয়া এবং সূত্র-সাহায্যে যে-কোন অথবা উভয়পক্ষস্থ অপেক্ষককে অপেক্ষাকৃত সরল করিয়া লইয়া সমাধান করা হয়।

উদা. 2. লৈখিক উপায়ে সমাধান কর : $2\sin^2 x=\cos 2x$; $-\frac{\pi}{2}$ এবং $\frac{3\pi}{2}$-এর মধ্যবর্তী x-এর মানগুলি নির্ণয় করিতে হইবে।

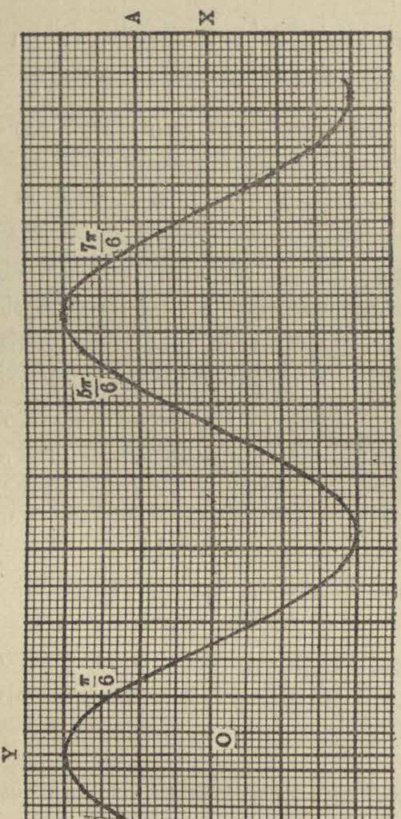
এস্থলে, $2\sin^2 x=\cos 2x$,

বা, $1-\cos 2x=\cos 2x$, বা, $1=2\cos 2x$,

বা, $\frac{1}{2}=\cos 2x$.

অতএব, (i) $y=\frac{1}{2}$ এবং (ii) $y=\cos 2x$-এর লেখ-দুইটি অঙ্কিত করিয়া উহাদের ছেদবিন্দুর x-স্থানাঙ্কই নির্ণেয় বীজ হইবে।

(i) x-অক্ষের সমান্তরাল এবং উহা হইতে y-অক্ষের ধনাত্মক দিকে $\frac{1}{2}$ একক দূরে অবস্থিত সরল রেখাটিই $y=\frac{1}{2}$-এর লেখ। y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের



$2\sin^2 x = \cos 2x$-এর লৈখিক সমাধান

বাহুর 20 গুণকে একক ধরিয়া লেখটি অঙ্কিত করা হইল। চিত্রে লেখটি AB রেখা দ্বারা সূচিত হইয়াছে।

(ii) $y=\cos 2x$-এর লেখ অঙ্কিত করিবার জন্য সমীকরণটিকে সিদ্ধ করে এইরূপ x এবং অনুরূপ y-এর মান নির্ণয় করিয়া নিম্নের তালিকাটি প্রস্তুত করা হইল :

x	$-90°$	$-75°$	$-60°$	$-45°$	$-30°$	$-15°$	$0°$
y	-1	$-·87$	$-·5$	0	·5	·87	1

x	$15°$	$30°$	$45°$	$60°$	$75°$	$90°$	$105°$
y	·87	·5	0	$-·5$	$-·87$	-1	$-·87$

x	$120°$	$135°$	$150°$	$165°$	$180°$	$195°$	$210°$	$225°$	$240°$	$255°$	$270°$
y	$-·5$	0	·5	·87	1	·87	·5	0	$-·5$	$-·87$	-1

এখন ছক-কাগজে x-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের বাহুর পাঁচগুণ দৈর্ঘ্যকে 15°-এর সমান ধরিয়া এবং y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্যের 20 গুণ দৈর্ঘ্যকে cos-সূচক একক ধরিয়া উপরের বিন্দুগুলি স্থাপন করা হইল এবং একটি সন্তত রেখা দ্বারা উহাদিগকে সংযুক্ত করা হইল। প্রাপ্ত রেখাই (পূর্বপৃষ্ঠার চিত্র) $\cos 2x$-এর লেখ।

একই মূলবিন্দু এবং অক্ষ লইয়া এবং একই এককে $y=\frac{1}{2}$-এর লেখটিও অঙ্কিত করা হইয়াছে।

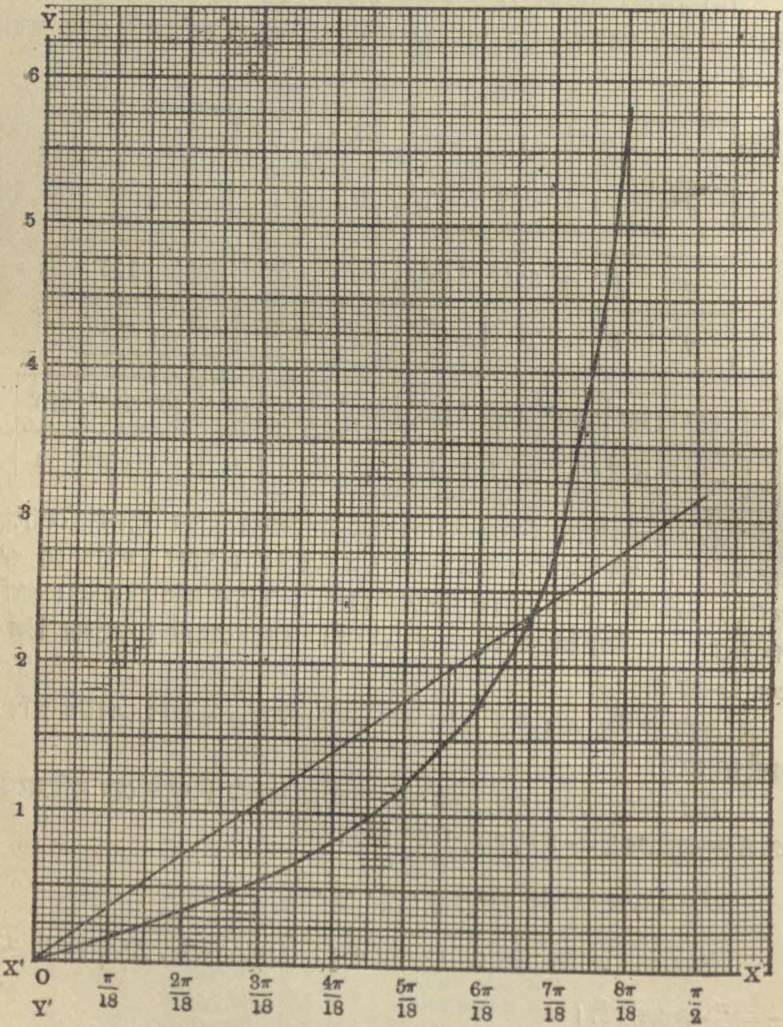
চিত্র হইতে দেখা যায়, লেখ-দুইটি পরস্পর চারিটি বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। ছেদবিন্দু-চারিটির ভুজ $-30°, 30°, 150°, 210°$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $\mathbf{x}=-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}.$

উদা. 3. লৈখিক উপায়ে সমাধান কর : $\tan x=2x$, যখন $x=0$ এবং $x=\frac{\pi}{2}$-এর মধ্যবর্তী।

এস্থলে x রেডিয়ানে প্রকাশিত হইয়াছে মনে করিতে হইবে।

(i) $y=\tan x$ এবং (ii) $y=2x$-এর লেখ-দুইটি অঙ্কিত করিলে উহাদের ছেদবিন্দুর x-স্থানাঙ্কই নির্ণেয় বীজ।



tan $x = 2x$-এর লৈখিক সমাধান

$x=0$ এবং $x=\frac{\pi}{2}$ সীমার মধ্যে সমীকরণকে সিদ্ধ করে এইরূপ x-এর মানসমূহ এবং অনুরূপ y-এর মানসমূহ লইয়া নিম্নের তালিকাটি প্রস্তুত করা হইল :

x (রেডিয়ানে প্রকাশিত)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
y	0	1·05	2·10	3·15

(ii)

x (রেডিয়ানে প্রকাশিত)	0	$\frac{\pi}{18}$	$\frac{2\pi}{18}$	$\frac{3\pi}{18}$	$\frac{4\pi}{18}$	$\frac{5\pi}{18}$	$\frac{6\pi}{18}$	$\frac{7\pi}{18}$	$\frac{8\pi}{18}$	$\frac{\pi}{2}$
y	0	·18	·36	·57	·84	1·19	1·73	2·75	5·67	অনির্দিষ্ট

এখন ছক-কাগজে x-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের 1 বাহুর 10 গুণ দৈর্ঘ্যকে $\frac{\pi}{18}$ রেডিয়ানের সমান এবং y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের 1 বাহুর দৈর্ঘ্যের 20 গুণ দৈর্ঘ্যকে কোণের tan-সূচক একক ধরিয়া উপরের বিন্দুগুলি স্থাপন করা হইল এবং প্রতি ক্ষেত্রে একটি সন্তত রেখা দ্বারা প্রত্যেকটির বিন্দুগুলিকে সংযুক্ত করা হইল। প্রাপ্ত রেখা-দুইটি (পূর্বপৃষ্ঠার চিত্র) (i) এবং (ii)-এর লেখ।

চিত্র হইতে দেখা যায় লেখ-দুইটি যে দুইটি বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে, মূলবিন্দু হইতে x-অক্ষ বরাবর তাহাদের দূরত্ব 0 এবং 33·5 (স্থূলভাবে); অতএব, ঐ দুই ছেদবিন্দুর x-স্থানাঙ্ক $=0$ এবং $\frac{33\cdot5}{5}\times\frac{\pi}{18}$ রেডিয়ান, অর্থাৎ, 0 এবং 1·17 রেডিয়ান (স্থূলভাবে)।

অতএব, $x=0$ এবং $x=\frac{\pi}{2}$ সীমার মধ্যে প্রদত্ত সমীকরণের সমাধান $x=0$ রেডিয়ান এবং $x=1\cdot17$ রেডিয়ান (স্থূলভাবে)।

প্রশ্নমালা 7

1. লেখ অঙ্কন কর :

(i) $\sin 5x$-এর ; (ii) $\sin x-\cos x$-এর ;

(iii) $x=0°$ হইতে $x=\frac{\pi}{2}$ পর্যন্ত $\tan 2x$-এর।

2. $\theta=0°$ হইতে $\theta=\pi$ সীমার মধ্যে $\sin\theta$ এবং $\cos\theta$-এর লেখ অঙ্কন কর। লেখ-দুইটির ছেদবিন্দুগুলি নির্ণয় কর।

3. $\cos x - \sin 2x$-এর লেখ অঙ্কন কর। x-এর মান $0°$ হইতে $90°$-এর মধ্যে হইতে হইবে। এই সীমার মধ্যে $\cos x - \sin 2x$-এর ক্ষুদ্রতম মান নির্ণয় কর।

4. $x = 0°$ এবং $x = \frac{\pi}{2}$ সীমার মধ্যে লেখ অঙ্কন করিয়া সমাধান কর :

$$\tan x = \cos x.$$

5. $x = -\pi$ হইতে $x = +\pi$ সীমার মধ্যে $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$-এর লেখ অঙ্কন কর।

6. $x = 0°$ এবং $x = \frac{\pi}{2}$ সীমার মধ্যে লেখ অঙ্কন করিয়া $x = \tan x$-এর সমাধান কর।

7. একই অক্ষদ্বয় লইয়া $-\frac{\pi}{2}$ এবং $+\frac{\pi}{2}$ সীমার মধ্যে $y = x$, $y = \sin x$ এবং $y = \tan x$-এর লেখ অঙ্কন কর। মূলবিন্দুর নিকট লেখসমূহের প্রকৃতি হইতে, মূলবিন্দুতে লেখসমূহের মধ্যে কোন সম্পর্ক তুমি কি উল্লেখ করিতে পার ?

[C. U. 1952]

সপ্তম অধ্যায়

ত্রৈকোণমিতিক সমীকরণ এবং সাধারণ মান
(Trigonometrical Equations and General Values)

7·1. একই মানের ত্রৈকোণমিতিক অনুপাত-বিশিষ্ট অসংখ্য কোণ থাকিতে পারে ; যেমন, $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ হইলে, sine ধনাত্মক বলিয়া θ কোণটি প্রথম অথবা দ্বিতীয় পাদের হইবে। এখন, আমরা জানি $\sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$; অতএব, θ-এর ক্ষুদ্রতম ধনাত্মক মান 45°, আর উহার দ্বিতীয় পাদের মান হইল, (180° − 45°) বা 135°. আবার, কোন কোণের সহিত 360°-এর ধনাত্মক অথবা ঋণাত্মক যে-কোন গুণিতক যোগ করিলেও ত্রৈকোণমিতিক অনুপাত একই থাকে বলিয়া,

$$45°, 135°, 405°, 495°, \cdots, -315°, -225°, \cdots$$

ইত্যাদি অসংখ্য কোণের প্রত্যেকটিরই sine হইবে $\frac{1}{\sqrt{2}}$, এইরূপ $\cos\theta = \frac{1}{2}$ হইলে, θ-এর মান 60°, 300°, 420°, 660°, ⋯, −300°, −60°,⋯ প্রভৃতি অসংখ্য কোণের যে-কোন একটি হইতে পারে ; $\tan\theta = \sqrt{3}$ হইলে, θ-এর মান 60°, 240°, 420°, 600°,⋯, −300°, −120°,⋯ প্রভৃতি অসংখ্য কোণের যে-কোন একটি হইতে পারে।

ত্রৈকোণমিতিক সমীকরণ সমাধানে এবং অন্যান্য ক্ষেত্রেও এইরূপ যে সকল অসংখ্য কোণের কোন ত্রৈকোণমিতিক অনুপাত একই মানবিশিষ্ট তাহাদের নির্ণয়ের প্রয়োজন হয় বলিয়া ঐ সকল অসংখ্য কোণ-প্রকাশক সংক্ষিপ্ত সাধারণ সূত্র উদ্ভাবিত হইয়াছে। পরবর্তী কয়েকটি অনুচ্ছেদে উদ্ভাবন-প্রণালী-সমেত বিভিন্ন ক্ষেত্রানুরূপ সাধারণ সূত্রসমূহ প্রদত্ত হইল।

7·2. শূন্য ত্রৈকোণমিতিক অনুপাতবিশিষ্ট কোণ-সমূহের সাধারণ রূপ।

(i) যে-কোন কোণ θ-এর এক বাহুস্থিত কোন বিন্দু হইতে অপর বাহুর উপর লম্ব অঙ্কন করিলে, আমরা জানি $\sin\theta = \frac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}}$;

$\therefore$ $\sin\theta = 0$ হইলে, লম্ব $= 0$.

এখন, লম্বের মান শূন্য হইতে হইলে, কোণটির বাহুদ্বয়কে একই সরল রেখায় অবস্থিত হইতে হইবে ; অতএব, তখন θ-এর মান হইবে

$$0, \pi, 2\pi, 3\pi, \cdots, -\pi, -2\pi, -3\pi, \cdots$$

স্পষ্টই, এই অসংখ্য কোণগুলিকে n-এর মান শূন্য অথবা যে-কোন ধনাত্মক অথবা ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা লইলে, $n\pi$ দ্বারা প্রকাশ করা যায়। অতএব,

$$\sin\theta=0 \text{ হইলে, } \theta=n\pi.$$

এস্থলে, n শূন্য অথবা যে-কোন ধনাত্মক অথবা ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা।

(ii) যে-কোন কোণ θ-এর এক বাহুস্থিত কোন বিন্দু হইতে অপর বাহুর উপর লম্ব অঙ্কন করিলে, আমরা জানি $\cos\theta=\dfrac{\text{ভূমি}}{\text{অতিভুজ}}$;

$\therefore\ \cos\theta=0$ হইলে, ভূমি $=0$.

এখন ভূমির মান শূন্য হইতে হইলে কোণের বাহুদ্বয়কে পরস্পর লম্ব হইতে হইবে; অতএব, তখন θ-এর মান হইবে

$$\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2},\ \frac{5\pi}{2},\ \ldots,\ -\frac{\pi}{2},\ -\frac{3\pi}{2},\ -\frac{5\pi}{2},\ldots$$

স্পষ্টই, এই অসংখ্য কোণগুলিকে n-এর মান শূন্য অথবা যে-কোন ধনাত্মক অথবা ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা লইলে, $(2n+1)\frac{\pi}{2}$ দ্বারা প্রকাশ করা যায়। অতএব,

$\cos\theta=0$ হইলে, $\boldsymbol{\theta=(2n+1)\frac{\pi}{2}}\cdot$

এস্থলে, n শূন্য অথবা যে-কোন ধনাত্মক অথবা ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা।

(iii) $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=0$ হইলে, $\sin\theta=0$;

$$\therefore\ \boldsymbol{\theta=n\pi.}$$

এস্থলে, n শূন্য অথবা যে-কোন ধনাত্মক অথবা ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা।

(iv) $\cot\theta=\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}=0$ হইলে, $\cos\theta=0$;

$$\therefore\ \boldsymbol{\theta=(2n+1)\frac{\pi}{2}}\cdot$$

এস্থলে, n শূন্য অথবা যে-কোন ধনাত্মক অথবা ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা।

(v) $|\sin\theta|<1$ এবং $|\cos\theta|<1$;

$\therefore\ |\text{cosec}\,\theta|>1$ এবং $|\sec\theta|>1$;

$\therefore\ \text{cosec}\,\theta\neq 0$, এবং $\sec\theta\neq 0$.

7·3. একই sin (অথবা cosecant)-বিশিষ্ট অসংখ্য কোণ-প্রকাশক সূত্র।

a একটি নির্দিষ্ট ধনাত্মক অথবা ঋণাত্মক সংখ্যা, এবং $a<1$. যে অসীমসংখ্যক কোণের প্রত্যেকটির sine a-এর সমান, সেই সকল কোণ-প্রকাশক সূত্র নির্ণয় করিতে

হইবে। যে সকল কোণের sine α-এর সমান, মনে কর, তাহাদের মধ্যে ক্ষুদ্রতম ধনাত্মক কোণটি α, এবং θ যেন সেই অজ্ঞাত কোণসমূহের সাধারণ নাম। তাহা হইলে,

$$\sin\theta = \sin\alpha, \quad \text{বা,} \quad \sin\theta - \sin\alpha = 0,$$

বা, $2\cos\dfrac{\theta+\alpha}{2}\sin\dfrac{\theta-\alpha}{2} = 0$;

$\therefore \quad \cos\dfrac{\theta+\alpha}{2} = 0,$ ... ... (1)

অথবা, $\sin\dfrac{\theta-\alpha}{2} = 0,$ ... ... (2)

(1) হইতে, $\dfrac{\theta+\alpha}{2} = (2m+1)\dfrac{\pi}{2}$,

এস্থলে, m শূন্য অথবা যে-কোন ধনাত্মক অথবা ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা,

বা, $\theta = +(2m+1)\pi - \alpha$ ... ... (3)

(2) হইতে, $\dfrac{\theta-\alpha}{2} = m\pi,$

এস্থলে, m শূন্য অথবা যে-কোন ধনাত্মক অথবা ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা,

বা, $\theta = 2m\pi + \alpha$ ... ... (4)

(3) এবং (4) একত্র করিয়া,

$\theta = n\pi + (-1)^n\alpha.$ ... ... (5)

কেননা, n অযুগ্ম সংখ্যা $2m+1$ হইলে,

$$\theta = (2m+1)\pi + (-1)^{2m+1}\alpha = (2m+1)\pi - \alpha,$$

এবং n যুগ্ম-সখ্যা $2m$ হইলে,

$$\theta = 2m\pi + (-1)^{2m}\alpha = 2m\pi + \alpha.$$

এস্থলে, n শূন্য অথবা যে-কোন ধনাত্মক অথবা ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা।

আবার, $\operatorname{cosec}\theta = \operatorname{cosec}\alpha$ হইলে, $\sin\theta = \sin\alpha$;

$\therefore$ এক্ষেত্রেও $\theta = n\pi + (-1)^n\alpha.$

অতএব, যে সকল কোণের sine অথবা cosecant α-এর sine অথবা cosec-এর সমান, তাহাদিগকে n শূন্য অথবা যে-কোন ধনাত্মক অথবা ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা ধরিয়া,

$$\mathbf{n\pi + (-1)^n\alpha}$$

রাশিটি হইতে পাওয়া যায়।

দ্রষ্টব্য ঃ যে অসীম-সংখ্যক কোণের প্রত্যেকটির sine অথবা cosecant α-এর সমান তাহাদিগের ক্ষুদ্রতম ধনাত্মক কোণ α লইয়া সূত্র গঠন না করিয়া উহাদিগের

যে-কোন একটিকেই লইয়া সূত্র গঠন করিলেও সেই সূত্র হইতে পূর্বানুরূপ কোণসমূহই পাওয়া যাইবে।

7·4. একই cosine (অথবা secant)-বিশিষ্ট অসংখ্য কোণ-প্রকাশক সূত্র।

a একটি নির্দিষ্ট ধনাত্মক অথবা ঋণাত্মক সংখ্যা, এবং $a < 1$. যে অসীমসংখ্যক কোণের প্রত্যেকটির cosine a-এর সমান, মনে কর, তাহাদের মধ্যে ক্ষুদ্রতম ধনাত্মক কোণটি α, এবং θ যেন সেই অজ্ঞাত কোণসমূহের সাধারণ নাম। তাহা হইলে,

$$\cos\theta = \cos\alpha, \text{ বা, } \cos\alpha - \cos\theta = 0,$$

বা, $$2\sin\frac{\theta+\alpha}{2}\sin\frac{\theta-\alpha}{2} = 0,$$

$$\therefore \quad \sin\frac{\theta+\alpha}{2} = 0, \qquad \cdots \qquad \cdots \quad (1)$$

অথবা, $$\sin\frac{\theta-\alpha}{2} = 0. \qquad \cdots \qquad \cdots \quad (2)$$

(1) হইতে, $\frac{\theta+\alpha}{2} = n\pi$, এস্থলে n শূন্য অথবা যে-কোন ধনাত্মক অথবা ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা,

বা, $$\theta = 2n\pi - \alpha. \qquad \cdots \qquad \cdots \quad (3)$$

(2) হইতে, $\frac{\theta-\alpha}{2} = n\pi$, এস্থলেও n শূন্য অথবা যে-কোন ধনাত্মক অথবা ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা,

বা, $$\theta = 2n\pi + \alpha \qquad \cdots \qquad \cdots \quad (4)$$

(3) এবং (4) একত্র করিয়া,

$\theta = 2n\pi \pm \alpha$, এস্থলে n শূন্য অথবা যে-কোন ধনাত্মক অথবা ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা।

আবার, $\sec\theta = \sec\alpha$ হইলে, $\cos\theta = \cos\alpha$;

$\therefore$ এক্ষেত্রেও $\theta = 2n\pi \pm \alpha$.

অতএব, যে সকল কোণের cosine অথবা secant α-এর cosine অথবা secant-এর সমান, তাহাদিগকে n শূন্য অথবা যে-কোন ধনাত্মক অথবা ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা ধরিয়া,

$$2n\pi \pm \alpha$$

রাশিটি হইতে পাওয়া যায়।

দ্রষ্টব্য ঃ যে অসীম-সংখ্যক কোণের প্রত্যেকটির cosine অথবা secant a, তাহাদিগের ক্ষুদ্রতম ধনাত্মক কোণ α-কে লইয়া সূত্র গঠন না করিয়া তাহাদিগের যে-কোন একটিকেই লইয়া সূত্র গঠন করিলেও সেই সূত্র হইতে পূর্বানুরূপ কোণসমূহই পাওয়া যাইবে।

7·5. একই tangent (অথবা cotangent)-বিশিষ্ট অসংখ্য কোণ-প্রকাশক সূত্র।

a একটি নির্দিষ্ট ধনাত্মক অথবা ঋণাত্মক সংখ্যা। যে অসীম-সংখ্যক কোণের প্রত্যেকটির tangent a-এর সমান, মনে কর, তাহাদের মধ্যে ক্ষুদ্রতম ধনাত্মক কোণটি α, এবং θ যেন সেই অজ্ঞাত কোণসমূহের সাধারণ নাম। তাহা হইলে,

$$\tan\theta = \tan\alpha, \text{ বা, } \tan\theta - \tan\alpha = 0,$$

বা, $$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 0,$$

বা, $$\frac{\sin\theta\cos\alpha - \cos\theta\sin\alpha}{\cos\theta\cos\alpha} = 0,$$

বা, $$\frac{\sin(\theta-\alpha)}{\cos\theta\cos\alpha} = 0,$$

বা, $\sin(\theta-\alpha) = 0 \times \cos\theta\cos\alpha = 0,$

কারণ, $\cos\theta$ অথবা $\cos\alpha$-এর কোনটিই অসীম নহে ;

$\therefore\ \theta - \alpha = n\pi$, এস্থলে n শূন্য অথবা যে-কোন ধনাত্মক অথবা ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা ;

$\therefore\ \theta = n\pi + \alpha.$

আবার, $\cot\theta = \cot\alpha$ হইলে, $\tan\theta = \tan\alpha$;

$\therefore$ এক্ষেত্রেও $\theta = n\pi + \alpha.$

অতএব, যে সকল কোণের tangent অথবা cotangent α-এর tangent, অথবা cotangent-এর সমান, তাহাদিগকে n শূন্য অথবা যে-কোন ধনাত্মক অথবা ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা ধরিয়া,

$$n\pi + \alpha$$

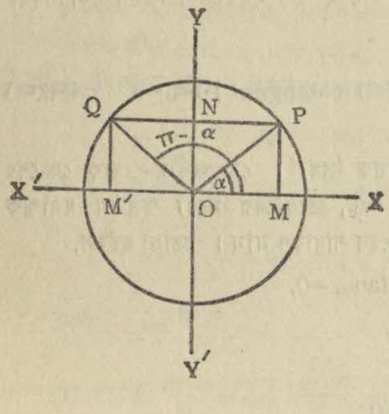
রাশিটি হইতে পাওয়া যায়।

7·6. পূর্বপ্রাপ্ত সূত্র-সমূহ নির্ণয়ের জ্যামিতিক পদ্ধতি।

(i) একই sine (বা cosecant)-বিশিষ্ট অসংখ্য কোণ-প্রকাশক সূত্র ঃ

a একটি নির্দিষ্ট ধনাত্মক অথবা ঋণাত্মক সংখ্যা, এবং $a < 1$. যে অসীম-সংখ্যক

কোণের প্রত্যেকটির sine a-এর সমান, তাহাদিগকে অঙ্কন করিতে হইবে এবং সেই সকল কোণ-নির্ণায়ক সূত্র গঠন করিতে হইবে।



$\overleftrightarrow{XOX'}$, $\overleftrightarrow{YOY'}$ দুইটি পরস্পর লম্ব সরল রেখা O বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। O-কে কেন্দ্র করিয়া এবং একক ব্যাসার্ধ লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর। এখন, a ধনাত্মক হইলে, $\overrightarrow{OY}$ হইতে এবং ঋণাত্মক হইলে, $\overrightarrow{OY'}$ হইতে a-এর সাংখ্য-মানের সমান করিয়া $\overline{ON}$ অংশ কাটিয়া লও এবং N বিন্দু দিয়া PNQ ∥ XOX′ আঁক। PNQ সরল রেখা বৃত্তটিকে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করিল। P ও Q হইতে XOX′-এর উপর যথাক্রমে $\overline{PM}$ ও $\overline{QM'}$ লম্ব টান।

এখন, $MP = ON = a$,

$\therefore \quad \sin \angle POM = \dfrac{MP}{OP} = \dfrac{a}{1} = a.$

∴ যে সকল কোণের sine a-এর সমান, ∠POM তাহাদের একটি। ∠POM-কে α দ্বারা সূচিত কর।

আবার, $M'Q = ON = a$;

$\therefore \quad \sin \angle QOX = \dfrac{M'Q}{OQ} = \dfrac{a}{1} = a.$

∴ যে সকল কোণের sine a-এর সমান, ∠QOX ও তাহাদের একটি।

এখন, POM ও QOM′ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম বলিয়া,

$\angle QOM' = \angle POM$, অর্থাৎ, α ;

$\therefore \quad \angle QOX = \pi - \alpha.$

তাহা হইলে, যে সকল কোণের sine a তাহাদের দুইটি হইল α এবং $\pi - \alpha$.

N বিন্দুর অবস্থানটি সুনির্দিষ্ট এবং এই N বিন্দুর সাহায্যে α ও $\pi - \alpha$ কোণ দুইটি অঙ্কন করা হইয়াছে ; অতএব, OX হইতে আরম্ভ করিয়া ঘূর্ণ্যমান সরল রেখাটির একবার ঘুরিয়া পুনরায় OX অবস্থানে আসার মধ্যে, অর্থাৎ, 0 হইতে 2π-এর মধ্যে α ও $\pi - \alpha$ ভিন্ন অন্য কোন কোণ নাই যাহাদের sine a-এর সমান।

এখন 2π বা 2π-এর কোন গুণিতক কোন কোণের সহিত যোগ বা উহা হইতে বিয়োগ করিলেও লব্ধ কোণ বা কোণসমূহের ত্রৈকোণমিতিক অনুপাত একই থাকে ; অতএব, যে সকল কোণের sine a-এর সমান, তাহারা হইতেছে $2p\pi + \alpha$

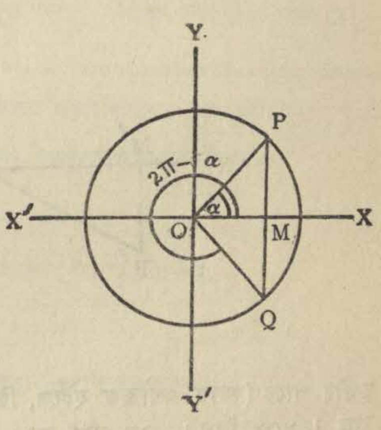
এবং $2p\pi+\pi-a$, অর্থাৎ, $(2p+1)\pi-a$, এস্থলে p শূন্য অথবা যে-কোন ধনাত্মক অথবা ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা। এই দুইটি সূত্র একত্র করিয়া n-এর শূন্য অথবা ধনাত্মক অথবা ঋণাত্মক যে-কোন পূর্ণ-সংখ্যক মানের জন্য

$$n\pi+(-1)^n a$$

সূত্র হইতে যে সকল কোণের sine a-এর সমান তাহাদিগকে পাওয়া যাইবে।

(ii) একই cosine (বা secant)-বিশিষ্ট অসংখ্য কোণ-প্রকাশক সূত্র :

a একটি নির্দিষ্ট ধনাত্মক অথবা ঋণাত্মক সংখ্যা, এবং $a<1$. a ধনাত্মক হইলে, OX হইতে এবং ঋণাত্মক হইলে, OX′ হইতে a-এর সাংখ্যমানের সমান করিয়া OM অংশ কাটিয়া লও এবং M বিন্দু দিয়া PMQ ⊥ XOX′ আঁক ; PMQ সরল রেখা বৃত্তটিকে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করিল।



এখন, $\cos\angle POM=\dfrac{OM}{OP}$

$$=\frac{a}{1}=a.$$

$\therefore$ যে-সকল কোণের cosine a-এর সমান ∠POM তাহাদের একটি। ∠POM-কে a দ্বারা সূচিত কর। আবার, **প্রবৃদ্ধ কোণ QOM**-এর

$$\text{cosine}=\frac{OM}{OQ}=\frac{a}{1}=a.$$

$\therefore$ যে-সকল কোণের cosine a-এর সমান, প্রবৃদ্ধ কোণ QOMও তাহাদের একটি।

এখন POM ও QOM ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম বলিয়া, $\angle QOM=\angle POM=a$.

$\therefore$ প্রবৃদ্ধ $\angle QOM=2\pi-a$.

তাহা হইলে, যে সকল কোণের cosine a তাহাদের দুইটি হইল a এবং $2\pi-a$. 0 এবং 2π-এর মধ্যে মাত্র এই দুইটি কোণেরই cosine a-এর সমান। ইহাদের সহিত 2π বা 2π-এর কোণ গুণিতক যোগ বা উহা হইতে বিয়োগ করিয়া যে-সকল কোণের cosine a-এর সমান, তাহারা হইতেছে

$2p\pi+a$ এবং $2p\pi+2\pi-a$, অর্থাৎ, $2(p+1)\pi-a$, এস্থলে p শূন্য অথবা যে-কোন ধনাত্মক অথবা ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা। এই দুইটি সূত্র একত্র করিয়া

n-এর শূন্য অথবা ধনাত্মক অথবা ঋণাত্মক যে-কোন পূর্ণ-সংখ্যক মানের জন্ত

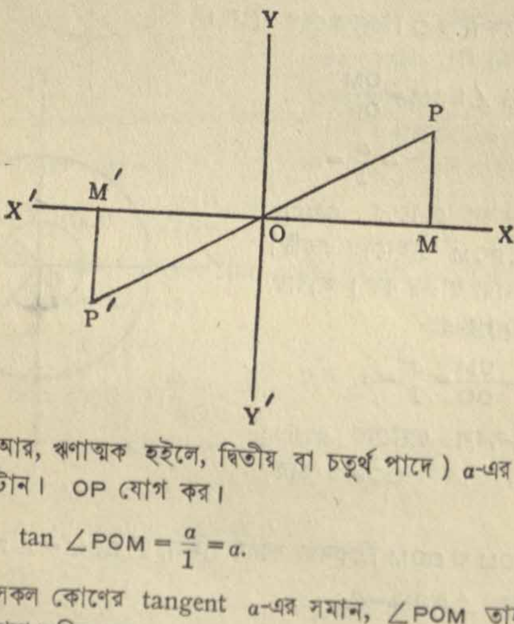
$$2n\pi \pm \alpha$$

সূত্র হইতে যে-সকল কোণের cosine a-এর সমান তাহাদিগকে পাওয়া যায়।

(iii) একই tangent (বা cotangent)-বিশিষ্ট অসংখ্য কোণ-প্রকাশক সূত্র ঃ

a একটি নির্দিষ্ট ধনাত্মক অথবা ঋণাত্মক সংখ্যা। যে অসীম-সংখ্যক কোণের প্রত্যেকটির tangent a-এর সমান, তাহাদিগকে অঙ্কন করিতে হইবে এবং সেই সকল কোণ-নির্ণায়ক সূত্র গঠন করিতে হইবে।

$\overleftrightarrow{XOX'}$, $\overleftrightarrow{YOY'}$ দুইটি পরস্পর লম্ব সরল রেখা O বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। $\overrightarrow{OX}$ হইতে এককের সমান করিয়া $\overline{OM}$ কাটিয়া লও, এবং a ধনাত্মক হইলে, প্রথম বা



তৃতীয় পাদে (আর, ঋণাত্মক হইলে, দ্বিতীয় বা চতুর্থ পাদে) a-এর সমান করিয়া $\overline{MP} \perp XOX'$ টান। OP যোগ কর।

এখন, $\tan \angle POM = \frac{a}{1} = a.$

$\therefore$ যে-সকল কোণের tangent a-এর সমান, $\angle POM$ তাহাদের একটি। $\angle POM$ কে α দ্বারা সূচিত কর।

আবার, PO-কে P′ পর্যন্ত এরূপভাবে বর্ধিত কর, যেন $PO = OP'$ হয়, এবং P′ হইতে XOX′ এর উপর $\overline{P'M'}$ লম্ব টান। POM এবং P′OM′ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম বলিয়া,

$$M'P' = PM = -MP = -a,$$

এবং $OM' = MO = -OM = -1$;

$\therefore$ প্রবৃদ্ধ $\angle$P′OM-এর tangent $= \dfrac{M'P'}{OM'} = \dfrac{-a}{-1} = a$;

$\therefore$ যে-সকল কোণের tangent a-এর সমান, প্রবৃদ্ধ কোণ P′OM′ও তাহাদের একটি।

এখন, POM ও P′OM′ ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম বলিয়া,

$$\angle P'OM' = \angle POM = a.$$

প্রবৃদ্ধ কোণ P′OM $= \pi + a$.

তাহা হইলে, যে-সকল কোণের tangent a তাহাদের দুইটি হইল a এবং $\pi + a$. 0 এবং 2π-এর মধ্যে মাত্র এই দুইটি কোণেরই tangent a-এর সমান। ইহাদের সহিত 2π বা 2π-এর কোন গুণিতক যোগ বা উহা হইতে বিয়োগ করিয়া যে-সকল কোণের tangent a-এর সমান, তাহারা হইতেছে $2p\pi + a$, এবং $2p\pi + \pi + a$, অর্থাৎ, $(2p+1)\pi + a$, এস্থলে p শূন্য অথবা যে-কোন ধনাত্মক অথবা ঋণাত্মক পূর্ণ-সংখ্যা। এই দুইটি সূত্র একত্র করিয়া n-এর শূন্য অথবা ধনাত্মক অথবা ঋণাত্মক যে-কোন পূর্ণ-সংখ্যক মানের জন্য

$$n\pi + a$$

সূত্র হইতে যে-সকল কোণের tangent a-এর সমান তাহাদিগকে পাওয়া যায়।

7·7. বিশেষ ত্রৈকোণমিতিক অনুপাতের ক্ষেত্র।

(i) $\sin\theta = 1 = \sin\dfrac{\pi}{2}$;

0 এবং 2π-এর মধ্যে $\dfrac{\pi}{2}$ হইতেছে একমাত্র কোণ যাহার $\sin = 1$.

$\therefore\ \theta = 2n\pi + \dfrac{\pi}{2} = (4n+1)\dfrac{\pi}{2}\cdot$

এস্থলে, $n = 0$, অথবা, যে-কোন ধনাত্মক অথবা ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা।

(ii) $\sin\theta = -1 = \sin\dfrac{3\pi}{2}$,

$\therefore\ \theta = 2n\pi + \dfrac{3\pi}{2} = (4n+3)\dfrac{\pi}{2}\cdot$

এস্থলে, $n = 0$, অথবা যে-কোন ধনাত্মক অথবা ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা।

(iii) $\cos\theta = 1 = \cos 0°$;

$\therefore\ \theta = 2n\pi.$

এস্থলে, $n = 0$ অথবা যে-কোন ধনাত্মক অথবা ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা।

(iv) $\cos\theta = -1 = \cos\pi$;

$\therefore\ \theta = 2n\pi + \pi = (2n+1)\pi.$

এস্থলে, $n = 0$ অথবা যে-কোন ধনাত্মক অথবা ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা।

দ্রষ্টব্য: পূর্বপ্রাপ্ত ত্রৈকোণমিতিক অনুপাতসমূহের সূত্র প্রয়োগ করিয়াও উপরের সিদ্ধান্তগুলিতে উপনীত হওয়া যায়; কিন্তু এক্ষেত্রে ফলগুলি অধিকতর সংক্ষিপ্ত।

7·8. উদাহরণমালা।

উদা. 1. θ-এর সাধারণ মান নির্ণয় কর, যখন

(i) $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$; (ii) $\cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; (iii) $\tan\theta = \sqrt{3}$.

(i) যে-সকল কোণের sine $= \frac{1}{\sqrt{2}}$, তাহাদের মধ্যে ধনাত্মক ক্ষুদ্রতমটি $\frac{\pi}{4}$;

$$\therefore \quad \theta = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{4}.$$

এস্থলে, n শূন্য অথবা যে-কোন ধনাত্মক অথবা ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা।

(ii) যে সকল কোণের cosine $= -\frac{\sqrt{3}}{2}$, তাহাদের মধ্যে ধনাত্মক ক্ষুদ্রতমটি $\frac{5\pi}{6}$;

$$\therefore \quad \theta = 2n\pi \pm \frac{5\pi}{6}.$$

এস্থলে, n শূন্য অথবা যে-কোন ধনাত্মক অথবা ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা।

(iii) যে-সকল কোণের tangent $= \sqrt{3}$, তাহাদের মধ্যে ধনাত্মক ক্ষুদ্রতমটি $\frac{\pi}{3}$;

$$\therefore \quad \theta = n\pi + \frac{\pi}{3}.$$

এস্থলে, n শূন্য অথবা যে-কোন ধনাত্মক অথবা ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা।

উদা. 2. θ-এর যে সাধারণ মান $\sec\theta = -2$ এবং $\cot\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$-কে সিদ্ধ করে, তাহা নির্ণয় কর।

$\sec\theta$ ঋণাত্মক বলিয়া, θ অবশ্যই দ্বিতীয় অথবা তৃতীয় পাদের একটি কোণ।

এখন, $\sec\frac{\pi}{3} = 2$;

$\therefore$ θ অবশ্যই $\pi - \frac{\pi}{3}$, অথবা, $\pi + \frac{\pi}{3}$, অর্থাৎ, $\frac{2\pi}{3}$, অথবা, $\frac{4\pi}{3}$ হইবে। … (1)

আবার cot θ ধনাত্মক বলিয়া, θ অবশ্যই প্রথম পাদ অথবা তৃতীয় পাদের একটি কোণ। এখন, $\cot \frac{\pi}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

$\therefore$ θ অবশ্যই $\frac{\pi}{3}$, অথবা, $\pi + \frac{\pi}{3}$, অর্থাৎ, $\frac{\pi}{3}$, অথবা, $\frac{4\pi}{3}$ হইবে। ... (2

$\therefore$ (1) এবং (2) হইতে, θ-এর সাধারণ মান গ্রহণ করিয়া,

$$\theta = \frac{4\pi}{3}.$$

$\therefore$ θ-এর সাধারণ মান $= 2n\pi + \frac{4\pi}{3} = 2(3n+2)\frac{\pi}{3}$.

এস্থলে, n শূন্য অথবা যে-কোন ধনাত্মক অথবা ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা।

উদা. 3. নিম্নলিখিত সমীকরণগুলি $\theta = n\pi \pm \alpha$ রূপে সমাধান করিয়া প্রমাণ কর যে, তাহারা অভিন্ন :

$\sin^2\theta = \sin^2\alpha$, $\cos^2\theta = \cos^2\alpha$, $\tan^2\theta = \tan^2\alpha$ এবং ইহা হইতে সমাধান কর : $3\sin^2\theta + 5\cos^2\theta = 4$.

$\sin^2\theta = \sin^2\alpha$, $\quad \therefore 1 - \sin^2\theta = 1 - \sin^2\alpha$.

অর্থাৎ, $\cos^2\theta = \cos^2\alpha$, $\quad \therefore \sec^2\theta = \sec^2\alpha$.

$\therefore 1 + \tan^2\theta = 1 + \tan^2\alpha$, $\quad \therefore \tan^2\theta = \tan^2\alpha$.

এখন, $\cos^2\theta = \cos^2\alpha$, $\quad \therefore 2\cos^2\theta = 2\cos^2\alpha$.

$\therefore 1 + \cos 2\theta = 1 + \cos 2\alpha$, $\quad \therefore \cos 2\theta = \cos 2\alpha$,

$\therefore 2\theta = 2n\pi \pm 2\alpha$; $\quad \therefore \boldsymbol{\theta = n\pi \pm \alpha}$.

$3\sin^2\theta + 5\cos^2\theta = 4$,

বা, $3(1 - \cos^2\theta) + 5\cos^2\theta = 4$, বা, $2\cos^2\theta = 1$, বা, $\cos^2\theta = \frac{1}{2}$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \cos^2 \frac{\pi}{4};$$

$$\therefore \boldsymbol{\theta = n\pi \pm \frac{\pi}{4}}.$$

উদা. 4. সমাধান কর : $\cot x - \tan x = 2$. [C. U. 1934, '37

$\cot x - \tan x = 2$, বা, $\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\sin x}{\cos x} = 2$,

বা, $\cos^2 x - \sin^2 x = 2\sin x \cos x$, বা, $\cos 2x = \sin 2x$,

বা, $\frac{\sin 2x}{\cos 2x} = 1$, বা, $\tan 2x = 1 = \tan \frac{\pi}{4}$;

$\therefore 2x = n\pi + \frac{\pi}{4}$, বা, $x = \frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{8} = (4n+1)\frac{\pi}{8}$.

উদা. 5. সমাধান কর : $2\sin^2 x + \sin^2 2x = 2.$ [C. U. 1940]

$2\sin^2 x + \sin^2 2x = 2,$

বা, $2\sin^2 x + (2\sin x\cos x)^2 = 2,$

বা, $2\sin^2 x + 4\sin^2 x\cos^2 x = 2,$

বা, $\sin^2 x + 2\sin^2 x\cos^2 x = 1,$

বা, $2\sin^2 x\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = \cos^2 x,$

বা, $\cos^2 x - 2\sin^2 x\cos^2 x = 0,$ বা, $\cos^2 x(1 - 2\sin^2 x) = 0,$

বা, $\cos^2 x.\cos 2x = 0$;

$\therefore \cos x = 0,$ অর্থাৎ, $x = (2n+1)\frac{\pi}{2},$

অথবা, $\cos 2x = 0,$ অর্থাৎ $2x = (2n+1)\frac{\pi}{2}$; $\therefore x = (2n+1)\frac{\pi}{4}.$

উদা. 6. সমাধান কর : $\sin x + \cos x = \sqrt{2}.$

[C. U. 1935 ; B. H. U. 1946]

উভয় পক্ষ $\sqrt{1^2+1^2}$, অর্থাৎ, $\sqrt{2}$ দ্বারা ভাগ করিয়া,

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x = 1,$$

বা, $\sin\frac{\pi}{4}\sin x + \cos\frac{\pi}{4}\cos x = 1,$

বা, $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$; $\therefore x - \frac{\pi}{4} = 2n\pi$;

$\therefore x = 2n\pi + \frac{\pi}{4} = (8n+1)\frac{\pi}{4}.$

দ্রষ্টব্য 1. একই প্রশ্ন অনেক সময়ে বিভিন্ন পদ্ধতিতে সমাধান করিয়া বিভিন্ন আকারের ফল পাওয়া যায় ; কিন্তু প্রকৃতপক্ষে আকার বিভিন্ন হইলেও এই সকল ফল একই কোণ-শ্রেণী সূচিত করে।

দ্রষ্টব্য 2. অবান্তর বীজ : কোন ত্রৈকোণমিতিক সমীকরণের সমাধান বিভিন্ন পদ্ধতিতে নিষ্পন্ন করা সম্ভব হইলেও এরূপ ত্রুটিপূর্ণ পদ্ধতিও আছে, যাহাতে সমীকরণের আসল বীজের সহিত এরূপ কতকগুলি ফল আসিয়া পড়ে যাহারা ঐ সমীকরণের বীজ নহে, অর্থাৎ যাহাদের দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হয় না ; এই জাতীয় ফলকে **অবান্তর বীজ** (extraneous solution) বলে। যেমন, বর্তমান উদাহরণে, উভয় পক্ষ বর্গ করিলে,

$\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x\cos x = 2,$

বা, $1 + \sin 2x = 2,$ বা, $\sin 2x = 1$;

$\therefore \quad 2x = (4n+1)\frac{\pi}{2}$, বা, $x = (4n+1)\frac{\pi}{4}$.

এস্থলে, n শূন্য বা যে-কোন ধনাত্মক অথবা ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা।

$n=0$ হইলে, $x = \frac{\pi}{4}$; ইহা দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হয়।

n যে-কোন ধনাত্মক অথবা ঋণাত্মক যুগ্ম পূর্ণসংখ্যা, মনে কর, $2m$ হইলে,

$$x = (8m+1)\ \frac{\pi}{4};$$

m-এর 0 বা ধনাত্মক অথবা ঋণাত্মক সকল পূর্ণ-সংখ্যক মানের জন্যই ইহাদের দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হয়।

n যে-কোন ধনাত্মক অথবা ঋণাত্মক অযুগ্ম পূর্ণসংখ্যা, মনে কর, $2m+1$ হইলে,

$$x = (8m+5)\ \frac{\pi}{4}.$$

এস্থলে, m শূন্য বা ধনাত্মক অথবা ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা। কিন্তু ইহাদের দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হয় না। ইহারা সমীকরণটির অবান্তর বীজ। এই সকল অবান্তর বীজ সম্বন্ধে সর্বদাই সাবধান হইতে হয়, এবং সমাধানান্তে পরীক্ষা করিয়া দেখিতে হয় প্রাপ্ত বীজসমূহ দ্বারা মূল সমীকরণটি সিদ্ধ হয় কিনা; যেটি দ্বারা সিদ্ধ হয় না, তাহাকে অবান্তর বলিয়া পরিত্যাগ করিতে হয়।

এখন, এই অবান্তর বীজগুলি আসিল কিরূপে? আসিবার হেতু, মূল সমীকরণটি সমাধান না করিয়া সমাধান করা হইয়াছে

$$\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x\cos x = 2$$

সমীকরণটিকে। এই সমীকরণ যেরূপ মূল সমীকরণের উভয় পক্ষ বর্গ করিয়া পাওয়া গিয়াছে, সেইরূপ

$$\sin x + \cos x = -\sqrt{2} \qquad \cdots \qquad \cdots \quad (1)$$

সমীকরণের উভয় পক্ষ বর্গ করিয়াও উহাকে পাওয়া যায়। মূল সমীকরণের অবান্তর বীজগুলি সমীকরণ (1)-এর বীজ।

উদা. 7. সমাধান কর : $2\cos^2\theta - \sin\theta\cos\theta = 1$.

এস্থলে, $\quad 2\cos^2\theta - 1 = \sin\theta\cos\theta$,

বা, $\quad \cos 2\theta = \sin\theta\cos\theta$,

বা, $\quad 2\cos 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = \sin 2\theta$;

$\therefore \quad \frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta} = 2$, বা, $\tan 2\theta = 2 = \tan\alpha$, মনে কর;

$\therefore\ \ 2\theta = n\pi + \alpha$, বা, $\theta = n\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\alpha}{2}$.

এস্থলে, $n=0$ বা যে-কোন ধনাত্মক অথবা ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা,

এবং $\tan \alpha = 2$.

উদা. 8. সমাধান কর : $\cos 4x + \cos 3x + \cos 2x = 0$.

$\cos 4x + \cos 3x + \cos 2x = 0$,

বা, $(\cos 4x + \cos 2x) + \cos 3x = 0$,

বা, $2 \cos 3x \cos x + \cos 3x = 0$,

বা, $\cos 3x (2 \cos x + 1) = 0$,

$\therefore\ \ \cos 3x = 0$, অর্থাৎ, $3x = (2n+1)\dfrac{\pi}{2}$; $\therefore\ \ x = (2n+1)\dfrac{\pi}{6}$;

অথবা, $2 \cos x = -1$, অর্থাৎ, $\cos x = -\frac{1}{2} = \cos \dfrac{2\pi}{3}$;

$\therefore\ \ x = 2n\pi \pm \dfrac{2\pi}{3}$.

উদা. 9. সমাধান কর : $a \cos \theta + b \sin \theta = c$, (যখন $c \leqslant \sqrt{a^2+b^2}$).

উভয় পক্ষকে $\sqrt{a^2+b^2}$ দ্বারা ভাগ করিয়া,

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \cos \theta + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \sin \theta = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}. \quad \cdots \quad (1)$$

স্পষ্টই, $a \leqslant \sqrt{a^2+b^2}$ এবং $b \leqslant \sqrt{a^2+b^2}$;

অতএব, মনে করা যাইতে পারে $\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos \alpha$

এবং $\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin \alpha$.

$\therefore\ \ (1)$ হইতে, $\cos \theta \cos \alpha + \sin \theta \sin \alpha = \dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos \beta$,

মনে কর। $c \leqslant \sqrt{a^2+b^2}$ হইলেই এইরূপ মনে করা যায়।

$\therefore\ \ \cos(\theta - \alpha) = \cos \beta$; $\therefore\ \ \theta - \alpha = 2n\pi \pm \beta$, বা, $\theta = 2n\pi \pm \beta + \alpha$.

এস্থলে, $n=0$ বা যে-কোন পূর্ণসংখ্যা, ধনাত্মক বা ঋণাত্মক।

উদা. 10. সমাধান কর :

$4 \cos x + 3 \sin x = 3$ (দেওয়া আছে $\tan 36° 50' = \frac{3}{4}$).

সমীকরণটির উভয় পক্ষকে $\sqrt{4^2+3^2}$, অর্থাৎ, 5 দ্বারা ভাগ করিয়া,

$$\tfrac{4}{5} \cos x + \tfrac{3}{5} \sin x = \tfrac{3}{5}. \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$$

$\tan 36° 50' = \frac{3}{4}$; $\therefore\ \sin 36° 50' = \frac{3}{5}$, এবং $\cos 36° 50' = \frac{4}{5}$

$\therefore$ (1) হইতে, $\cos x \cos 36° 50' + \sin x \sin 36° 50' = \sin 36° 50'$,

বা, $\cos(x - 36° 50') = \sin 36° 50' = \cos(90° - 36° 50')$
$= \cos 53° 10'$;

$\therefore$ $x - 36° 50' = 2n\pi \pm 53° 10'$; $\therefore$ $x = 2n\pi \pm 53° 10' + 36° 50'$,

অর্থাৎ, $x = 2n\pi + 90°$, বা, $x = 2n\pi - 16° 20'$.

উদা. 11. সমাধান কর : $\tan 4\theta = \cot 5\theta$.

$$\tan 4\theta = \cot 5\theta = \tan\left(\frac{\pi}{2} - 5\theta\right);$$

$$\therefore \quad 4\theta = n\pi + \frac{\pi}{2} - 5\theta ;$$

$$\therefore \quad 9\theta = (2n+1)\frac{\pi}{2}, \text{ বা, } \theta = \frac{2n+1}{9}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

উদা. 12. সমাধান কর :

(i) $\cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta = 1$, (যখন $-2\pi < \theta < 2\pi$).

(ii) $6\cos^2\theta - 13\cos\theta + 5 = 0$, (যখন $-\pi < \theta < \pi$).

(i) উভয় পক্ষকে $\sqrt{1+3}$, অর্থাৎ, 2 দ্বারা ভাগ করিয়া,

$$\cos\theta\cdot\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta = \frac{1}{2},$$

বা, $$\cos\theta.\cos\frac{\pi}{3} + \sin\theta\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2},$$

বা, $$\cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3};$$

$$\therefore \quad \theta - \frac{\pi}{3} = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3},$$

বা, $$\theta = 2n\pi + \frac{2\pi}{3}, \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$$

অথবা, $$\theta = 2n\pi. \quad \cdots \quad \cdots \quad (2)$$

(1) হইতে, $n = -1, 0$ হইলে, θ-এর মান -2π হইতে 2π-এর মধ্যে থাকিবে ;

$$\therefore \quad \theta = -\frac{4\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}.$$

(2) হইতে, কেবলমাত্র $n = 0$ হইলে, θ-এর মান -2π হইতে 2π-এর মধ্যে থাকিবে ;

$\therefore$ $\theta = 0$.

$\therefore$ -2π হইতে 2π-এর মধ্যে অবস্থিত θ-এর $-\frac{4\pi}{3}$, 0 এবং $\frac{2\pi}{3}$ মান তিনটি দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হয়।

(ii) $6\cos^2\theta - 13\cos\theta + 5 = 0$;

বা, $(2\cos\theta - 1)(3\cos\theta - 5) = 0$.

কিন্তু $\cos\theta \neq \frac{5}{3}$, $(\because \frac{5}{3} > 1)$

$\therefore$ $\cos\theta = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$; $\because$ $\pi = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$,

অর্থাৎ, $\theta = 2n\pi + \frac{\pi}{3}$ ... ... (1)

অথবা, $\theta = 2n\pi - \frac{\pi}{3}$ ... ... (2)

(1) হইতে, কেবলমাত্র $n=0$ হইলে, θ-এর মান $-\pi$ হইতে π-এর মধ্যে থাকে; $\therefore$ $\theta = \frac{\pi}{3}$.

(2) হইতে, কেবলমাত্র $n=0$ হইলে, θ-এর মান $-\pi$ হইতে π-এর মধ্যে থাকে; $\therefore$ $\theta = -\frac{\pi}{3}$;

$\therefore$ $-\pi$ হইতে π-এর মধ্যে অবস্থিত θ-এর $-\frac{\pi}{3}$ এবং $\frac{\pi}{3}$ মান-দুইটি দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হয়।

উদা. 13. সমাধান কর : $\tan x + \tan 2x + \tan 3x = 0$.

[A. I. 1941 ; B. H. U. 1946]

$\tan x + \tan 2x + \tan 3x = 0$,

বা, $\tan 3x = -(\tan x + \tan 2x)$,

বা, $\tan(x + 2x) = -(\tan x + \tan 2x)$,

বা, $\frac{\tan x + \tan 2x}{1 - \tan x \tan 2x} + \tan x + \tan 2x = 0$,

বা, $(\tan x + \tan 2x)\left(\frac{1}{1 - \tan x \tan 2x} + 1\right) = 0$;

$\therefore$ $\tan x + \tan 2x = 0$ ... ... (1)

অথবা, $\frac{1}{1 - \tan x \tan 2x} + 1 = 0$ ... ... (2)

(1) হইতে, $\tan x = -\tan 2x = \tan(-2x)$;

$\therefore \quad x = n\pi - 2x$, বা, $3x = n\pi$, বা, $x = \frac{n\pi}{3}$;

(2) হইতে, $1 + 1 - \tan x \tan 2x = 0$, বা, $\tan x \tan 2x = 2$,

বা, $\tan x . \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} = 2$,

বা, $\tan^2 x = 1 - \tan^2 x$, বা, $2 \tan^2 x = 1$,

বা, $\tan^2 x = \frac{1}{2}$, বা, $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \tan^2 a$

$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} = \tan a\right.$, মনে করিয়া $\left.\right)$

$\therefore \quad x = n\pi \pm a$.

প্রশ্নমালা 8

1. নিম্নলিখিত সমীকরণসমূহ θ-এর যে সাধারণ মান দ্বারা সিদ্ধ হয়, তাহা নির্ণয় কর :

(i) $\sin \theta = \frac{1}{2}$; (ii) $\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$; (iii) $\tan \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$;

(iv) $\sin \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; (v) $\cos \theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$; (vi) $\tan \theta = -\sqrt{3}$;

(vii) $\operatorname{cosec} \theta = \sqrt{2}$; (viii) $\sec \theta = -\frac{2}{\sqrt{3}}$; (ix) $\cot \theta = -1$.

2. নিম্নলিখিত সমীকরণসমূহ θ-এর যে সাধারণ মান দ্বারা সিদ্ধ হয়, তাহা নির্ণয় কর :

(i) $\cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$;

(ii) $\sin \theta = -\frac{1}{2}$, $\cot \theta = -\sqrt{3}$.

3. যেসকল কোণের sin-এর মান, cos A-এর মানের সমান, সেই কোণ-প্রকাশক সূত্রটি নির্ণয় কর।

নিম্নলিখিত সমীকরণসমূহের সমাধান কর :

4. $2 \sin^2 \theta - 2 \cos^2 \theta + 1 = 0$.

5. (i) $\sec^2 \theta + \tan^2 \theta = 3$. (ii) $2 \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$.

6. $\tan^2 \theta = 3 \operatorname{cosec}^2 \theta - 1$. [C. U. 1939]

7. $2 \cos^2 \theta + \sqrt{2} \sin \theta = 2$.

8. $\operatorname{cosec}^2 \theta + \cot^2 \theta = 3 \cot \theta$. [C. U. 1913]

9. $\tan^2\theta + \cot^2\theta = 2.$ [Patna, 1942]

10. (i) $\tan x + \cot x = 4.$ [C. U. 1913]

(ii) $\tan 5\theta = \cot 2\theta.$ [A. U. 1943]

11. $\cot 2x + \tan x = 2.$ 12. $\cos\theta + \cos 5\theta = 0.$

13. $\sin 4x - \sin 2x = \cos 3x.$

14. $\cos 3\theta - \cos 5\theta = \sin\theta.$ [A. U. 1939]

15. (i) $\sin 2\theta = \cos\theta.$ [C. U. 1953]

(ii) $\sin 4\theta = \sin\theta.$ [B. H. U. 1949]

16. $\sin m\theta + \sin n\theta = 0.$

17. $\cos 3x + \cos 2x + \cos x = 0.$ [C. U. 1946]

18. $\sin 7\theta - \sin 3\theta - \sin\theta = 0.$ [P. U. 1939]

19. (i) $\cos\theta + \cos 2\theta + \cos 3\theta + \cos 4\theta = 0.$

(ii) $\cos x + \cos 3x + \cos 5x + \cos 7x = 0.$ [C. U. 1959]

20. $\cos x + \sin x = \cos 2x + \sin 2x.$ [C. U. 1943]

21. $\cos x - \sin x = \cos\alpha + \sin\alpha.$ [B. H. U. 1938]

22. $\sin^2 2\theta = \sin^2\theta.$

23. $\sin^2 n\theta - \sin^2 (n-1)\theta = \sin^2\theta.$

24. $\sin 5x \cos 3x = \sin 9x \cos 7x.$ [B. H. U. 1946]

25. $2\sin 2x \tan x - 1 = \tan x - 2\sin 2x.$

26. $\sin x + \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}.$ [B. H. U. 1948]

27. $\cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta = 2.$ [C. U. 1936]

28. $\sin x + \sqrt{3}\cos x = \sqrt{2}.$ [C. U. 1938, '47]

29. $\cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta = \sqrt{2}.$ [C. U. 1944]

30. $\sin\theta + 2\cos\theta = 1.$ [C. U. 1934]

31. $2\cos\theta + 3\sin\theta = 2$, (দেওয়া আছে যে, $\tan 56^\circ 20' = 1\frac{1}{2}$).

32. $\tan x + \tan 2x + \tan x \tan 2x = 1.$ [C. U. 1941, '45, '48]

33. $\tan x + \tan 2x + \tan 3x = \tan x \tan 2x \tan 3x.$ [C. U. 1956]

34. $\tan\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) + \tan\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) = 4.$ [C. U. 1949]

35. $\tan 2x + \tan 4x = 2\tan 3x.$

36. $\tan\theta + \tan 2\theta = \tan 3\theta$. [C. U., B. Sc., 1926]

37. $\cos\theta - \sin 3\theta = \cos 2\theta$. [U. P. B. 1947]

38. $\tan\theta + \tan 2\theta + \sqrt{3}\tan\theta\tan 2\theta = \sqrt{3}$. [B. H. U. 1954]

39. $\sin\frac{n+1}{2}\theta = \sin\frac{n-1}{2}\theta + \sin\theta$. [U. P. B. 1953]

40. $\cos 3\theta + 3\cos\theta = \frac{1}{2}$.

41. $4\sin 4\theta + 1 = \sqrt{5}$. [C. U., B. Sc., 1935]

42. যদি $\sin A = \sin B$, $\cos A = \cos B$, প্রমাণ কর যে, হয় $A = B$ অথবা A ও B-এর অন্তর চার-সমকোণের কোন গুণিতক হইবে। [C. U. 1935]

43. সমাধান কর : $\frac{\sin\alpha}{\sin 2x} + \frac{\cos\alpha}{\cos 2x} = 2$. [C. U. 1958]

সমাধান কর :

44. (i) $\cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta = 2$, $0 < \theta < 2\pi$ হইলে। [C. U. 1936]

(ii) $\cos\theta - \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$, θ $-\pi$ হইতে $+\pi$-এর মধ্যে অবস্থিত হইলে। [C. U. 1952]

(iii) $\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta = \sqrt{2}$, $0 < \theta < 2\pi$ হইলে। [C. U. 1938]

45. $\sin 3A + \sin 2A + \sin A = 0$, $0 < A < 2\pi$ হইলে। [Patna, 1944]

46. $\cot\theta - \tan\theta = 2$, $0 < \theta < 2\pi$ হইলে। [C. U. 1937]

47. $\sin 4\theta = \cos 3\theta + \sin 2\theta$, $0 < \theta < \pi$ হইলে। [C. U. 1951]

48. $4\sin\theta\cos\theta = 1 - 2\sin\theta + 2\cos\theta$, $0 < \theta < \pi$ হইলে। [C. U. 1950]

49. $\sin(\theta + \phi) = \frac{1}{2}$ এবং $\cos(\theta - \phi) = \frac{1}{2}$.

50. সমাধান কর (সাধারণ মানের প্রয়োজন নাই) :

$$\left.\begin{array}{l}\tan x + \tan y = 2,\\ 2\cos x\cos y = 1\end{array}\right\}$$ [C. U. 1955]

অষ্টম অধ্যায়

বিপরীত-বৃত্তীয় অপেক্ষক

(Inverse Circular Functions)

8·1. অপেক্ষক ও বিপরীত অপেক্ষক।

যদি দুইটি বাস্তব চলরাশি x এবং y এরূপ সম্বন্ধযুক্ত হয় যে, কোন নির্দিষ্ট সীমার মধ্যে অবস্থিত x-এর প্রত্যেকটি (বাস্তব) মানের জন্য y-এর অনুরূপ একটিমাত্র নির্দিষ্ট বাস্তব মান থাকে, তাহা হইলে y-কে উক্ত নির্দিষ্ট সীমার মধ্যে অবস্থিত x-এর **অপেক্ষক** (function) বলে, এবং x-কে বলা হয় মুক্ত বা নিরপেক্ষ (independent) চলরাশি এবং y-কে বলা হয় **বদ্ধ** বা **অপেক্ষক** (dependent) চলরাশি। যেমন, x-এর সকল বাস্তব মানের জন্য

$$y = 2x + 5 \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$$

x-এর একটি অপেক্ষক।

(1) হইতে প্রাপ্ত $x = \frac{1}{2}(y - 5) \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (2)$

y-এর সকল বাস্তব মানের জন্য, y-এর একটি অপেক্ষক।

দেখা যাইতেছে, একটির মুক্ত এবং বদ্ধ চলরাশি যথাক্রমে অপরটির বদ্ধ এবং মুক্ত চলরাশি এবং গাণিতিক প্রক্রিয়ায় একটি হইতে অপরটি পাওয়া যায়, সুতরাং, উহারা সমার্থ-জ্ঞাপক। এইরূপ সম্বন্ধযুক্ত দুইটি অপেক্ষকের একটিকে অপরটির **বিপরীত** (inverse) বলা হয়। $f(x)$, $\phi(x)$, $\psi(x)$ প্রভৃতি দ্বারা x-এর অপেক্ষককে সূচিত করা হয়, এবং $y = f(x)$ হইলে, $f(x)$-এর বিপরীত অপেক্ষকটিকে $f^{-1}(y)$ দ্বারা সূচিত করা হয়।

8·2. বৃত্তীয় এবং বিপরীত-বৃত্তীয় অপেক্ষক ও তাহার অর্থ।

x-এর কোণ-জ্ঞাপক সকল মানের জন্য,

$$y = \sin x \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (3)$$

x-এর একটি অপেক্ষক।

ইহাকে এবং $\cos x$, $\tan x$ প্রভৃতি ত্রৈকোণমিতিক অনুপাত-প্রকাশক অপেক্ষক-সমূহকে **ত্রৈকোণমিতিক** (trigonometrical), বা **বৃত্তীয়** (circular) অপেক্ষক বলে।

এই অপেক্ষকসমূহের বিপরীত অপেক্ষকসমূহকে **বিপরীত-বৃত্তীয় অপেক্ষক** (inverse circular functions) বলে।

$y=f(x)$ দ্বারা সূচিত হইলে, $f(x)$-এর বিপরীত অপেক্ষককে $x=f^{-1}(y)$ দ্বারা সূচিত করা হয়।

এইরূপ, $y=\sin x$ হইলে, $\sin x$-এর বিপরীত অপেক্ষককে $x=\sin^{-1}y$ দ্বারা সূচিত করা হয় এবং ইহাকে 'সাইন ইন্‌ভার্স y' (sine inverse y)-রূপে পড়া হয়। $\sin^{-1}y$-কে 'arc sin y'-রূপেও লেখা হয়।

অতএব, $\sin^{-1}y$, $\cos^{-1}y$, ইত্যাদি বিপরীত-বৃত্তীয় অপেক্ষক।

তাহা হইলে, $y=\sin x$ হইলে, $x=\sin^{-1}y$,
$y=\cos x$ হইলে, $x=\cos^{-1}y$,
$y=\tan x$ হইলে, $x=\tan^{-1}y$,
$y=\sec x$ হইলে, $x=\sec^{-1}y$, ইত্যাদি।

এইরূপ, $\frac{1}{2}=\sin\frac{\pi}{6}$; $\therefore$ $\frac{\pi}{6}=\sin^{-1}\frac{1}{2}$,

$\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\frac{\pi}{6}$; $\therefore$ $\frac{\pi}{6}=\cos^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$1=\tan\frac{\pi}{4}$; $\therefore$ $\frac{\pi}{4}=\tan^{-1}1$, ইত্যাদি।

দেখা যাইতেছে, বিপরীত-বৃত্তীয় অপেক্ষকগুলি কোণ-প্রকাশক।

$\sin^{-1}\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}$, একটি কোণ যাহার sine $=\frac{1}{2}$,

$\cos^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{6}$, একটি কোণ যাহার cosine $=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\tan^{-1}1=\frac{\pi}{4}$, একটি কোণ যাহার tangent $=1$, ইত্যাদি।

এইরূপ, যে কোণের sine $=y$, তাহাকে $\sin^{-1}y$ দ্বারা, যে-কোণের cosine $=y$, তাহাকে $\cos^{-1}y$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

তাহা হইলে, $\sin^{-1}\frac{1}{2}$-এর অর্থ হইল একটি কোণ যাহার sine $=\frac{1}{2}$; কিন্তু আমরা জানি, $\frac{\pi}{6}$-ই একমাত্র কোণ নয়, যাহার sine $=\frac{1}{2}$; পরন্তু, n শূন্য বা যে-কোন ধনাত্মক বা ঋণাত্মক পূর্ণ-সংখ্যক মানের জন্য $n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}$ অসংখ্য কোণসমূহের প্রত্যেকটি কোণের sine $=\frac{1}{2}$. অতএব, $\sin^{-1}\frac{1}{2}=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}$.

এইরূপ, $\cos^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}=2n\pi\pm\frac{\pi}{6}$; $\tan^{-1}1=n\pi+\frac{\pi}{4}$; ইত্যাদি।

দেখা যাইতেছে, বিপরীত-বৃত্তীয় অপেক্ষকসমূহ বহু-মানবিশিষ্ট (multiple valued). এই অসংখ্য কোণ-প্রকাশক মানসমূহের মধ্যে যে কোণটির সাংখ্যমান ক্ষুদ্রতম, ধনাত্মক হউক, বা ঋণাত্মক হউক, তাহাকে বিপরীত-বৃত্তীয় অপেক্ষকটির **মুখ্য মান** (principal value) বলে। যেমন,

$\sin^{-1}\frac{1}{2}$-এর মুখ্য মান 30°, বা, $\frac{\pi}{6}$. একই সাংখ্যমান, কিন্তু বিপরীত চিহ্ন-বিশিষ্ট দুইটি কোণের একই ত্রৈকোণমিতিক অনুপাত থাকিলে, ধনাত্মক চিহ্নযুক্ত কোণটিকেই বিপরীত-বৃত্তীয় অপেক্ষকের মুখ্য মানরূপে ধরা হয়।

যেমন, $\cos^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}$-এর মুখ্য মান 30°, − 30° নয়, যদিও $\cos(-30°)=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

অনেক সময়ে, মুখ্য মানগুলিকে বড়-হাতের অক্ষর দ্বারা প্রকাশ করা হয়। যেমন,

$\sin^{-1}\frac{1}{2}$-এর মুখ্য মান $=\text{Sin}^{-1}\frac{1}{2}=$ কেবলমাত্র $\frac{\pi}{6}$;

$\cos^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}$-এর মুখ্য মান $=\text{Cos}^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}=$ কেবলমাত্র $\frac{\pi}{6}$;

$\tan^{-1}1$-এর মুখ্য মান $=\text{Tan}^{-1}1=$ কেবলমাত্র $\frac{\pi}{4}$; ইত্যাদি।

$$\therefore\quad \sin^{-1}\tfrac{1}{2}=n\pi+(-1)^n\,\text{Sin}^{-1}\tfrac{1}{2};$$

$\cos^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}=2n\pi\pm\text{Cos}^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}$; ইত্যাদি।

কিন্তু, বিপরীত-বৃত্তীয় অপেক্ষক-সংবলিত প্রশ্নসমূহে অথবা উহাদের সমাধানে মুখ্য মান-প্রকাশক এই সকল চিহ্ন ব্যবহার না করিয়া, $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$, $\tan^{-1}$ ইত্যাদি চিহ্ন দ্বারাই মুখ্য মান প্রকাশ করা হইয়াছে ; এই সকল চিহ্নযুক্ত প্রশ্নে, উহাদের সাধারণ মান না ধরিয়া মুখ্য মান ধরিয়াই সমাধান করিতে হইবে।

দ্রষ্টব্য ঃ $\sin^{-1}x=(\sin x)^{-1}$ নয়, কেননা $(\sin x)^{-1}=\frac{1}{\sin x}$ মনে রাখিতে হইবে।

8·3. বিবিধ প্রয়োজনীয় তথ্য।

(1) $\sin\theta=x$ হইলে, $\sin^{-1}x=\theta$;

$$\therefore\quad \sin^{-1}\sin\theta=\theta.$$

এইরূপে, $\cos^{-1}\cos\theta=\theta$, $\tan^{-1}\tan\theta=\theta$, ইত্যাদি।

(2) $\sin\theta=x$ হইলে, $\theta=\sin^{-1}x$;

$$\therefore\quad \sin\sin^{-1}x=x.$$

এইরূপে, $\cos\cos^{-1}x=x$, $\tan\tan^{-1}x=x$, ইত্যাদি।

(3) প্রমাণ কর যে,

$$\mathbf{cosec^{-1}x = sin^{-1}\frac{1}{x}\,;\; sec^{-1}x = cos^{-1}\frac{1}{x}\,;\; cot^{-1}x = tan^{-1}\frac{1}{x}}.$$

মনে কর, $\operatorname{cosec}^{-1}x=\theta$; $\therefore\ x=\operatorname{cosec}\theta$;

$$\therefore\ \frac{1}{x}=\sin\theta\ ;\quad \therefore\ \sin^{-1}\frac{1}{x}=\theta=\operatorname{cosec}^{-1}x.$$

এইরূপে, প্রমাণ করা যায়, $\sec^{-1}x=\cos^{-1}\frac{1}{x}$ এবং $\cot^{-1}x=\tan^{-1}\frac{1}{x}$.

আবার, অনুরূপ প্রক্রিয়ায় প্রমাণ করা যায় যে,

$$\mathbf{sin^{-1}x = cosec^{-1}\frac{1}{x}\,;\; cos^{-1}x = sec^{-1}\frac{1}{x}} \text{ এবং } \mathbf{tan^{-1}x = cot^{-1}\frac{1}{x}}.$$

(4) বৃত্তীয় অপেক্ষককে যেরূপ একটিকে অপরটির সাহায্যে প্রকাশ করা যায়। যথা—

$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\frac{\tan\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}=\frac{1}{\operatorname{cosec}\theta}$$

$$=\frac{\sqrt{\sec^2\theta-1}}{\sec\theta}=\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2\theta}}.$$

সেইরূপ, বিপরীত-বৃত্তীয় অপেক্ষকেরও যে-কোনটিকে অপর একটির সাহায্যে প্রকাশ করা যায়। যথা—

$$\sin\theta=x \text{ হইলে, } \cos\theta=\sqrt{1-x^2},\ \tan\theta=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$\operatorname{cosec}\theta=\frac{1}{x},\ \sec\theta=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ \cot\theta=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}.$$

$$\therefore\ \theta=\sin^{-1}x=\cos^{-1}\sqrt{1-x^2}=\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=\operatorname{cosec}^{-1}\frac{1}{x}$$

$$=\sec^{-1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\cot^{-1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}.$$

$\sin^{-1}x$, $\cos^{-1}\sqrt{1-x^2}$, প্রভৃতি বিপরীত-বৃত্তীয় অপেক্ষকসমূহের প্রত্যেকটি অসংখ্য মানবিশিষ্ট। উপরের ফল হইতে ধারণা হইতে পারে, অসংখ্য মানগুলি সব ক্ষেত্রেই এক, কিন্তু তাহা নহে। ঐ সকল বিপরীত-বৃত্তীয় অপেক্ষকগুলির মুখ্য মানগুলি কেবলমাত্র পরস্পর সমান।

(5) প্রমাণ কর যে,

(i) $\mathbf{sin^{-1}x+cos^{-1}x=\frac{\pi}{2}}$;

(ii) $\tan^{-1}x+\cot^{-1}x=\frac{\pi}{2}$;

(iii) $\operatorname{cosec}^{-1}x+\sec^{-1}x=\frac{\pi}{2}$.

(i) মনে কর, $\sin^{-1}x=\theta$; ... ... (1)

তাহা হইলে, $x=\sin\theta=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$;

$\therefore\ \cos^{-1}x=\frac{\pi}{2}-\theta$ ... ... (2)

(1) এবং (2) হইতে, $\sin^{-1}x+\cos^{-1}x=\theta+\frac{\pi}{2}-\theta=\frac{\pi}{2}$.

(ii) মনে কর, $\tan^{-1}x=\theta$; ... ... (3)

$\therefore\ x=\tan\theta=\cot\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$;

$\therefore\ \cot^{-1}x=\frac{\pi}{2}-\theta$. ... ... (4)

(3) এবং (4) হইতে, $\tan^{-1}x+\cot^{-1}x=\theta+\frac{\pi}{2}-\theta=\frac{\pi}{2}$.

(iii) মনে কর, $\operatorname{cosec}^{-1}x=\theta$; ... ... (5)

$\therefore\ x=\operatorname{cosec}\theta=\sec\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$;

$\therefore\ \sec^{-1}x=\frac{\pi}{2}-\theta$. ... ... (6)

$\therefore$ (5) এবং (6) হইতে, $\operatorname{cosec}^{-1}x+\sec^{-1}x=\theta+\frac{\pi}{2}-\theta=\frac{\pi}{2}$.

দ্রষ্টব্য 1. এস্থলে, বিপরীত-বৃত্তীয় অপেক্ষকগুলির মুখ্য মান ধরা হইয়াছে।

দ্রষ্টব্য 2. x ধনাত্মক হইলেই কেবলমাত্র উপরের ফলগুলি সত্য হয়। x ঋণাত্মক হইলে, (i) এবং (iii)-এর ফল-দুইটি সত্য হয় ; কিন্তু (ii)-এর ফলটি x ঋণাত্মক হইলে,

$\tan^{-1}x+\cot^{-1}x=-\frac{\pi}{2}$ হয়।

(6) প্রমাণ কর যে,

(i) $\tan^{-1}x+\tan^{-1}y=\tan^{-1}\frac{x+y}{1-xy}$;

(ii) $\tan^{-1}x-\tan^{-1}y=\tan^{-1}\frac{x-y}{1+xy}$.

মনে কর, $\tan^{-1}x=\alpha$, এবং $\tan^{-1}y=\beta$;

তাহা হইলে, $x=\tan\alpha$ এবং $y=\tan\beta$.

(i) এখন, $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

$$=\frac{x+y}{1-xy};$$

$$\therefore\quad \alpha+\beta=\tan^{-1}\frac{x+y}{1-xy},$$

অর্থাৎ, $\tan^{-1}x+\tan^{-1}y=\tan^{-1}\dfrac{x+y}{1-xy}$.

(ii) এইরূপে, $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{x-y}{1+xy}$;

$$\therefore\quad \alpha-\beta=\tan^{-1}\frac{x-y}{1+xy},$$

অর্থাৎ, $\tan^{-1}x-\tan^{-1}y=\tan^{-1}\dfrac{x-y}{1+xy}$.

অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায় যে,

(i) $\cot^{-1}x+\cot^{-1}y=\cot^{-1}\dfrac{xy-1}{y+x}$;

(ii) $\cot^{-1}x-\cot^{-1}y=\cot^{-1}\dfrac{xy+1}{y-x}$.

(7) প্রমাণ কর যে,

$$\tan^{-1}x+\tan^{-1}y+\tan^{-1}z=\tan^{-1}\frac{x+y+z-xyz}{1-yz-zx-xy}.$$

মনে কর, $\tan^{-1}x=\alpha$, $\tan^{-1}y=\beta$, $\tan^{-1}z=\gamma$;

তাহা হইলে, $x=\tan\alpha$, $y=\tan\beta$, $z=\tan\gamma$.

$$\therefore\quad \tan(\alpha+\beta+\gamma)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma-\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma}{1-\tan\beta\tan\gamma-\tan\gamma\tan\alpha-\tan\alpha\tan\beta}$$

$$=\frac{x+y+z-xyz}{1-yz-zx-xy};$$

$$\therefore\quad \alpha+\beta+\gamma=\tan^{-1}\frac{x+y+z-xyz}{1-yz-zx-xy},$$

অর্থাৎ, $\tan^{-1}x+\tan^{-1}y+\tan^{-1}z$

$$=\tan^{-1}\frac{x+y+z-xyz}{1-yz-zx-xy}.$$

(8) প্রমাণ কর যে,

(i) $\sin^{-1}x+\sin^{-1}y=\sin^{-1}\{x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}\}$;

(ii) $\sin^{-1}x-\sin^{-1}y=\sin^{-1}\{x\sqrt{1-y^2}-y\sqrt{1-x^2}\}$;

(iii) $\cos^{-1}x+\cos^{-1}y=\cos^{-1}\{xy-\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\}$;

(iv) $\cos^{-1}x-\cos^{-1}y=\cos^{-1}\{xy+\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\}$.

মনে কর, $\sin^{-1}x=\alpha$ এবং $\sin^{-1}y=\beta$;

তাহা হইলে, $x=\sin\alpha$ এবং $y=\sin\beta$.

$\therefore \quad \cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-x^2}$

এবং $\cos\beta=\sqrt{1-\sin^2\beta}=\sqrt{1-y^2}$.

(i) এখন, $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$$=x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}.$$

$\therefore \quad \alpha+\beta=\sin^{-1}\{x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}\}$,

অর্থাৎ, $\sin^{-1}x+\sin^{-1}y=\sin^{-1}\{x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}\}$.

(ii) আবার, $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

$$=x\sqrt{1-y^2}-y\sqrt{1-x^2}\ ;$$

$$\therefore \quad \alpha-\beta=\sin^{-1}\{x\sqrt{1-y^2}-y\sqrt{1-x^2}\},$$

অর্থাৎ, $\sin^{-1}x-\sin^{-1}y=\sin^{-1}\{x\sqrt{1-y^2}-y\sqrt{1-x^2}\}$.

(iii) মনে কর, $\cos^{-1}x=\alpha$ এবং $\cos^{-1}y=\beta$;

তাহা হইলে, $x=\cos\alpha$ এবং $y=\cos\beta$;

$\therefore \quad \sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-x^2}$

এবং $\sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\sqrt{1-y^2}$.

এখন, $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=xy-\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}$;

$\therefore \quad \alpha+\beta=\cos^{-1}\{xy-\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\}$,

অর্থাৎ, $\cos^{-1}x+\cos^{-1}y=\cos^{-1}\{xy-\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\}$.

(iv) আবার, $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

$$=xy+\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\ ;$$

$\therefore \quad \alpha-\beta=\cos^{-1}\{xy+\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\}$,

অর্থাৎ, $\cos^{-1}x-\cos^{-1}y=\cos^{-1}\{xy+\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\}$.

(9) প্রমাণ কর যে,

(i) $2\sin^{-1}x=\sin^{-1}(2x\sqrt{(1-x^2)})$;

(ii) $2\cos^{-1}x=\cos^{-1}(2x^2-1)$;

(iii) $2\tan^{-1}x=\tan^{-1}\dfrac{2x}{1-x^2}$.

(i) মনে কর, $\sin^{-1}x = \alpha$; তাহা হইলে, $x = \sin\alpha$;

$\therefore \quad \cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-x^2}$.

এখন, $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2x\sqrt{1-x^2}$;

$\therefore \quad 2\alpha = \sin^{-1}(2x\sqrt{1-x^2})$,

অর্থাৎ, $2\sin^{-1}x = \sin^{-1}(2x\sqrt{1-x^2})$.

(ii) মনে কর, $\cos^{-1}x = \alpha$; তাহা হইলে, $\cos\alpha = x$.

এখন, $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 2x^2 - 1$;

$\therefore \quad 2\alpha = \cos^{-1}(2x^2-1)$, অর্থাৎ, $2\cos^{-1}x = \cos^{-1}(2x^2-1)$.

(iii) মনে কর, $\tan^{-1}x = \alpha$; তাহা হইলে, $\tan\alpha = x$.

এখন, $\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \dfrac{2x}{1-x^2}$;

$\therefore \quad 2\alpha = \tan^{-1}\dfrac{2x}{1-x^2}$, অর্থাৎ, $2\tan^{-1}x = \tan^{-1}\dfrac{2x}{1-x^2}$.

(10) প্রমাণ কর যে,

(i) $3\sin^{-1}x = \sin^{-1}(3x-4x^3)$;

(ii) $3\cos^{-1}x = \cos^{-1}(4x^3-3x)$;

(iii) $3\tan^{-1}x = \tan^{-1}\dfrac{3x-x^3}{1-3x^2}$.

(i) মনে কর, $\sin^{-1}x = \alpha$; তাহা হইলে, $\sin\alpha = x$.

এখন, $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha = 3x - 4x^3$;

$\therefore \quad 3\alpha = \sin^{-1}(3x-4x^3)$, অর্থাৎ, $3\sin^{-1}x = \sin^{-1}(3x-4x^3)$.

(ii) মনে কর, $\cos^{-1}x = \alpha$; তাহা হইলে, $\cos\alpha = x$.

এখন, $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha = 4x^3 - 3x$;

$\therefore \quad 3\alpha = \cos^{-1}(4x^3-3x)$, অর্থাৎ, $3\cos^{-1}x = \cos^{-1}(4x^3-3x)$.

(iii) মনে কর, $\tan^{-1}x = \alpha$; তাহা হইলে, $\tan\alpha = x$.

এখন, $\tan 3\alpha = \dfrac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha} = \dfrac{3x-x^3}{1-3x^2}$;

$\therefore \quad 3\alpha = \tan^{-1}\dfrac{3x-x^3}{1-3x^2}$, অর্থাৎ, $3\tan^{-1}x = \tan^{-1}\dfrac{3x-x^3}{1-3x^2}$.

(11) দেখাও যে,

$$\mathbf{2\tan^{-1}x = \sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2} = \cos^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2} = \tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}}.$$

মনে কর, $\tan^{-1}x=\theta$; $\therefore\ \tan\theta=x.$

এখন, $\sin 2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}=\dfrac{2x}{1+x^2}$;

$\therefore\ 2\tan^{-1}x=2\theta=\sin^{-1}\dfrac{2x}{1+x^2}$. ... (i)

আবার, $\cos 2\theta=\dfrac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$;

$\therefore\ 2\tan^{-1}x=2\theta=\cos^{-1}\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$, ... (ii)

আবার, $\tan 2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\dfrac{2x}{1-x^2}$;

$\therefore\ 2\tan^{-1}x=2\theta=\tan^{-1}\dfrac{2x}{1-x^2}$. ... (iii)

(i), (ii) এবং (iii) হইতে,

$$2\tan^{-1}x=\sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}=\cos^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2}=\tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}.$$

8·4. বিবিধ উদাহরণ।

উদা. 1. $\cos^{-1}(-\frac{1}{2})$-এর মুখ্য মান ও সাধারণ মান নির্ণয় কর।

$\frac{1}{2}=\cos 60^\circ$; $\therefore\ -\frac{1}{2}=\cos(180^\circ-60^\circ)$,

বা, $\cos(180^\circ+60^\circ)$, অর্থাৎ, $\cos 120^\circ$, বা, $\cos 240^\circ$;

$\therefore$ 0° হইতে 360°-এর মধ্যে 120° এবং 240° কোণ-দুইটির cosine $-\frac{1}{2}$. ... (1)

$\therefore$ 0° হইতে − 360°-এর মধ্যে $-(360^\circ-120^\circ)$ এবং $-(360^\circ-240^\circ)$, অর্থাৎ, − 240° এবং − 120° কোণ-দুইটির cosine $-\frac{1}{2}$. ... (2)

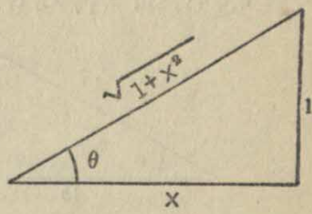
(1) এবং (2) হইতে দেখা যাইতেছে, যেসকল কোণের cosine $-\frac{1}{2}$, তাহাদের মধ্যে ক্ষুদ্রতম সাংখ্যমান-বিশিষ্টটি হইতেছে 120° বা $\frac{2\pi}{3}$, একই সাংখ্যমান-বিশিষ্ট − 120° গ্রহণ না করিয়া।

$\therefore\ \cos^{-1}\left(-\dfrac{1}{2}\right)$-এর মুখ্য মান $=\dfrac{2\pi}{3}$;

এবং সাধারণ মান $=2n\pi\pm\dfrac{2\pi}{3}$,

এস্থলে, $n=0$ অথবা যে-কোন ধনাত্মক বা ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা।

উদা. 2. $\cot^{-1}x$-কে অন্যান্য বিপরীত-বৃত্তীয় অপেক্ষকের মাধ্যমে প্রকাশ কর।



মনে কর, $\cot^{-1}x=\theta$;

$\therefore\ \cot\theta=x$;

$\therefore$ পার্শ্ববর্তী চিত্রে, ভূমি $=x$,

বিপরীত বাহু $=1$

এবং অতিভুজ $=\sqrt{1+x^2}$.

$$\therefore\quad \sin\theta=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}};\ \therefore\ \theta,\text{ অর্থাৎ, } \cot^{-1}x=\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

$$\text{আবার, } \cos\theta=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}};\ \therefore\ \theta,\text{ অর্থাৎ, } \cot^{-1}x=\cos^{-1}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

$$\text{এইরূপে, } \tan\theta=\frac{1}{x};\qquad \therefore\ \theta,\text{ অর্থাৎ, } \cot^{-1}x=\tan^{-1}\frac{1}{x};$$

$$\operatorname{cosec}\theta=\sqrt{1+x^2};\ \therefore\ \theta,\text{ অর্থাৎ, } \cot^{-1}x=\operatorname{cosec}^{-1}\sqrt{1+x^2};$$

$$\sec\theta=\frac{\sqrt{1+x^2}}{x};\ \therefore\ \theta,\text{ অর্থাৎ, } \cot^{-1}x=\sec^{-1}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}.$$

উদা. 3. দেখাও যে, $\cos^{-1}\frac{40}{41}=\tan^{-1}\frac{9}{40}$.

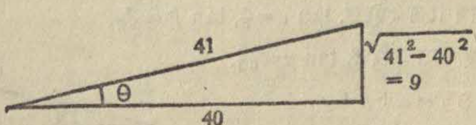
মনে কর, $\cos^{-1}\frac{40}{41}=\theta$; $\quad\therefore\ \cos\theta=\frac{40}{41}$;

$$\therefore\quad \tan\theta=\sqrt{\sec^2\theta-1}=\sqrt{\frac{1}{\cos^2\theta}-1}=\sqrt{\left(\frac{41}{40}\right)^2-1}$$

$=\frac{9}{40}$. (কেবলমাত্র '+' চিহ্ন ধরিয়া)

$\therefore\ \tan^{-1}\frac{9}{40}=\theta=\cos^{-1}\frac{40}{41}$.

সূত্রের সাহায্যে সমাধান অপেক্ষা চিত্র-সাহায্যে সমাধান-প্রক্রিয়াই প্রশস্ত।



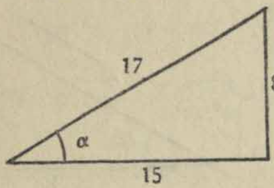
উপরস্থ চিত্র হইতে, স্পষ্টই, ভূমি $=40$, অতিভুজ $=41$;

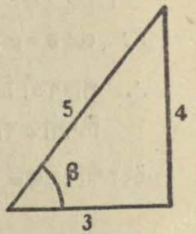
$\therefore$ বিপরীত বাহু $=\sqrt{41^2-40^2}=9$.

$\therefore\ \tan\theta=\frac{9}{40}$; $\therefore\ \theta$, অর্থাৎ, $\cos^{-1}\frac{40}{41}=\tan^{-1}\frac{9}{40}$.

উদা. 4. প্রমাণ কর যে, $\sin^{-1}\frac{8}{17}+\cos^{-1}\frac{3}{5}=\cos^{-1}\frac{13}{85}$.

মনে কর, $\sin^{-1}\frac{8}{17}=\alpha$ এবং $\cos^{-1}\frac{3}{5}=\beta$;





তাহা হইলে, $\sin\alpha=\frac{8}{17}$ এবং $\cos\beta=\frac{3}{5}$;

$\therefore$ উপরস্থ চিত্র হইতে, $\cos\alpha=\frac{15}{17}$ এবং $\sin\beta=\frac{4}{5}$.

এখন, $\cos(\sin^{-1}\frac{8}{17}+\cos^{-1}\frac{3}{5})=\cos(\alpha+\beta)$

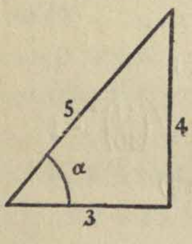
$=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\frac{15}{17}.\frac{3}{5}-\frac{8}{17}.\frac{4}{5}=\frac{13}{85}$;

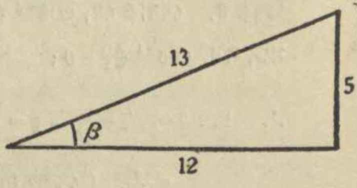
$\therefore\ \sin^{-1}\frac{8}{17}+\cos^{-1}\frac{3}{5}=\cos^{-1}\frac{13}{85}$.

উদা 5. প্রমাণ কর যে, $\sin^{-1}\frac{4}{5}+\sin^{-1}\frac{5}{13}+\sin^{-1}\frac{16}{65}=\frac{\pi}{2}$.

[C. U. 1941]

মনে কর, $\sin^{-1}\frac{4}{5}=\alpha$, $\sin^{-1}\frac{5}{13}=\beta$ এবং $\sin^{-1}\frac{16}{65}=\gamma$;

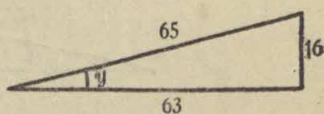




তাহা হইলে, $\sin\alpha=\frac{4}{5}$, $\sin\beta=\frac{5}{13}$ এবং $\sin\gamma=\frac{16}{65}$.

$\therefore$ উপরস্থ চিত্র হইতে, $\tan\alpha=\frac{4}{3}$, $\tan\beta=\frac{5}{12}$,

এবং পার্শ্বস্থ চিত্র হইতে, $\tan\gamma=\frac{16}{63}$.



$\therefore$ বাম পক্ষ $=\alpha+\beta+\gamma$

$=\tan^{-1}\frac{4}{3}+\tan^{-1}\frac{5}{12}+\tan^{-1}\frac{16}{63}$

$$=\tan^{-1}\frac{\frac{4}{3}+\frac{5}{12}}{1-\frac{4}{3}.\frac{5}{12}}+\tan^{-1}\frac{16}{63}$$

$$=\tan^{-1}\frac{63}{16}+\cot^{-1}\frac{63}{16}=\frac{\pi}{2}.$$ [*Art.* 8·3(5)]

উদা. 6. প্রমাণ কর যে, $\tan^{-1}\frac{1}{3}+\tan^{-1}\frac{1}{5}+\tan^{-1}\frac{1}{7}+\tan^{-1}\frac{1}{8}$
$=\frac{\pi}{4}$. [C. U. 1940, '42, '52]

প্রথম ও দ্বিতীয় পদ একসঙ্গে এবং তৃতীয় ও চতুর্থ পদ একসঙ্গে লইয়া

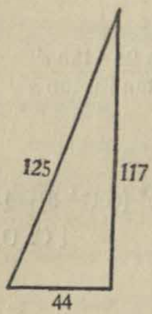
$$\text{বাম পক্ষ}=\tan^{-1}\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{3}.\frac{1}{5}}+\tan^{-1}\frac{\frac{1}{7}+\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{7}.\frac{1}{8}}$$

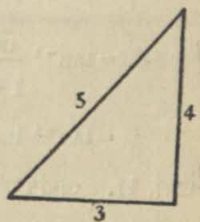
$$=\tan^{-1}\tfrac{4}{7}+\tan^{-1}\tfrac{3}{11}=\tan^{-1}\frac{\frac{4}{7}+\frac{3}{11}}{1-\frac{4}{7}.\frac{3}{11}}$$

$$=\tan^{-1}1=\frac{\pi}{4}.$$

উদা. 7. প্রমাণ কর যে, $2\tan^{-1}\frac{1}{7}+\sin^{-1}\frac{4}{5}=\cos^{-1}\frac{44}{125}$.

$$\tan(2\tan^{-1}\tfrac{1}{7})=\frac{2.\frac{1}{7}}{1-\frac{1}{49}}=\tfrac{7}{24};\quad\therefore\ 2\tan^{-1}\tfrac{1}{7}=\tan^{-1}\tfrac{7}{24}.$$





উপরস্থ চিত্র হইতে, $\sin^{-1}\frac{4}{5}=\tan^{-1}\frac{4}{3}$,

এবং $\cos^{-1}\frac{44}{125}=\tan^{-1}\frac{117}{44}$. ... (1)

$$\therefore\ \text{বাম পক্ষ}=(\tan^{-1}\tfrac{7}{24}+\tan^{-1}\tfrac{4}{3})$$

$$=\tan^{-1}\frac{\frac{7}{24}+\frac{4}{3}}{1-\frac{7}{24}.\frac{4}{3}}$$

$$=\tan^{-1}\tfrac{117}{44}=\cos^{-1}\tfrac{44}{125}.\quad [\,(1)\text{ হইতে}\,]$$

উদা. 8. প্রমাণ কর যে, $2\tan^{-1}\frac{1}{5}+\tan^{-1}\frac{1}{7}+2\tan^{-1}\frac{1}{8}=\frac{\pi}{4}$.

$$\text{বাম পক্ষ}=2(\tan^{-1}\tfrac{1}{5}+\tan^{-1}\tfrac{1}{8})+\tan^{-1}\tfrac{1}{7}$$

$$=2\tan^{-1}\frac{\frac{1}{5}+\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{5}.\frac{1}{8}}+\tan^{-1}\tfrac{1}{7}=2\tan^{-1}\tfrac{1}{3}+\tan^{-1}\tfrac{1}{7}$$

$$=\tan^{-1}\frac{2.\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{9}}+\tan^{-1}\tfrac{1}{7}$$

$$=\tan^{-1}\tfrac{3}{4}+\tan^{-1}\tfrac{1}{7}=\tan^{-1}\frac{\frac{3}{4}+\frac{1}{7}}{1-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{7}}=\tan^{-1}1=\frac{\pi}{4}.$$

উদা. 9. প্রমাণ কর যে, $\tan^{-1}x+\cot^{-1}(x+2)=\tan^{-1}\frac{1}{2}(x+1)^2$.

বাম পক্ষ $=\tan^{-1}x+\tan^{-1}\dfrac{1}{x+2}$

$$=\tan^{-1}\frac{x+\frac{1}{x+2}}{1-x\cdot\frac{1}{x+2}}=\tan^{-1}\tfrac{1}{2}(x+1)^2.$$ (সরল করিয়া)

উদা. 10. প্রমাণ কর যে, $\cot^{-1}(\tan x)-\cot^{-1}(\tan 2x)=x$.

বাম পক্ষ $=\tan^{-1}\left(\dfrac{1}{\tan x}\right)-\tan^{-1}\left(\dfrac{1}{\tan 2x}\right)$

$$=\tan^{-1}\frac{\frac{1}{\tan x}-\frac{1}{\tan 2x}}{1+\frac{1}{\tan x}\cdot\frac{1}{\tan 2x}}=\tan^{-1}\frac{\tan 2x-\tan x}{1+\tan 2x.\tan x}$$

$$=\tan^{-1}\tan(2x-x)=2x-x=x.$$

উদা. 11. প্রমাণ কর যে, $\sec^2(\tan^{-1}2)+\operatorname{cosec}^2(\cot^{-1}3)=15$.

[C. U. 1956]

মনে কর, $\tan^{-1}2=\alpha$ এবং $\cot^{-1}3=\beta$;

তাহা হইলে, $\tan\alpha=2$ এবং $\cot\beta=3$;

$\therefore$ বাম পক্ষ $=\sec^2\alpha+\operatorname{cosec}^2\beta$

$=1+\tan^2\alpha+1+\cot^2\beta$

$=1+2^2+1+3^2=2+4+9=15.$

উদা. 12. প্রমাণ কর যে, $\tan^{-1}\dfrac{a-b}{1+ab}+\tan^{-1}\dfrac{b-c}{1+bc}+\tan^{-1}c$

$=\tan^{-1}a.$ [C. U. 1946, '55]

বাম পক্ষ $=(\tan^{-1}a-\tan^{-1}b)+(\tan^{-1}b-\tan^{-1}c)+\tan^{-1}c$

$=\tan^{-1}a.$

উদা. 13. প্রমাণ কর যে, $\cos\tan^{-1}\sin\cot^{-1}x=\left(\dfrac{x^2+1}{x^2+2}\right)^{\frac{1}{2}}$.

[A. U. 1947 ; U. P. B. 1950]

মনে কর, $\cot^{-1}x=\theta$; $\therefore$ $\cot\theta=x$;

$\therefore$ $\sin\cot^{-1}x=\sin\theta=\dfrac{1}{\sqrt{1+\cot^2\theta}}=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$

$\therefore$ $\tan^{-1}\sin\cot^{-1}x=\tan^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}=\phi$, মনে কর ; ... (1)

$\therefore$ $\tan\phi=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$; $\therefore$ $\cos\phi=\dfrac{1}{\sec\phi}=\dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2\phi}}$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{1+x^2}}}=\frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{2+x^2}}. \qquad \cdots (2)$$

$\therefore$ (1) হইতে, বাম পক্ষ $=\cos\phi=\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{2+x^2}}$ [(2) হইতে]

$$=\left(\frac{1+x^2}{2+x^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

উদা. 14. যদি $\tan^{-1}x+\tan^{-1}y+\tan^{-1}z=\pi$, প্রমাণ কর যে,
$x+y+z=xyz.$ [C. U. 1954]

প্রদত্ত শর্ত হইতে,

$$\tan(\tan^{-1}x+\tan^{-1}y+\tan^{-1}z)=\tan\pi,$$

বা, $\dfrac{x+y+z-xyz}{1-yz-zx-xy}=0$;

$\therefore$ $x+y+z-xyz=0$, বা, $x+y+z=xyz.$

উদা. 15. সমাধান কর : $\cos^{-1}x=2\sin^{-1}x.$

মনে কর, $\sin^{-1}x=\theta$; তাহা হইলে, $\sin\theta=x.$ ... (1)

এখন, $\cos^{-1}x=2\sin^{-1}x$;

$x=\cos(2\sin^{-1}x)=\cos 2\theta$

$\therefore$ $=1-2\sin^2\theta=1-2x^2$, [(1) হইতে]

বা, $2x^2+x-1=0$;

$\therefore$ $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+4.2.1}}{2.2}=\dfrac{-1\pm3}{4}=\frac{1}{2},\ -1.$

কিন্তু $x=-1$ দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হয় না ; কারণ $\cos^{-1}(-1)=\pi$

এবং $2\sin^{-1}(-1)=2\times\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=-\pi.$

$\therefore$ -1 একটি অবান্তর বীজ ; উহাকে বর্জন করিয়া, $x=\frac{1}{2}.$

উদা. 16. সমাধান কর : $\tan^{-1} 3x + \tan^{-1} \frac{4x}{7} = \frac{\pi}{4}$.

$$\tan^{-1} \frac{25x}{7-12x^2} = \frac{\pi}{4}; \quad \therefore \quad \frac{25x}{7-12x^2} = \tan \frac{\pi}{4} = 1,$$

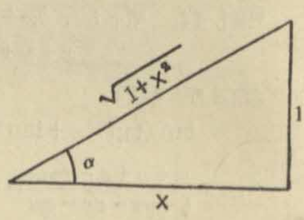
বা, $25x = 7 - 12x^2$, বা $12x^2 + 25x - 7 = 0$,

$$\therefore \quad x = \frac{-25 \pm \sqrt{625+336}}{24} = \frac{-25 \pm \sqrt{961}}{24} = \frac{-25 \pm 31}{24}$$
$$= \tfrac{1}{4}, \ -\tfrac{7}{3}.$$

কিন্তু $x = -\frac{7}{3}$ দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হয় না ; কারণ $x = -\frac{7}{3}$ বসাইলে, $\tan^{-1} 3x$ এবং $\tan^{-1} \frac{4x}{7}$ উভয়ের মুখ্য মানই ঋণাত্মক হয় এবং দুইটি ঋণাত্মক কোণের সমষ্টি কখনই দক্ষিণ-পক্ষস্থ $+\frac{\pi}{4}$-এর সমান হইতে পারে না। অতএব, $x = -\frac{7}{3}$ বর্জন করিয়া, $x = \frac{1}{4}$.

উদা. 17. সমাধান কর :

$\cos \cot^{-1} x = \tan (\sin^{-1} \frac{1}{3})$.



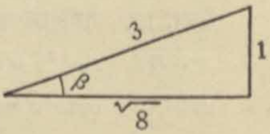
মনে কর, $\cot^{-1} x = \alpha$; $\therefore$ $\cot \alpha = x$.

$\therefore$ বাম পক্ষ $= \cos \alpha = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

আবার মনে কর, $\sin^{-1} \frac{1}{3} = \beta$;

$\therefore$ $\sin \beta = \frac{1}{3}$.

$\therefore$ দক্ষিণ পক্ষ $= \tan \beta = \frac{1}{\sqrt{8}}$.



$$\therefore \quad \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{8}}. \qquad \cdots \ (1)$$

উভয় পক্ষ বর্গ করিয়া, $\frac{x^2}{1+x^2} = \frac{1}{8}$, বা, $8x^2 = 1 + x^2$,

বা, $7x^2 = 1$; $\therefore$ $x = \pm \frac{1}{\sqrt{7}}$.

কিন্তু $x = -\frac{1}{\sqrt{7}}$ দ্বারা (1) এবং সেইজন্য মূল সমীকরণটিও সিদ্ধ হয় না। ইহা অবান্তর বীজ ; ইহাকে বর্জন করিয়া নির্ণেয় সমাধান

$$x = \frac{1}{\sqrt{7}}.$$

প্রশ্নমালা 9

1. নিম্নলিখিত বিপরীত-বৃত্তীয় অপেক্ষকগুলির মুখ্য মান ও সাধারণ মান নির্ণয় কর :

(i) $\sin^{-1}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; (ii) $\sin^{-1}(-\frac{1}{2})$; (iii) $\cos^{-1} 1$;

(iv) $\cos^{-1}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$; (v) $\tan^{-1}\sqrt{3}$; (vi) $\cot^{-1}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

2. নিম্নলিখিত বিপরীত-বৃত্তীয় অপেক্ষকগুলিকে অন্যান্য বিপরীত-বৃত্তীয় অপেক্ষকের মাধ্যমে প্রকাশ কর :

(i) $\cot^{-1}x$; (ii) $\text{cosec}^{-1}x$; (iii) $\tan^{-1}x$.

3. মান নির্ণয় কর : (i) $\sin(\sin^{-1}\frac{1}{2}+\cos^{-1}\frac{1}{2})$; [C. U. 1917, '35]

(ii) $\cos(\tan^{-1} 3+\cot^{-1} 3)$.

প্রমাণ কর যে,

4. $\cos^{-1}\frac{15}{17}=\tan^{-1}\frac{8}{15}$.

5. (i) $2\tan^{-1}\frac{3}{5}=\tan^{-1}\frac{15}{8}$. (ii) $\cos^{-1}(-\frac{7}{25})=2\tan^{-1}\frac{4}{3}$.

6. $\text{cosec}(\cot^{-1}x)=\sqrt{1+x^2}$.

7. $\sin^{-1}\frac{3}{5}+\sin^{-1}\frac{8}{17}=\sin^{-1}\frac{77}{85}$. [B. H. U. 1948]

8. $\cos^{-1}\frac{24}{25}+\cos^{-1}\frac{3}{5}=\cos^{-1}\frac{44}{125}$.

9. $\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{3}=\dfrac{\pi}{4}$.

10. $\tan^{-1} 7-\tan^{-1} 1=\tan^{-1}\frac{3}{4}$.

11. $\tan^{-1}\dfrac{1+x}{1-x}-\tan^{-1}x=\dfrac{\pi}{4}$.

12. $\sin^{-1}\frac{5}{13}=\cos^{-1}\frac{3}{5}=\cos^{-1}\frac{16}{65}$.

13. $\cos^{-1}\frac{12}{37}+\cos^{-1}\frac{3}{5}=\sin^{-1}\frac{153}{185}$.

14. (*a*) $2\tan^{-1}\frac{1}{3}+\tan^{-1}\frac{1}{7}=\dfrac{\pi}{4}$. [C. U. 1937 ; B. H. U. 1945]

(*b*) $2\tan^{-1}\frac{1}{5}+\tan^{-1}\frac{1}{4}=\tan^{-1}\frac{32}{43}$.

[C. U. B.A. & B. Sc., 1951]

15. $\tan^{-1}\frac{4}{5}+\cos^{-1}\frac{4}{5}=\tan^{-1}\frac{31}{8}$.

16. $\cos^{-1}\frac{63}{65}+2\tan^{-1}\frac{1}{5}=\sin^{-1}\frac{3}{5}$.

17. $4(\cot^{-1} 3+\text{cosec}^{-1}\sqrt{5})=\pi$. [C. U. 1939]

18. $\tan^{-1} \frac{240}{161} = 2 \cos^{-1} \frac{15}{17}$.

19. (i) $\sin^{-1} \frac{4}{5} + 2 \tan^{-1} \frac{1}{3} = \frac{\pi}{2}$.

(ii) $\sin^{-1} \frac{7}{25} + 2 \sin^{-1} \frac{3}{5} = \frac{\pi}{2}$.

20. $\tan^{-1} \frac{1}{4} + \tan^{-1} \frac{2}{9} = \frac{1}{2} \cos^{-1} \frac{3}{5}$. [U. P. B. 1947]

21. $\tan^{-1} \frac{1}{2} + \tan^{-1} \frac{1}{3} = \sin^{-1} \frac{1}{\sqrt{5}} + \cot^{-1} 3 = 45°$.

[B. H. U. 1952]

22. $\tan^{-1} \frac{1}{a+b} + \tan^{-1} \frac{b}{a^2+ab+1} = \tan^{-1} \frac{1}{a}$. [C. U. 1949]

23. $\sin^{-1} \frac{7}{25} + \sin^{-1} \frac{15}{17} + \sin^{-1} \frac{87}{425} = \frac{\pi}{2}$.

24. $\tan^{-1} \frac{1}{3} + \tan^{-1} \frac{2}{11} + \tan^{-1} \frac{7}{24} = \frac{\pi}{4}$.

25. $\tan^{-1} 1 + \tan^{-1} 2 + \tan^{-1} 3 = \pi$
$= 2(\tan^{-1} 1 + \tan^{-1} \frac{1}{2} + \tan^{-1} \frac{1}{3})$.

26. $\cos^{-1} x = 2 \sin^{-1} \sqrt{\frac{1-x}{2}} = 2 \cos^{-1} \sqrt{\frac{1+x}{2}}$.

27. $\tan^{-1} \sqrt{x} = \frac{1}{2} \cos^{-1} \frac{1-x}{1+x}$. [C. U. 1943]

28. $\sin^{-1} \sqrt{\frac{a+x}{2a}} = \cos^{-1} \sqrt{\frac{a-x}{2a}} = \tan^{-1} \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$.

29. $\tan^{-1} \frac{a-b}{1+ab} + \tan^{-1} \frac{b-c}{1+bc} + \tan^{-1} \frac{c-a}{1+ca}$
$= \tan^{-1} \frac{a^2-b^2}{1+a^2b^2} + \tan^{-1} \frac{b^2-c^2}{1+b^2c^2} + \tan^{-1} \frac{c^2-a^2}{1+c^2a^2}$.

[P. U. 1931]

30. (a) $\cot^{-1} \frac{ab+1}{a-b} + \cot^{-1} \frac{bc+1}{b-c} + \cot^{-1} \frac{ca+1}{c-a} = 0$.

(b) $\tan(\tan^{-1}x + \tan^{-1}y + \tan^{-1}z)$
$= \cot(\cot^{-1}x + \cot^{-1}y + \cot^{-1}z)$.

[C. U. B.A. & B.Sc. 1939]

31. $\{\sec(\cot^{-1}x)\}^2 = \{\operatorname{cosec}(\tan^{-1}x)\}^2$.

32. $\sec^2(\tan^{-1} 3) + \operatorname{cosec}^2(\cot^{-1} 4) = 27$.

33. $\sin \operatorname{cosec}^{-1} \cot \tan^{-1} x = x.$

34. $\cos \tan^{-1} \sin \cot^{-1} \sqrt{\dfrac{2x^2-1}{1-x^2}} = x.$

35. $\tan^{-1}(\frac{1}{2} \tan 2A) + \tan^{-1}(\cot A) + \tan^{-1}(\cot^3 A) = 0.$ [C. U. 1948]

36. যদি $\cos^{-1}x + \cos^{-1}y + \cos^{-1}z = \pi$, প্রমাণ কর যে,
$x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1.$ [C. U. B.A. & B.Sc., 1941]

37. যদি $A + B + C = \pi$, এবং $A = \tan^{-1} 2$, $B = \tan^{-1} 3$, তাহা হইলে
দেখাও যে, $C = \dfrac{\pi}{4}$. [C. U. 1951]

38. যদি $\sin^{-1}\alpha + \sin^{-1}\beta + \sin^{-1}\gamma = \pi$, দেখাও যে,
$\alpha\sqrt{1-\alpha^2} + \beta\sqrt{1-\beta^2} + \gamma\sqrt{1-\gamma^2} = 2\alpha\beta\gamma.$ [C. U. 1944]

39. $\tan^{-1}x + \cot^{-1}(x+1) = \tan^{-1}(x^2+x+1).$

নিম্নলিখিত সমীকরণসমূহের সমাধান কর :

40. (i) $\sin^{-1}x = \cos^{-1}x.$ (ii) $\tan^{-1}x = \cot^{-1}x.$

41. $\sin^{-1}\dfrac{5}{x} + \sin^{-1}\dfrac{12}{x} = \dfrac{\pi}{2}.$ [C. U. 1914]

42. $\tan^{-1}\dfrac{x-1}{x-2} + \tan^{-1}\dfrac{x+1}{x+2} = \dfrac{\pi}{4}.$ [C. U. B.A. & B.Sc., 1947]

43. $\tan^{-1}\dfrac{1}{1+2x} + \tan^{-1}\dfrac{1}{4x+1} = \tan^{-1}\dfrac{2}{x^2}.$ [Agra, 1947]

44. $\sin^{-1}\dfrac{2a}{1+a^2} + \sin^{-1}\dfrac{2b}{1+b^2} = 2\tan^{-1}x.$ [C. U. 1947]

45. $\tan^{-1}\frac{1}{4} + 2\tan^{-1}\frac{1}{5} + \tan^{-1}\frac{1}{6} + \tan^{-1}\dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{4}.$ [C. U. 1949]

46. $3\tan^{-1}\dfrac{1}{2+\sqrt{3}} - \tan^{-1}\dfrac{1}{x} = \tan^{-}\frac{1}{3}.$ [Agra, 1943]

47. সমাধান কর : $\left.\begin{array}{l}\sin^{-1}x + \sin^{-1}y = \frac{2}{3}\pi \\ \cos^{-1}x - \cos^{-1}y = \frac{1}{3}\pi\end{array}\right\}$ [C. U. B.A. & B.Sc., 1940]

48. $\tan^{-1}\dfrac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}} = \beta.$

49. $\operatorname{cosec}^{-1}x = \operatorname{cosec}^{-1}a + \operatorname{cosec}^{-1}b.$

50. যদি $\cos^{-1}\dfrac{x}{a} + \cos^{-1}\dfrac{y}{b} = \alpha$, দেখাও যে,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{2xy}{ab}\cos\alpha + \frac{y^2}{b^2} = \sin^2\alpha.$$

নবম অধ্যায়

ত্রিভুজের গুণাবলী

(Properties of Triangles)

9·1. প্রত্যেক ত্রিভুজের তিনটি বাহু ও তিনটি কোণ, এই ছয়টি অঙ্গ থাকে। বাহু অনুসারে ত্রিভুজসমূহকে বিষমবাহু, সমদ্বিবাহু ও সমবাহু—এই তিন শ্রেণীতে ভাগ করা যায়, আর, কোণ অনুসারে উহাদিগকে সূক্ষ্মকোণী, স্থূলকোণী ও সমকোণী—এই তিন শ্রেণীতে ভাগ করা যায়।

ত্রিভুজের কোণ-তিনটিকে সাধারণতঃ A, B ও C দ্বারা, ঐ সকল কোণের বিপরীত বাহুগুলিকে যথাক্রমে a, b ও c দ্বারা এবং ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলকে $\triangle$ বা S দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

ঐ সকল বাহু, কোণ, ক্ষেত্রফল, ত্রিভুজের অন্তর্ব্যাসার্ধ, পরিব্যাসার্ধ, বহির্ব্যাসার্ধ ইত্যাদি সংশ্লিষ্ট, উহাদের পরস্পরের সম্বন্ধ-জ্ঞাপক সূত্রাবলী বর্তমান অধ্যায়ে আলোচনা করা হইবে।

9·2. যে-কোন ত্রিভুজে

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C},$$

অর্থাৎ, বাহুগুলি স্ব স্ব বিপরীত কোণের sine-এর সমানুপাতী।

[In any triangle, prove that

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C},$$

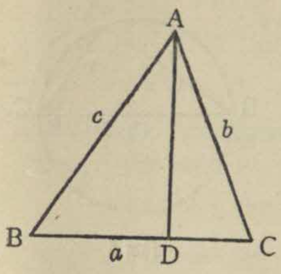
i.e., the sides are proportional to the sines of the opposite angles.]

মনে কর, ABC একটি ত্রিভুজ।

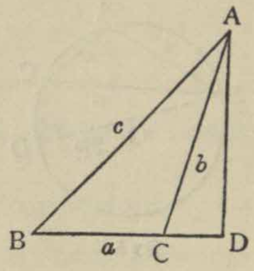
যে-কোন শীর্ষবিন্দু A হইতে বিপরীত বাহু $\overline{BC}$-এর উপর $\overline{AD}$ লম্ব টানা হইল; ইহা, চিত্র 1-এ সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজের ক্ষেত্রে, $\overline{BC}$-এর মধ্যে অবস্থিত কোন বিন্দু D-তে, চিত্র 2-এ স্থূলকোণী ত্রিভুজের ক্ষেত্রে, বর্ধিত $\overline{BC}$-কে কোন বিন্দু D-তে ছেদ করিল এবং চিত্র 3-এ সমকোণী ত্রিভুজের ক্ষেত্রে $\overline{AD}$ লম্ব বলিয়া $\overline{AC}$-এর উপরই সমাপতিত হইল।

এখন, ABD ত্রিভুজে, AD = AB sin ABD = c sin B, ··· (1)

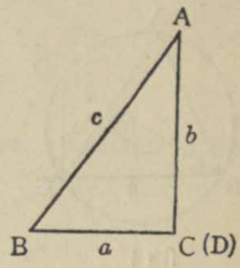
এবং ACD ত্রিভুজে, AD = AC sin ACD ;



চিত্র 1



চিত্র 2



চিত্র 3

এখন, চিত্র 1-এ, AC sin ACD = b sin C ;

এবং চিত্র 2-এ, AC sin ACD = b sin $(\pi - \text{C})$ = b sin C ; ··· (2)

$\therefore \quad c \sin \text{B} = b \sin \text{C}$, অর্থাৎ $\dfrac{b}{\sin \text{B}} = \dfrac{c}{\sin \text{C}}$.

এইরূপে, B হইতে AC-এর উপর লম্ব টানিয়া চিত্র 1 এবং 2-এ, প্রমাণ করা যায় যে,

$$\frac{a}{\sin \text{A}} = \frac{c}{\sin \text{C}}.$$

∴ চিত্র 1 এবং 2-এ, অর্থাৎ, সূক্ষ্মকোণী এবং স্থূলকোণী ত্রিভুজের ক্ষেত্রে,

$$\frac{a}{\sin \text{A}} = \frac{b}{\sin \text{B}} = \frac{c}{\sin \text{C}}.$$

চিত্র 3-এ, C একটি সমকোণ ;

$\therefore \quad \sin \text{A} = \dfrac{a}{c}$ এবং $\sin \text{B} = \dfrac{b}{c}$, এবং $\sin \text{C} = 1$;

$\therefore \quad \dfrac{a}{\sin \text{A}} = c = \dfrac{b}{\sin \text{B}}$, অর্থাৎ, $\dfrac{a}{\sin \text{A}} = \dfrac{b}{\sin \text{B}} = c = \dfrac{c}{\sin \text{C}}$.

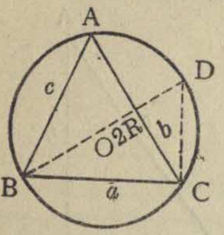
অতএব, যে-কোন ত্রিভুজে,

$$\frac{a}{\sin \text{A}} = \frac{b}{\sin \text{B}} = \frac{c}{\sin \text{C}},$$

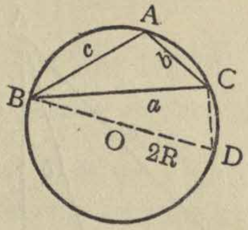
অর্থাৎ, ত্রিভুজের বাহুগুলি স্ব স্ব বিপরীত কোণের sine-এর সমানুপাতী।

বিকল্প প্রমাণ ঃ

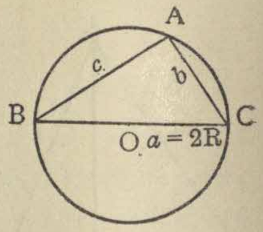
মনে কর, ABC ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র O এবং পরিব্যাসার্ধ R.



চিত্র 4



চিত্র 5



চিত্র 6

চিত্র 4-এ ABC ত্রিভুজটি সূক্ষ্মকোণী; ইহার সবগুলি কোণই সূক্ষ্মকোণ; এবং চিত্র 5-এ, ABC ত্রিভুজটি স্থূলকোণী; মনে কর, ইহার A কোণটি স্থূলকোণ।

চিত্র 4 এবং 5-এ BO যোগ করিয়া পরিধি পর্যন্ত বর্ধিত কর; ইহা পরিধিকে D বিন্দুতে ছেদ করিল। CD যোগ কর।

উভয় চিত্রেই BCD কোণটি অর্ধবৃত্তস্থ বলিয়া সমকোণ, এবং BD = 2R.

চিত্র 4-এ, একই বৃত্তাংশস্থ বলিয়া, $\angle A = \angle D$.

$\therefore \quad \sin A = \sin D = \frac{BC}{BD} = \frac{a}{2R}$, বা, $\frac{a}{\sin A} = 2R$.

চিত্র 5-এ, ABDC বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ বলিয়া, $\angle A + \angle D = \pi$,

বা, $\angle A = \pi - \angle D$.

$\therefore \quad \sin A = \sin(\pi - D) = \sin D = \frac{BC}{BD} = \frac{a}{2R}$; বা, $\frac{a}{\sin A} = 2R$.

চিত্র 6-এ, $\angle A$ সমকোণ; $\quad \therefore \quad \sin A = 1 = \frac{BC}{BC} = \frac{a}{a} = \frac{a}{2R}$,

বা, $\frac{a}{\sin A} = 2R$.

$\therefore$ যে-কোন ত্রিভুজে, $\frac{a}{\sin A} = 2R$.

এইরূপে, AO যোগ করিয়া E পর্যন্ত বর্ধিত করিয়া প্রথমে CE এবং পরে BE যোগ করিলে দেখা যাইবে

$$\frac{b}{\sin B} = 2R \text{ এবং } \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

$$\therefore \quad \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

অনুসিদ্ধান্ত। $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$;

(i) $\therefore\ a=2R\sin A,\ b=2R\sin B,\ c=2R\sin C$;

(ii) $\sin A=\frac{a}{2R},\ \sin B=\frac{b}{2R},\ \sin C=\frac{c}{2R}$.

(iii) $a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$.

9·3. ত্রিভুজের যে-কোন কোণের Cosine-কে বাহু দ্বারা প্রকাশ।

প্রমাণ করিতে হইবে, যে-কোন ত্রিভুজে,

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A,\ \text{বা},\ \cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},$$

$$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B,\ \text{বা},\ \cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca},$$

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C,\ \text{বা},\ \cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}.$$

9·1 অনুচ্ছেদের

চিত্র 1-এ, $AB^2=BC^2+CA^2-2BC.CD$.

এখন, ACD ত্রিভুজে, $CD=AC\,.\cos C=b\cos C$.

$\therefore\quad c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$.

চিত্র 2-এ, $AB^2=BC^2+CA^2+2BC.CD$.

এখন, ACD ত্রিভুজে, $CD=AC\cos(\pi-C)=-b\cos C$.

$\therefore\quad c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$.

চিত্র 3-এ, $AB^2=BC^2+CA^2$;

$\therefore\quad c^2=a^2+b^2=a^2+b^2-2ab.0$

$\qquad =a^2+b^2-2ab\cos C.\quad [\because\ \cos C=\cos 90°=0.]$

অতএব সকল প্রকার ত্রিভুজের ক্ষেত্রেই,

$$c^2=a^2+b^2-2ab\sin C,$$

অর্থাৎ, $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$.

অনুরূপ প্রক্রিয়ায় অন্য দুইটি সূত্রও প্রমাণ করা যায়।

9·4. অনুচ্ছেদকে 9·2-এর অনুসিদ্ধান্ত এবং 9·3 অনুচ্ছেদ হইতে দেখা যায়,

$$\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{\frac{a}{2R}}{\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}=\frac{abc}{R}\cdot\frac{1}{b^2+c^2-a^2}.$$

এইরূপে $\tan B = \frac{abc}{R} \cdot \frac{1}{c^2 + a^2 - b^2}$,

এবং $\tan C = \frac{abc}{R} \cdot \frac{1}{a^2 + b^2 - c^2}$.

9·5. যে-কোন ত্রিভুজে, প্রমাণ করিতে হইবে,

$$\mathbf{a = b \cos C + c \cos B,}$$
$$\mathbf{b = c \cos A + a \cos C,}$$
$$\mathbf{c = a \cos B + b \cos A.}$$

অনু. 9·2-এর চিত্রগুলি হইতে দেখা যায় :

চিত্র 1-এ, C কোণটি সূক্ষ্মকোণ, এবং

$$BC = BD + CD = AB \cos ABD + AC \cos ACD \; ;$$

$$\therefore \quad a = c \cos B + b \cos C \; ;$$

চিত্র 2-এ, C কোণটি স্থূলকোণ, এবং

$$BC = BD - CD = AB \cos ABD - AC \cos ACD \; ;$$

$$\therefore \quad a = c \cos B - b \cos (180° - c)$$
$$= c \cos B - b(-\cos C) = c \cos B + b \cos C \; ;$$

চিত্র 3-এ, C কোণটি সমকোণ এবং

$$BC = AB \cos ABC = c \cos B \; ;$$

$$a = c \cos B + b \cos C \; ; \quad [\text{কারণ } \cos C = \cos 90° = 0.]$$

অতএব, সর্বক্ষেত্রেই $a = b \cos C + c \cos B$.

অনুরূপ প্রণালীতে অপর সূত্র-দুইটিও প্রমাণ করা যায়।

9·6. ত্রিভুজের অর্ধকোণসমূহের Sine-কে উহার বাহু-তিনটির দৈর্ঘ্য দ্বারা প্রকাশ।

[*To express the sines of half angles of a triangle in terms of the sides.*]

আমরা জানি, $\cos A = 1 - 2 \sin^2 \frac{A}{2}$,

$$\therefore \quad 2 \sin^2 \frac{A}{2} = 1 - \cos A = 1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$
$$= \frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{2bc} = \frac{a^2 - (b^2 - 2bc + c^2)}{2bc}$$
$$= \frac{a^2 - (b-c)^2}{2bc} = \frac{(a-b+c)(a+b-c)}{2bc} \quad \cdots \quad (1)$$

এখন যদি ত্রিভুজের পরিসীমাকে $2s$ দ্বারা সূচিত করা হয়, তাহা হইলে $2s=a+b+c$ এবং $s=\frac{a+b+c}{2}$.

$$\therefore \quad a-b+c=a+b+c-2b=2s-2b=2(s-b),$$
$$a+b-c=a+b+c-2c=2s-2c=2(s-c).$$

$\therefore$ (1) হইতে, $2\sin^2\frac{A}{2}=\frac{2(s-b).2(s-c)}{2bc}$;

$$\therefore \quad \sin^2\frac{A}{2}=\frac{(s-b)(s-c)}{bc};$$

$$\therefore \quad \mathbf{\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}};$$

বর্গমূলের ধনাত্মক মানটি মাত্র এস্থলে গ্রহণ করিতে হইবে ; কারণ, ত্রিভুজের কোণ বলিয়া $A<180°$ এবং সেইজন্য $\frac{A}{2}<90°$, অতএব, $\sin\frac{A}{2}$-এর মান সর্বদাই ধনাত্মক।

অনুরূপ প্রণালীতে প্রমাণ করা যায় যে,

$$\mathbf{\sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{ca}},\ \sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}}.$$

9·7. ত্রিভুজের অর্ধকোণসমূহের Cosine-কে উহার তিন বাহুর দৈর্ঘ্য দ্বারা প্রকাশ।

[*To express the cosines of half angles of a triangle in terms of the sides.*]

আমরা জানি, $\cos A=2\cos^2\frac{A}{2}-1$;

$$\therefore \quad 2\cos^2\frac{A}{2}=1+\cos A=1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$
$$=\frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{(b^2+2bc+c^2)-a^2}{2bc}$$
$$=\frac{(b+c)^2-a^2}{2bc}=\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc}$$
$$=\frac{2s(2s-2a)}{2bc}\quad\left[a+b+c\text{-এর পরিবর্তে } 2s \text{ ধরিয়া}\right]$$
$$=\frac{4s(s-a)}{2bc}=\frac{2s(s-a)}{bc};$$

$$\therefore \quad \cos^2\frac{A}{2}=\frac{s(s-a)}{bc}; \quad \therefore \quad \cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}};$$

বর্গমূলের ধনাত্মক মূলটি মাত্র এস্থলে গ্রহণ করা হইয়াছে ; কারণ, ত্রিভুজের কোণ বলিয়া, $A < 180°$ এবং সেইজন্য $\frac{A}{2} < 90°$, অতএব, $\cos\frac{A}{2}$ -এর মান সর্বদাই ধনাত্মক।

অনুরূপ প্রণালীতে প্রমাণ করা যায় যে,

$$\cos\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{s(s-b)}{ca}}, \quad \cos\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}.$$

9·8. ত্রিভুজের অর্ধকোণসমূহের Tangent-কে উহার তিন বাহুর দৈর্ঘ্য দ্বারা প্রকাশ।

[*To express the tangents of half angles of a triangle in terms of the sides.*]

$$\tan\frac{A}{2}=\sin\frac{A}{2}\div\cos\frac{A}{2}$$

$$=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}\div\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}} \quad [\text{ অনু. } 9·8 \text{ ও } 9·7]$$

$$=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}.$$

অনুরূপ প্রণালীতে প্রমাণ করা যায় যে,

$$\tan\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}} \text{ এবং } \tan\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}.$$

A, B, C ত্রিভুজের কোণ বলিয়া, উহাদের প্রত্যেকটি $180°$ অপেক্ষা ছোট এবং সেইজন্য $\frac{A}{2}$, $\frac{B}{2}$, $\frac{C}{2}$-এর প্রত্যেকটি $90°$ অপেক্ষা ছোট ; সুতরাং $\tan\frac{A}{2}$, $\tan\frac{B}{2}$; $\tan\frac{C}{2}$-এর প্রত্যেকটি ধনাত্মক হইবে। উপরের সূত্রসমূহে এইজন্যই বর্গমূলের কেবলমাত্র ধনাত্মক চিহ্ন গ্রহণ করা হইয়াছে।

9·9. ত্রিভুজের কোণের sine-কে উহার বাহুগুলির দ্বারা প্রকাশ।

[*To express the sines of angles of a triangle in terms of the sides.*]

$$\sin A=2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}=2\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}\cdot\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}};$$

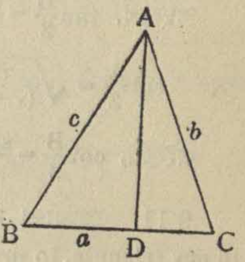
$$\sin A=\frac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

এইরূপে, $\sin B = \frac{2}{ca}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$;

$$\sin C = \frac{2}{ab}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

9·10. ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল (Area of a triangle)।

ABC ত্রিভুজের যে-কোন শীর্ষ A বিন্দু হইতে বিপরীত বাহু BC-এর উপর AD লম্ব টান।



ACD ত্রিভুজ হইতে,

$$AD = AC \sin C = b \sin C.$$

∴ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলকে $\triangle$ দ্বারা সূচিত করিলে,

$$\triangle = \tfrac{1}{2} \times \text{ভূমি} \times \text{উচ্চতা}$$
$$= \tfrac{1}{2}BC.AD = \tfrac{1}{2}ab \sin C.$$

এইরূপে, B ও C হইতে বিপরীত বাহুর উপর লম্ব টানিয়া প্রমাণ করা যায় যে,

$$\triangle = \tfrac{1}{2}bc \sin A = \tfrac{1}{2}ca \sin B.$$

$$\therefore \quad \triangle = \tfrac{1}{2}ab \sin C = \tfrac{1}{2}bc \sin A = \tfrac{1}{2}ca \sin B, \quad \cdots \ (1)$$

অর্থাৎ, **ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times$ দুই বাহুর গুণফল $\times$ ঐ দুই বাহুর অন্তর্ভুত কোণের sine।**

আবার, $\triangle = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}bc \cdot \frac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ [অনু. 9·9]

$$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad \cdots \quad \cdots \ (2)$$
$$= \sqrt{\tfrac{1}{2}(a+b+c).\tfrac{1}{2}(b+c-a).\tfrac{1}{2}(c+a-b).\tfrac{1}{2}(a+b-c)}$$
$$= \tfrac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}$$
$$= \tfrac{1}{4}\sqrt{2b^2c^2 + 2c^2a^2 + 2a^2b^2 - a^4 - b^4 - c^4} \quad \cdots \ (3)$$

আবার, R পরিব্যাসার্ধ হইলে,

$$\triangle = \tfrac{1}{2}bc \sin A = \tfrac{1}{2}bc \cdot \frac{a}{2R} \quad [\text{অনু. } 9{\cdot}2]$$

$$= \frac{abc}{4R}. \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \ (4)$$

দ্রষ্টব্য ঃ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল সূচিত করিবার জন্য S অক্ষরটিও ব্যবহৃত হয়।

অনুসিদ্ধান্ত 1. (1) হইতে, $\sin A = \frac{2\triangle}{bc}$, $\sin B = \frac{2\triangle}{ca}$, $\sin C = \frac{2\triangle}{ab}$;

এবং (4) হইতে, $R = \frac{abc}{4\triangle}$.

অনুসিদ্ধান্ত 2. অনু. 9·8 হইতে,

$$\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)(s-b)(s-c)}{s(s-a)(s-b)(s-c)}}$$
$$=\frac{(s-b)(s-c)}{\Delta}.$$

অনুরূপে, $\tan\frac{B}{2}=\frac{(s-c)(s-a)}{\Delta}$, $\tan\frac{C}{2}=\frac{(s-a)(s-b)}{\Delta}$.

$$\cot\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{(s-b)(s-c)}}=\sqrt{\frac{s(s-a).s(s-a)}{(s-b)(s-c).s(s-a)}}=\frac{s(s-a)}{\Delta}.$$

এইরূপে, $\cot\frac{B}{2}=\frac{s(s-b)}{\Delta}$, $\cot\frac{C}{2}=\frac{s(s-c)}{\Delta}$.

9·11. প্রমাণ করিতে হইবে যে, যে-কোন ত্রিভুজে (In any triangle, to prove that)

$$\tan\frac{B-C}{2}=\frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}\cdot$$

যে-কোন ত্রিভুজ ABC-তে,

$$A+B+C=180°, \text{ বা, } \frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{C}{2}=90° \qquad \cdots \quad (1)$$

এবং $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$, $\therefore\ \frac{b}{c}=\frac{\sin B}{\sin C}$. $\qquad \cdots \quad (2)$

(2) হইতে, $$\frac{b-c}{b+c}=\frac{\sin B-\sin C}{\sin B+\sin C}=\frac{2\cos\frac{B+C}{2}\cdot\sin\frac{B-C}{2}}{2\sin\frac{B+C}{2}\cdot\cos\frac{B-C}{2}}$$

$$=\cot\frac{B+C}{2}\cdot\tan\frac{B-C}{2} \qquad \cdots \qquad \cdots \quad (3)$$

$$=\cot\left(90°-\frac{A}{2}\right)\cdot\tan\frac{B-C}{2} \qquad [\text{ (1) হইতে }]$$

$$=\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B-C}{2};$$

$$\therefore\ \tan\frac{B-C}{2}=\frac{b-c}{b+c}\cdot\frac{1}{\tan\frac{A}{2}}=\frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}\cdot$$

অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায় যে,

$$\tan\frac{C-A}{2}=\frac{c-a}{c+a}\cot\frac{B}{2};\ \tan\frac{A-B}{2}=\frac{a-b}{a+b}\cot\frac{C}{2}\cdot$$

অনুসিদ্ধান্ত। (3) হইতে, স্পষ্টই, $\dfrac{b-c}{b+c}=\dfrac{\tan\frac{B-C}{2}}{\tan\frac{B+C}{2}}$; এইরূপে,

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{\tan\frac{A-B}{2}}{\tan\frac{A+B}{2}} \text{ এবং } \frac{c-a}{c+a}=\frac{\tan\frac{C-A}{2}}{\tan\frac{C+A}{2}}.$$

উদা. 1. যদি $a=4\sqrt{3}$, $b=12$, $A=30°$ হয়, ABC ত্রিভুজের পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধ এবং C-এর মান নির্ণয় কর।

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}; \quad \therefore \quad \sin B=\frac{b\sin A}{a}=\frac{12.\sin 30°}{4\sqrt{3}}$$
$$=\frac{12.1}{4\sqrt{3}.2}=\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$\therefore$ $B=60°$ বা $120°$.

$\therefore$ $B=60°$ হইলে, $C=180°-(A+B)=180°-(30°+60°)=\mathbf{90°}$;

$B=120°$ হইলে, $C=180°-(A+B)=180°-(30°+120°)=\mathbf{30°}$.

$$2R=\frac{a}{\sin A}; \quad \therefore \quad R=\frac{a}{2\sin A}=\frac{4\sqrt{3}}{2.\frac{1}{2}}=\mathbf{4\sqrt{3}}.$$

উদা. 2. কোন ত্রিভুজে, $a=7$, $b=5$, $c=8$ হইলে A-র মান নির্ণয় কর।

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{5^2+8^2-7^2}{2.5.8}=\frac{40}{80}=\frac{1}{2};$$

$\therefore$ $\mathbf{A=60°}$.

উদা. 3. কোন ত্রিভুজে, $a=8$, $b=10$ এবং $c=14$ হইলে $\tan\frac{A}{2}$-এর মান নির্ণয় কর।

এস্থলে, $s=\dfrac{a+b+c}{2}=\dfrac{8+10+14}{2}=16$;

$\therefore$ $s-a=16-8=8$, $s-b=16-10=6$, $s-c=16-14=2$.

$$\therefore \quad \tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}=\sqrt{\frac{6.2}{16.8}}=\sqrt{\frac{6}{64}}=\mathbf{\frac{\sqrt{6}}{8}}.$$

উদা. 4. কোন ত্রিভুজে, $a^4+b^4+c^4=b^2c^2+2a^2(b^2+c^2)$, A-এর মান নির্ণয় কর।

$$a^4+b^4+c^4=b^2c^2+2a^2(b^2+c^2)=b^2c^2+2a^2b^2+2a^2c^2,$$

বা, $a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2a^2c^2+2b^2c^2=3b^2c^2$,

বা, $\frac{(b^2+c^2-a^2)^2}{4b^2c^2}=\frac{3}{4}$, (উভয় পক্ষকে $4b^2c^2$ দ্বারা ভাগ করিয়া)

বা, $\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$; $\therefore \cos^2 A=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$;

$\therefore \cos A = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\therefore$ A = **30°, 150°.**

উদা 5. দেখাও যে, ABC ত্রিভুজে,

$$a(\sin B-\sin C)+b(\sin C-\sin A)+c(\sin A-\sin B)=0.$$

বাম পক্ষ $=(a\sin B-b\sin A)+(b\sin C-c\sin B)$
$+(c\sin A-a\sin C)$

$=0+0+0$, [কারণ $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$;

$\therefore$ $a\sin B=b\sin A$, বা, $a\sin B-b\sin A=0$, ইত্যাদি ।]

$=\mathbf{0}$.

উদা. 6. কোন ত্রিভুজের বাহুগুলি যথাক্রমে x^2+x+1, $2x+1$ এবং x^2-1. বৃহত্তম কোণের পরিমাণ নির্ণয় কর। [C. U. 1910]

ত্রিভুজের বাহু ধনাত্মক ; $\therefore$ $2x+1>0$, বা, $x>-\frac{1}{2}$; ... (1)

এবং x^2-1 ধনাত্মক হইবে, স্থতরাং, x-এর মান অবশ্যই 1 অপেক্ষা বৃহত্তর। ... ... (2)

(1) এবং (2) হইতে, $x>1$.

এখন, $x>1$ হইলে, স্পষ্টই $(x^2+x+1)-(2x+1)$, অর্থাৎ, $x^2-x>0$
এবং $(x^2+x+1)-(x^2-1)$, অর্থাৎ, $x+2>0$;

$\therefore$ x^2+x+1 বৃহত্তম বাহু এবং ইহার বিপরীত কোণটিই বৃহত্তম কোণ।

এই কোণটি θ হইলে, $\cos\theta=\frac{(x^2-1)^2+(2x+1)^2-(x^2+x+1)^2}{2(x^2-1)(2x+1)}$

$$=\frac{-2x^3-x^2+2x+1}{2(2x^3+x^2-2x-1)}=-\frac{1}{2};$$

$\therefore$ $\theta=\mathbf{120°}$.

উদা. 7. প্রমাণ কর যে, যে-কোন ত্রিভুজে,

$$a(b\cos C-c\cos B)=b^2-c^2.$$

বাম পক্ষ $=ab\cos C-ac\cos B$

$$=ab.\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}-ac.\frac{c^2+a^2-b^2}{2ac}$$

$$=\frac{a^2+b^2-c^2}{2}-\frac{c^2+a^2-b^2}{2}$$
$$=\tfrac{1}{2}(a^2+b^2-c^2-c^2-a^2+b^2)$$
$$=\tfrac{1}{2}(2b^2-2c^2)=b^2-c^2.$$

উদা. 8. প্রমাণ কর যে, যে-কোন ত্রিভুজে,

$$(b+c)\sin\frac{A}{2}=a\cos\frac{B-C}{2}.$$

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R;\quad \therefore\ a=2R\sin A,$$
$$b=2R\sin B,\ c=2R\sin C.$$

$$\therefore\quad \frac{b+c}{a}=\frac{2R(\sin B+\sin C)}{2R\sin A}=\frac{\sin B+\sin C}{\sin A}$$

$$=\frac{2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}$$

$$=\frac{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}}{\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}\quad \left[\because A+B+C=180^\circ;\ \therefore \frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{C}{2}=90^\circ;\ \therefore \sin\frac{B+C}{2}=\sin\left(90^\circ-\frac{A}{2}\right)=\cos\frac{A}{2}.\right]$$

$$=\frac{\cos\frac{B-C}{2}}{\sin\frac{A}{2}};$$

$$\therefore\quad (b+c)\sin\frac{A}{2}=a\cos\frac{B-C}{2}.$$ (বজ্রগুণন দ্বারা)

উদা. 9. প্রমাণ কর যে, যে-কোন ত্রিভুজে,

$$(b-c)\cot\frac{A}{2}+(c-a)\cot\frac{B}{2}+(a-b)\cot\frac{C}{2}=0.$$

বাম পক্ষ $=(b-c)\frac{s(s-a)}{\triangle}+(c-a)\frac{s(s-b)}{\triangle}+(a-b)\frac{s(s-c)}{\triangle}$

$$=\frac{s}{\triangle}\{(b-c)(s-a)+(c-a)(s-b)+(a-b)(s-c)\}$$

$$= \frac{s}{\Delta}\,[s(b-c+c-a+a-b)-\{a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)\}]$$

$$= \frac{s}{\Delta}\cdot 0 = 0.$$

উদা. 10. যে-কোন ত্রিভুজে, $\cos A = \dfrac{\sin B}{2\sin C}$ হইলে, প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু। [B. H. U. 1950]

$$\cos A = \frac{\sin B}{2\sin C},$$

বা, $2\sin C\cos A = \sin B = \sin(A+C)$ [$\because\ A+B+C=\pi$]

$= \sin A\cos C + \cos A\sin C,$

বা, $\sin C\cos A = \sin A\cos C,$

বা, $\sin C\cos A - \sin A\cos C = 0,$

বা, $\sin(C-A)=0$; $\therefore\ C=A,$

অর্থাৎ, ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু।

উদা. 11. একটি ত্রিভুজের বাহুগুলি সমান্তর-শ্রেণীতে থাকিলে, দেখাও যে, $\cot\frac{A}{2}, \cot\frac{B}{2}, \cot\frac{C}{2}$ ও সমান্তর-শ্রেণীতে থাকে।

$$\cot\frac{A}{2} = \frac{s(s-a)}{\Delta},\ \cot\frac{B}{2} = \frac{s(s-b)}{\Delta},\ \cot\frac{C}{2} = \frac{s(s-c)}{\Delta};$$

$\therefore$ $\cot\frac{A}{2}, \cot\frac{B}{2}, \cot\frac{C}{2}$ সমান্তর-শ্রেণীতে থাকিবে,

যদি $\dfrac{s(s-a)}{\Delta}, \dfrac{s(s-b)}{\Delta}$ এবং $\dfrac{s(s-c)}{\Delta}$ একটি সমান্তর-শ্রেণীতে থাকে,

অর্থাৎ, যদি $\dfrac{s(s-a)}{\Delta} + \dfrac{s(s-c)}{\Delta} = \dfrac{2s(s-b)}{\Delta}$ হয়,

,, ,, $s-a+s-c=2(s-b)$ হয়,

,, ,, $-a-c=-2b$ হয়,

,, ,, $a+c=2b$ হয়,

,, ,, a, b, c সমান্তর-শ্রেণীতে থাকে।

উদা. 12. প্রমাণ কর যে, কোন ত্রিভুজের দুই কোণের cosine-এর অনুপাত কোণদ্বয়ের বিপরীত বাহুদ্বয়ের অনুপাতের সমান হইলে, ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু।

[C. U. 1924]

প্রশ্নানুসারে, $\dfrac{\cos A}{\cos B} = \dfrac{a}{b} = \dfrac{\sin A}{\sin B};$

$\therefore$ $\sin A \cos B = \cos A \sin B$,

বা, $\sin A \cos B - \cos A \sin B = 0$,

বা, $\sin (A - B) = 0$; $\therefore$ $A - B = 0$, বা, $A = B$;

$\therefore$ ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু।

প্রশ্নমালা 10

1. যদি $a = 3, b = 3\sqrt{3}$ এবং $A = 30°$ হয় ; B-এর মান নির্ণয় কর।

2. যদি $a = 20, b = 10, C = 60°$ হয় ; A, B, c-এর পরিমাণ নির্ণয় কর।

3. কোন ত্রিভুজের বাহুগুলি 340, 266 এবং 185 হইলে, বৃহত্তম কোণের অর্ধেকের tangent নির্ণয় কর।

4. কোন ত্রিভুজের বাহুগুলি 3, 5, 7 হইলে, উহার বৃহত্তম কোণের sin নির্ণয় কর।

5. ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর, যখন

(i) $a = 12, b = 35, c = 37$;

(ii) $a : b : c = 2 : 3 : 4$ এবং $s = 18$.

প্রমাণ কর যে, যে-কোন ত্রিভুজে,

6. $a(\sin B - \sin C) + b(\sin C - \sin A) + c(\sin A - \sin B) = 0.$

7. $(b + c) \cos A + (c + a) \cos B + (a + b) \cos C = a + b + c.$

8. $a \sin A - b \sin B = c \sin (A - B).$

9. $a \sin \frac{B - C}{2} = (b - c) \cos \frac{A}{2}.$

10. $(b + c) \cos \frac{B + C}{2} = a \cos \frac{B - C}{2}.$

11. $a \sin (B - C) + b \sin (C - A) + c \sin (A - B) = 0.$

12. $(b^2 + c^2 - a^2) \tan A = (c^2 + a^2 - b^2) \tan B$
$= (a^2 + b^2 - c^2) \tan C.$

13. $b \cos B + c \cos C = a \cos (B - C).$

14. $a \cos A + b \cos B + c \cos C = 4R \sin A \sin B \sin C.$

15. $a \cos (B - C) + b \cos (C - A) + c \cos (A - B)$
$= 8R \sin A \sin B \sin C.$

16. $\frac{\sin (A - B)}{\sin (A + B)} = \frac{a^2 - b^2}{c^2}.$

17. $\dfrac{c\sin(A-B)}{a^2-b^2}=\dfrac{a\sin(B-C)}{b^2-c^2}=\dfrac{b\sin(C-A)}{c^2-a^2}.$

18. $b\cos^2\dfrac{C}{2}+c\cos^2\dfrac{B}{2}=c\cos^2\dfrac{A}{2}+a\cos^2\dfrac{C}{2}$
$=a\cos^2\dfrac{B}{2}+b\cos^2\dfrac{A}{2}.$

19. $c^2=(a-b)^2\cos^2\dfrac{C}{2}+(a+b)^2\sin^2\dfrac{C}{2}.$

20. $(s-a)\tan\dfrac{A}{2}=(s-b)\tan\dfrac{B}{2}=(s-c)\tan\dfrac{C}{2}.$

21. $\dfrac{b-c}{a}\cos^2\dfrac{A}{2}+\dfrac{c-a}{b}\cos^2\dfrac{B}{2}+\dfrac{a-b}{c}\cos^2\dfrac{C}{2}=0.$

22. $\tan A=\dfrac{a\sin C}{b-a\cos C}.$

23. $(b^2-c^2)\cot A+(c^2-a^2)\cot B+(a^2-b^2)\cot C=0.$

24. $(b+c-a)\tan\dfrac{A}{2}=(c+a-b)\tan\dfrac{B}{2}=(a+b-c)\tan\dfrac{C}{2}.$

25. $a^2(\sin^2B-\sin^2C)+b^2(\sin^2C-\sin^2A)$
$+c^2(\sin^2A-\sin^2B)=0.$

26. $a^2(\cos^2B-\cos^2C)+b^2(\cos^2C-\cos^2A)$
$+c^2(\cos^2A-\cos^2B)=0.$

27. $\dfrac{a^2\sin(B-C)}{\sin A}+\dfrac{b^2\sin(C-A)}{\sin B}+\dfrac{c^2\sin(A-B)}{\sin C}=0.$

28. $\dfrac{b^2-c^2}{a^2}\sin 2A+\dfrac{c^2-a^2}{b^2}\sin 2B+\dfrac{a^2-b^2}{c^2}\sin 2C=0.$

[C. U. 1912]

29. $\dfrac{a^2\sin(B-C)}{\sin B+\sin C}+\dfrac{b^2\sin(C-A)}{\sin C+\sin A}+\dfrac{c^2\sin(A-B)}{\sin A+\sin B}=0.$

[B. H. U. 1945]

30. $a^3\cos(B-C)+b^3\cos(C-A)+c^3\cos(A-B)=3abc.$

[Pat. U. 1939]

31. $1-\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{B}{2}=\dfrac{2c}{a+b+c}.$

32. $\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{B-C}{2}=\dfrac{b-c}{b+c}.$

33. $a^2+b^2-2ab\cos\left(C+\frac{\pi}{3}\right)=b^2+c^2-2bc\cos\left(A+\frac{\pi}{3}\right)$
$=c^2+a^2-2ca\cos\left(B+\frac{\pi}{3}\right).$

34. $\dfrac{c}{\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}}=\dfrac{ab\sin C}{a+b+c}.$

35. যদি $\cos B=\dfrac{\sin A}{2\sin C}$ হয়, দেখাও যে, ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু।

[B. H. U. 1944]

36. কোন ত্রিভুজে, $C=60°$ হইলে, প্রমাণ কর যে,
$2a-b=2c\cos B.$ [B. H. U. 1949]

37. যদি একটি ত্রিভুজের দুইটি কোণের cosine তাহাদের বিপরীত বাহুদ্বয়ের সহিত ব্যস্ত অনুপাতে থাকে, দেখাও যে, ত্রিভুজটি হয় সমদ্বিবাহু নতুবা সমকোণী।

[C. U. 1923]

38. যদি $(a^2+b^2)\sin(A-B)=(a^2-b^2)\sin(A+B)$ হয়, দেখাও যে, ত্রিভুজটি হয় সমদ্বিবাহু নতুবা সমকোণী।

39. যদি কোন ত্রিভুজে a^2, b^2, c^2 সমান্তর-শ্রেণীভুক্ত হয়, প্রমাণ কর যে, $\cot A$, $\cot B$, $\cot C$ সমান্তর-শ্রেণীভুক্ত। [A. U. 1943]

40. যদি কোন ত্রিভুজে $\tan\frac{A}{2}$, $\tan\frac{B}{2}$, $\tan\frac{C}{2}$ সমান্তর-শ্রেণীভুক্ত হয়, প্রমাণ কর যে, $\cos A$, $\cos B$, $\cos C$ সমান্তর শ্রেণীভুক্ত।

41. যদি $a=2c$ এবং $A=3C$ হয়, ত্রিভুজটির কোণগুলির পরিমাণ নির্ণয় কর।

42. যদি $a^4+b^4+c^4=2b^2(a^2+c^2)-c^2a^2$ হয়, প্রমাণ কর যে,
$B=60°$ বা $120°$.

প্রমাণ কর যে, যে-কোন ত্রিভুজে,

43. (i) $bc\cos^2\frac{A}{2}+ca\cos^2\frac{B}{2}+ab\cos^2\frac{C}{2}=s^2$;

(ii) $4\triangle=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{\cot A+\cot B+\cot C}$;

(iii) $4\triangle=a^2\cot A+b^2\cot B+c^2\cot C.$

44. যদি $\dfrac{1}{a+c}+\dfrac{1}{b+c}=\dfrac{3}{a+b+c}$ হয়, দেখাও যে, $C=60°$.

45. একটি ত্রিভুজের কোণগুলি $\frac{\pi}{7}$, $\frac{2\pi}{7}$, $\frac{4\pi}{7}$ হইলে, প্রমাণ কর যে,
$bc=c^2-a^2,\ ca=b^2-a^2,\ ab=c^2-b^2.$

9·12. ত্রিভুজের পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধ (Radius of the circumscribing circle of a triangle)

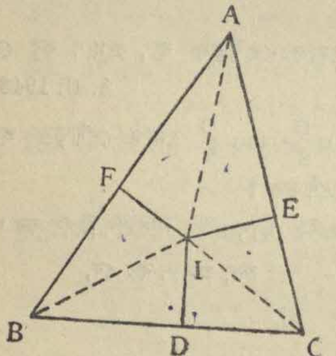
ABC ত্রিভুজের পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধ R হইলে, অনু. 9·2 হইতে দেখা যায়,

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R;$$

$$\therefore \quad R=\frac{a}{2\sin A}=\frac{abc}{2bc\sin A}=\frac{abc}{4\Delta}.$$

9·13. ত্রিভুজের অন্তর্বৃত্ত (In-circle)।

ত্রিভুজের অভ্যন্তরে সম্পূর্ণরূপে অবস্থিত এবং উহার বাহু-তিনটিকে স্পর্শ করে এইরূপ বৃত্তকে ঐ ত্রিভুজের অন্তর্বৃত্ত বা অন্তর্লিখিত বৃত্ত (In-circle বা Inscribed circle) বলে। ত্রিভুজের যে-কোন দুই কোণের অন্তঃসমদ্বিখণ্ডকদ্বয়ের ছেদবিন্দু এই বৃত্তের কেন্দ্র। এই কেন্দ্রকে অন্তঃকেন্দ্র (In-centre) বলে এবং ইহাকে সাধারণতঃ I দ্বারা সূচিত করা হয়। স্পষ্টই এই কেন্দ্র হইতে ত্রিভুজটির যে-কোন বাহুর উপর অঙ্কিত লম্ব, ত্রিভুজটির অন্তর্ব্যাসার্ধ। অন্তর্ব্যাসার্ধকে r দ্বারা সূচিত করা হয়।



9·14. ত্রিভুজের অন্তর্ব্যাসার্ধ।

মনে কর, I এবং r যথাক্রমে ABC ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র এবং অন্তঃব্যাসার্ধ। I হইতে ID, IE, IF, যথাক্রমে BC, CA ও AB-এর উপর তিনটি লম্ব টানা হইল। AI, BI, CI যুক্ত কর।

তাহা হইলে, $ID=IE=IF=r$.

$$\Delta ABC=\Delta IBC+\Delta ICA+\Delta IAB$$
$$=\tfrac{1}{2}BC.ID+\tfrac{1}{2}CA.IE+\tfrac{1}{2}AB.IF$$
$$=\tfrac{1}{2}ar+\tfrac{1}{2}br+\tfrac{1}{2}cr$$
$$=\tfrac{1}{2}r(a+b+c)=rs.$$

$$\therefore \quad \Delta=rs;$$

$$\therefore \quad r=\frac{\Delta}{s} \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (i)$$

আবার, IBD ত্রিভুজে, $BD = r \cot \frac{B}{2}$,

এবং ICD ত্রিভুজে, $DC = r \cot \frac{C}{2}$,

$$\therefore \quad a = BC = BD + DC$$
$$= r \cot \frac{B}{2} + r \cot \frac{C}{2}$$
$$= r\left(\cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2}\right)$$
$$= r\left(\frac{\cos \frac{B}{2}}{\sin \frac{B}{2}} + \frac{\cos \frac{C}{2}}{\sin \frac{C}{2}}\right)$$
$$= r\left(\frac{\cos \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} + \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}}{\sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}\right)$$
$$= r\frac{\sin\left(\frac{B}{2} + \frac{C}{2}\right)}{\sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}} = r\frac{\cos \frac{A}{2}}{\sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}},$$

$$\left[\because \quad \frac{A}{2} + \frac{B}{2} + \frac{C}{2} = \frac{\pi}{2}; \quad \therefore \sin\left(\frac{B}{2} + \frac{C}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}\right) = \cos \frac{A}{2}.\right]$$

$$\therefore \quad r = \frac{a \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}{\cos \frac{A}{2}} = a \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \sec \frac{A}{2}.$$

কিন্তু, $a = 2R \sin A = 4R \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}$,

$$\therefore \quad \mathbf{r = 4R \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}. \quad \cdots \quad \cdots \quad \text{(ii)}$$

আবার, চিত্র হইতে,

AF = AE, BD = BF এবং CD = CE ;

কিন্তু, $(AF + BD + CD) + (AE + BF + CE)$

$$= (AF + BF) + (BD + CD) + (AE + CE)$$
$$= AB + BC + CA = 2s.$$

$$\therefore \quad AF + BD + CD = AE + BF + CE = \frac{2s}{2} = s,$$

বা, $AF + a = s$; $\therefore$ $AF = s - a$.

এইরূপে, $BF = s - b$ এবং $CE = s - c$.

এখন, AIF ত্রিভুজে, $IF = AF \tan \angle IAF$,

$$\left.\begin{aligned} \text{বা,} \quad & r = (s-a) \tan \frac{A}{2}, \\ \text{এইরূপে,} \quad & r = (s-b) \tan \frac{B}{2}, \\ & r = (s-c) \tan \frac{C}{2}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad \ldots \quad \text{(iii)}$$

9·15. অন্তঃকেন্দ্র হইতে কৌণিক বিন্দুসমূহের দূরত্ব।

IA, IB, IC, অন্তঃকেন্দ্র হইতে কৌণিক বিন্দুত্রয়ের দূরত্ব।

$\triangle$ IAF হইতে, $IA = IF \operatorname{cosec} \angle IAF$

$$= r \operatorname{cosec} \frac{A}{2}.$$

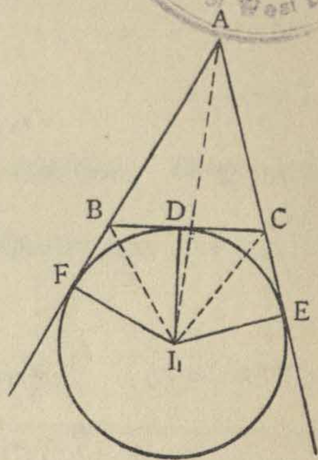
অনুরূপে, $IB = r \operatorname{cosec} \frac{B}{2}$, $IC = r \operatorname{cosec} \frac{C}{2}$.

9·16. বহির্বৃত্ত (Ex-circle)।

ত্রিভুজের যে-কোন এক বাহুকে এবং বর্ধিত অপর দুই বাহুকে যে বৃত্ত স্পর্শ করে, সেই বৃত্তকে ঐ ত্রিভুজের **বহির্বৃত্ত** (Ex-circle বা Escribed circle) বলে। স্পষ্টই প্রত্যেক ত্রিভুজের তিনটি বহির্বৃত্ত থাকে। ত্রিভুজের যে-কোন এক কোণের অন্তঃসমদ্বিখণ্ডক এবং অপর কোণদ্বয়ের যে-কোন একটির বহিঃসমদ্বিখণ্ডকের ছেদবিন্দু অথবা যে-কোন দুই কোণের বহিঃসমদ্বিখণ্ডকদ্বয়ের ছেদবিন্দু বহির্বৃত্তের কেন্দ্র (ex-centre), বা, বহিঃকেন্দ্র এবং বহিঃকেন্দ্র হইতে ত্রিভুজের বাহুসমূহের উপর পাতিত লম্বই বহির্ব্যাসার্ধ (ex-radius)।

9·17. বহির্ব্যাসার্ধসমূহ নির্ণয়।

(to find the ex-radii of a triangle.)



মনে কর, ABC ত্রিভুজের BC বাহুকে এবং বর্ধিত AB ও AC বাহুকে যে বহির্বৃত্তটি স্পর্শ করিয়াছে তাহার, অর্থাৎ A কোণের বিপরীত বহির্বৃত্তটির কেন্দ্র I_1 এবং ব্যাসার্ধ r_1. I_1 হইতে BC-এর উপর এবং বর্ধিত AC ও AB-এর উপর যথাক্রমে I_1D, I_1E, I_1F লম্ব অঙ্কিত কর।

এখন, $I_1D = I_1E = I_1F = r_1$. AI_1, BI_1 এবং CI_1 যুক্ত কর।

$$\triangle ABC = \triangle I_1AB + \triangle I_1AC - \triangle I_1BC$$
$$= \tfrac{1}{2}AB.I_1F + \tfrac{1}{2}AC.I_1E - \tfrac{1}{2}BC.I_1D$$
$$= \tfrac{1}{2}cr_1 + \tfrac{1}{2}br_1 - \tfrac{1}{2}ar_1$$
$$= \tfrac{1}{2}(b+c-a)r_1$$
$$= \tfrac{1}{2}(b+c+a-2a)r_1$$
$$= \tfrac{1}{2}(2s-2a)r_1 = (s-a)r_1.$$

$$\therefore \quad \mathbf{r_1 = \frac{\Delta}{s-a}}.$$

এইরূপে, r_2, r_3 যথাক্রমে B এবং C কোণের বিপরীত বহির্বৃত্তদ্বয়ের ব্যাসার্ধ হইলে,

$$\mathbf{r_2 = \frac{\Delta}{s-b}} \text{ এবং } \mathbf{r_3 = \frac{\Delta}{s-c}}. \quad \cdots \quad (1)$$

আবার, I_1BD ত্রিভুজে, $\angle I_1BD = \frac{1}{2}\angle DBF$
$= \frac{1}{2}(180^\circ - \angle B) = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle B.$

$$\therefore \quad BD = I_1D \cot I_1BD = I_1D \cot(90^\circ - \tfrac{1}{2}\angle B) = I_1D \tan\frac{B}{2}$$
$$= r_1 \tan\frac{B}{2}.$$

এইরূপে, I_1CD ত্রিভুজে, $CD = I_1D \tan\frac{C}{2} = r_1 \tan\frac{C}{2}$.

$$\therefore \quad a = BC = BD + CD = r_1 \tan\frac{B}{2} + r_1 \tan\frac{C}{2}$$
$$= r_1\left(\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2}\right)$$

$$= r_1 \left(\frac{\sin \frac{B}{2}}{\cos \frac{B}{2}} + \frac{\sin \frac{C}{2}}{\cos \frac{C}{2}} \right)$$

$$= r_1 \left(\frac{\sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} + \cos \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}{\cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}} \right)$$

$$= r_1 \frac{\sin\left(\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C\right)}{\cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}}$$

$$= r_1 \frac{\cos \frac{1}{2}A}{\cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}}$$

$$\left[\because \sin\left(\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C\right) = \sin\left(90° - \frac{A}{2}\right) = \cos \frac{A}{2} \cdot \right]$$

$\therefore \quad r_1 = a \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \sec \frac{A}{2} \cdot$

ইহাতে $a = 2R \sin A = 4R \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}$ বসাইয়া,

$$\left. \begin{aligned} & \mathbf{r_1 = 4R \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}} ; \\ \text{এইরূপে,} \quad & \mathbf{r_2 = 4R \sin \frac{B}{2} \cos \frac{A}{2} \cos \frac{C}{2}} ; \\ \text{এবং} \quad & \mathbf{r_3 = 4R \sin \frac{C}{2} \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2}} \cdot \end{aligned} \right\} \quad \cdots \quad (2)$$

আবার, $AE = AC + CE = b + CD$, $\quad [\because \quad CE = CD]$

এবং $AF = AB + BF = c + BD$; $\quad [\because \quad BF = BD.]$

কিন্তু $AE = AF$;

$\therefore$ যোগ করিয়া, $2AE = b + c + CD + BD = b + c + BC$

$$= b + c + a = 2s ;$$

$$\therefore \quad AE = s.$$

এখন, AI_1E ত্রিভুজে, $I_1E = AE \tan I_1AE$;

$$\left.\begin{aligned} \therefore\quad & r_1 = s\tan\frac{A}{2}\,; \\ \text{এইরূপে,}\quad & r_2 = s\tan\frac{B}{2}, \\ \text{এবং}\quad & r_3 = s\tan\frac{C}{2}. \end{aligned}\right\} \quad \cdots \quad \cdots \quad (3)$$

9·18. বহিঃকেন্দ্র হইতে কৌণিক বিন্দুসমূহের দূরত্ব।

I_1A, I_1B, I_1C বহিঃকেন্দ্র I_1 হইতে কৌণিক বিন্দুসমূহের দূরত্ব। $\triangle I_1AF$ হইতে, $\frac{I_1A}{I_1F} = \operatorname{cosec}\frac{A}{2}$;

$$\therefore\quad I_1A = r_1 \operatorname{cosec}\frac{A}{2} = 4R\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}. \qquad [\text{ (2)-এর সাহায্যে }]$$

$\triangle I_1BF$ হইতে, $\frac{I_1B}{I_1F} = \operatorname{cosec}\left(90^\circ - \frac{B}{2}\right) = \sec\frac{B}{2}$;

$$\therefore\quad I_1B = r_1 \sec\frac{B}{2}\,;$$

এইরূপে, $I_1C = r_1 \sec\frac{C}{2}$.

অনুরূপ প্রণালীতে I_2 এবং I_3 হইতে কৌণিক বিন্দুসমূহের দূরত্ব নির্ণয় করা যায়।

উদা. 1. প্রমাণ কর যে, $s(s-a)\tan\frac{A}{2} = \triangle$.

$$r = (s-a)\tan\frac{A}{2}.$$

$$\therefore\quad s(s-a)\tan\frac{A}{2} = sr = \tfrac{1}{2}(a+b+c)r$$
$$= \tfrac{1}{2}ar + \tfrac{1}{2}br + \tfrac{1}{2}cr = \triangle.$$

উদা. 2. প্রমাণ কর যে, ABC ত্রিভুজে,

$$4Rrs = abc.$$

$$R = \frac{abc}{4\triangle} \text{ এবং } r = \frac{\triangle}{s}.$$

$$\therefore\quad 4Rrs = 4\cdot\frac{abc}{4\triangle}\cdot\frac{\triangle}{s}\times s = abc.$$

উদা. 3. প্রমাণ কর যে, $s = 4\text{R}\cos\frac{\text{A}}{2}\cos\frac{\text{B}}{2}\cos\frac{\text{C}}{2}$.

দক্ষিণ পক্ষ $= 4\text{R}\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}\sqrt{\frac{s(s-b)}{ca}}\sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}$

$$= \frac{4\text{R}s}{abc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$= \frac{4\text{R}s}{abc}\cdot\triangle = 4\cdot\frac{abc}{4\triangle}\cdot\frac{s}{abc}\cdot\triangle$$

$$= s.$$

উদা. 4. প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}=\frac{1}{r}$.

বাম পক্ষ $= \frac{s-a}{\triangle}+\frac{s-b}{\triangle}+\frac{s-c}{\triangle}$

$$= \frac{3s-(a+b+c)}{\triangle} = \frac{s}{\triangle} = \frac{1}{r}.$$

উদা. 5. প্রমাণ কর যে, যে-কোন ত্রিভুজে,

$rr_1r_2r_3 = \triangle^2$ এবং $s^2 = r_1r_2 + r_2r_3 + r_3r_1$.

[C. U., B.Sc., 1954]

$$rr_1r_2r_3 = \frac{\triangle}{s}\cdot\frac{\triangle}{s-a}\cdot\frac{\triangle}{s-b}\cdot\frac{\triangle}{s-c}$$

$$= \triangle^2\frac{\triangle^2}{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \triangle^2\cdot\frac{\triangle^2}{\triangle^2} = \triangle^2.$$

$r_1r_2 + r_2r_3 + r_3r_1$

$$= \frac{\triangle}{s-a}\cdot\frac{\triangle}{s-b} + \frac{\triangle}{s-b}\cdot\frac{\triangle}{s-c} + \frac{\triangle}{s-c}\cdot\frac{\triangle}{s-a}$$

$$= \triangle^2\left\{\frac{1}{(s-a)(s-b)} + \frac{1}{(s-b)(s-c)} + \frac{1}{(s-c)(s-a)}\right\}$$

$$= s(s-a)(s-b)(s-c)$$

$$\times\left\{\frac{1}{(s-a)(s-b)} + \frac{1}{(s-b)(s-c)} + \frac{1}{(s-c)(s-a)}\right\}$$

$$= s(s-c) + s(s-a) + s(s-b)$$

$$= s(s-c+s-a+s-b)$$

$$= s\{3s-(a+b+c)\} = s(3s-2s) = s.s = s^2.$$

উদা. 6. প্রমাণ কর যে, যে-কোন ত্রিভুজে,

$$\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}+\frac{1}{ab}=\frac{1}{2Rr}.$$ [B. H. U. 1948, '56]

বাম পক্ষ $=\frac{a+b+c}{abc}=\frac{2s}{abc}=\frac{2s}{4\triangle R}$ $\left[\because \; R=\frac{abc}{4\triangle}\right]$

$=\frac{s}{2R\triangle}=\frac{1}{2R\cdot\frac{\triangle}{s}}=\frac{1}{2Rr}.$ $\left[\because \; R=\frac{\triangle}{s}\right]$

উদা. 7. প্রমাণ কর যে, $\cos A+\cos B+\cos C=1+\frac{r}{R}.$

$A+B+C=\pi$;

$\therefore \quad \cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$

এখন, $r=4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2},$

বা, $\frac{r}{R}=4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2};$

$\therefore \quad \cos A+\cos B+\cos C=1+\frac{r}{R}.$

উদা. 8. প্রমাণ কর যে, $r_1+r_2+r_3-r=4R.$

বামপক্ষ $=\frac{\triangle}{s-a}+\frac{\triangle}{s-b}+\frac{\triangle}{s-c}-\frac{\triangle}{s}$

$=\triangle\left[\frac{1}{s-a}+\frac{1}{s-b}+\frac{1}{s-c}-\frac{1}{s}\right]$

$=\triangle\cdot\frac{s(s-b)(s-c)+s(s-c)(s-a)+s(s-a)(s-b)-(s-a)(s-b)(s-c)}{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$=\triangle\cdot\frac{2s^3-(a+b+c)s^2+abc}{\triangle^2}$

$=\triangle\cdot\frac{2s^3-2s.s^2+abc}{\triangle^2}$

$=\frac{abc}{\triangle}=4R.$

উদা. 9. প্রমাণ কর যে, $(r_1-r)(r_2-r)(r_3-r)=4Rr^2.$

[A. U., 1949]

$$\text{বাম পক্ষ} = \left(\frac{\Delta}{s-a} - \frac{\Delta}{s}\right)\left(\frac{\Delta}{s-b} - \frac{\Delta}{s}\right)\left(\frac{\Delta}{s-c} - \frac{\Delta}{s}\right)$$

$$= \Delta^3\left(\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s}\right)\left(\frac{1}{s-b} - \frac{1}{s}\right)\left(\frac{1}{s-c} - \frac{1}{s}\right)$$

$$= \Delta^3 \cdot \frac{a}{s(s-a)} \cdot \frac{b}{s(s-b)} \cdot \frac{c}{s(s-c)}$$

$$= \frac{\Delta^3 abc}{s^2 \Delta^2} = \frac{\Delta abc}{s^2}$$

$$= \frac{abc}{4\Delta} \cdot \frac{4\Delta^2}{s^2} = \mathrm{R}.4\left(\frac{\Delta}{s}\right)^2 \quad \left[\because \frac{abc}{4\Delta} = \mathrm{R}\right]$$

$$= 4\mathrm{R}r^2.$$

উদা. 10. প্রমাণ কর যে, $a \cot \mathrm{A} + b \cot \mathrm{B} + c \cot \mathrm{C} = 2(\mathrm{R} + r)$.

$$\text{বাম পক্ষ} = a \cdot \frac{\cos \mathrm{A}}{\sin \mathrm{A}} + b \cdot \frac{\cos \mathrm{B}}{\sin \mathrm{B}} + c \cdot \frac{\cos \mathrm{C}}{\sin \mathrm{C}}$$

$$= \frac{a}{\sin \mathrm{A}} \cdot \cos \mathrm{A} + \frac{b}{\sin \mathrm{B}} \cdot \cos \mathrm{B} + \frac{c}{\sin \mathrm{C}} \cdot \cos \mathrm{C}$$

$$= 2\mathrm{R} \cos \mathrm{A} + 2\mathrm{R} \cos \mathrm{B} + 2\mathrm{R} \cos \mathrm{C}$$

$$= 2\mathrm{R}(\cos \mathrm{A} + \cos \mathrm{B} + \cos \mathrm{C}) = 2\mathrm{R}\left(1 + \frac{r}{\mathrm{R}}\right). \quad [\text{উদা. 7 হইতে}]$$

উদা. 11. প্রমাণ কর যে,

$$\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}\right)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_2}\right)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_3}\right) = \frac{4\mathrm{R}}{r^2 s^2} = \frac{16\,\mathrm{R}}{r^2(a+b+c)^2}.$$

[A. U., 1938]

$$\text{বাম পক্ষ} = \left(\frac{s}{\Delta} - \frac{s-a}{\Delta}\right)\left(\frac{s}{\Delta} - \frac{s-b}{\Delta}\right)\left(\frac{s}{\Delta} - \frac{s-c}{\Delta}\right)$$

$$= \frac{a}{\Delta} \cdot \frac{b}{\Delta} \cdot \frac{c}{\Delta} = \frac{abc}{\Delta^3} = \frac{abc}{\Delta} \cdot \frac{1}{\Delta^2}$$

$$= 4\mathrm{R} \cdot \frac{1}{r^2 s^2} \quad \left[\because \mathrm{R} = \frac{abc}{4\Delta} \text{ এবং } \frac{\Delta}{s} = r\right]$$

$$= \frac{4\mathrm{R}}{r^2 s^2} = \frac{4.4\mathrm{R}}{4r^2 s^2} = \frac{16\mathrm{R}}{r^2(2s)^2} = \frac{16\mathrm{R}}{r^2(a+b+c)^2}.$$

উদা. 12. যদি $8\mathrm{R}^2 = a^2 + b^2 + c^2$ হয়, প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজটি সমকোণী।

$$a = 2\mathrm{R} \sin \mathrm{A}, \ b = 2\mathrm{R} \sin \mathrm{B}, \ c = 2\mathrm{R} \sin \mathrm{C};$$

$$\therefore \quad 8\mathrm{R}^2 = 4\mathrm{R}^2 (\sin^2 \mathrm{A} + \sin^2 \mathrm{B} + \sin^2 \mathrm{C})$$

$$= 4\mathrm{R}^2.(2 + 2 \cos \mathrm{A} \cos \mathrm{B} \cos \mathrm{C}),$$

$\therefore \quad 2 = 2 + 2\cos A \cos B \cos C;$

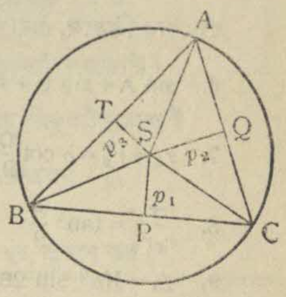
$\therefore$ $\cos A \cos B \cos C = 0$; $\cos A, \cos B$ অথবা $\cos C = 0$;

$\therefore$ A, অথবা B, অথবা $C = 90°$.

অতএব, ত্রিভুজটি সমকোণী।

উদা. 13. ABC ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র হইতে BC, CA এবং AB বাহুর উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে p_1, p_2, p_3 হইলে, দেখাও যে,

$$\frac{a}{p_1}+\frac{b}{p_2}+\frac{c}{p_3}=\frac{abc}{4p_1p_2p_3}.$$



চিত্রে S পরিকেন্দ্র, SP, SQ, ST বাহুত্রয়ের উপর লম্ব। তাহা হইলে,

$SP = p_1$, $SQ = p_2$, $ST = p_3$,

এবং $\angle BSC = 2A$, বলিয়া,

$\angle BSP = \angle A$,

এবং এইরূপে,

$\angle CSQ = \angle B$ ও $\angle AST = \angle C$.

স্পষ্টই, $p_1 = R\cos A,\ p_2 = R\cos B,\ p_3 = R\cos C$ .... (1)

এবং $\tan A = \dfrac{a}{2p_1},\ \tan B = \dfrac{b}{2p_2},\ \tan C = \dfrac{c}{2p_3}.$ ... (2)

$$\therefore \quad \frac{a}{p_1}+\frac{b}{p_2}+\frac{c}{p_3}=\frac{a}{R\cos A}+\frac{b}{R\cos B}+\frac{c}{R\cos C} \quad [(1) \text{ হইতে}]$$

$$=\frac{2R\sin A}{R\cos A}+\frac{2R\sin B}{R\cos B}+\frac{2R\sin C}{R\cos C}$$

$$=2(\tan A+\tan B+\tan C)$$

$$=2\tan A.\tan B.\tan C$$

[$A+B+C=\pi$ বলিয়া ;

$$=2\cdot\frac{a}{2p_1}\cdot\frac{b}{2p_2}\cdot\frac{c}{2p_3} \quad [(2) \text{ হইতে}]$$

$$=\frac{abc}{4p_1p_2p_3}.$$

প্রশ্নমালা 11

1. ABC ত্রিভুজে, $AB = 1400$ মিটার, $AC = 1300$ মিটার এবং $\angle A = 60°$; ইহার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

2. একটি ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল 6 বর্গ-কিলোমিটার এবং দুইটি বাহু 3 কিলোমিটার এবং 5 কিলোমিটার ; অপর বাহুটি নির্ণয় কর।

3. ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল 24 বর্গ-মিটার এবং $a:b:c=3:4:5$; বাহুগুলি নির্ণয় কর।

4. যে ত্রিভুজের বাহুগুলি 4, 5 এবং 7, সেই ত্রিভুজের অন্তর্বৃত্তের ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।

5. একটি ত্রিভুজের বাহুগুলি 5 সেমি., 8 সেমি. এবং 5 সেমি.। প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজটির দুইটি বহির্বৃত্ত সমান। [C. U., 1918]

যে-কোন ত্রিভুজে, প্রমাণ কর যে:

6. $\sin A+\sin B+\sin C=\dfrac{s}{R}\cdot$

7. $r_1+r_2=c\cot\dfrac{C}{2}\cdot$ [A. U., 1946]

8. $\dfrac{rr_1}{r_2r_3}=\tan^2\dfrac{A}{2}\cdot$ [A. U., 1947]

9. $\triangle=\frac{1}{4}(a^2\sin 2B+b^2\sin 2A)$.

10. $\triangle=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{4\cot A}\cdot$ 11. $\triangle rr_1\cot\dfrac{A}{2}\cdot$

12. $\triangle=4Rr\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}\cdot$

13. $\dfrac{\triangle}{R^2}=2\sin A\sin B\sin C$.

14. $\cot A+\cot B+\cot C=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{4\triangle}\cdot$

15. $\dfrac{b-c}{r_1}+\dfrac{c-a}{r_2}+\dfrac{a-b}{r_3}=0$.

16. $s=4R\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}\cdot$

17. $\triangle=r^2\cot\dfrac{A}{2}\cot\dfrac{B}{2}\cot\dfrac{C}{2}\cdot$

18. $a\cos A+b\cos B+c\cos C=\dfrac{2\triangle}{R}\cdot$

19. $a\cos B\cos C+b\cos C\cos A+c\cos A\cos B=\dfrac{\triangle}{R}\cdot$

20. $\dfrac{1}{bc}+\dfrac{1}{ca}+\dfrac{1}{ab}=\dfrac{1}{2Rr}\cdot$

21. $\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}\right)^2=\frac{4}{r}\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}\right)$.

22. $4R=\frac{(r_2+r_3)(r_3+r_1)(r_1+r_2)}{r_2r_3+r_3r_1+r_1r_2}$.

23. $r_1(r_2+r_3)\operatorname{cosec} A=r_2(r_3+r_1)\operatorname{cosec} B=r_3(r_1+r_2)\operatorname{cosec} C$.

24. $\frac{\cos A}{a}+\frac{\cos B}{b}+\frac{\cos C}{c}=\frac{a\sin A+b\sin B+c\sin C}{4\Delta}$.

25. যদি $r_1=r_2+r_3+r$ হয়, প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজটি সমকোণী।

26. যদি $\left(1-\frac{r_1}{r_2}\right)\left(1-\frac{r_1}{r_3}\right)=2$ হয়, প্রমাণ কর যে ত্রিভুজটি সমকোণী।

27. যে-কোন ত্রিভুজে, প্রমাণ কর যে, অন্তর্বৃত্তের ক্ষেত্রফল : Δ

$$=\pi : \cot\tfrac{1}{2}A\cot\tfrac{1}{2}B\cot\tfrac{1}{2}C.$$

28. যদি x, y, z একটি ত্রিভুজের তিনটি উচ্চতা হয়, প্রমাণ কর যে,

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}.$$

29. ABC ত্রিভুজের লম্ব-বিন্দু হইতে A, B, C শীর্ষবিন্দুত্রয়ের দূরত্ব যথাক্রমে x, y এবং z হইলে, দেখাও যে,

$$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=\frac{abc}{xyz}.$$

30. ABC ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র হইতে A, B, C শীর্ষবিন্দুত্রয়ের দূরত্ব যথাক্রমে x, y এবং z হইলে, প্রমাণ কর যে,

$$rabc=sxyz.$$

31. অন্তর্বৃত্তের ক্ষেত্রফল Δ এবং বহির্বৃত্তগুলির ক্ষেত্রফল $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ হইলে, প্রমাণ কর যে,

$$\frac{1}{\sqrt{\Delta}}=\frac{1}{\sqrt{\Delta_1}}+\frac{1}{\sqrt{\Delta_2}}+\frac{1}{\sqrt{\Delta_3}}.$$

32. ABC ত্রিভুজের A শীর্ষবিন্দুগামী যে বৃত্ত BC-এর মধ্যবিন্দুতে BC-কে স্পর্শ করে, তাহার ব্যাসার্ধ $\frac{2(b^2+c^2)-a^2}{8b\sin C}$.

দশম অধ্যায়

ত্রিভুজের সমাধান

(Solution of Triangles)

10·1. লগারিদ্‌ম ও ত্রৈকোণমিতিক তালিকা।

ত্রিভুজের সমাধান করিতে হইলে লগারিদ্‌ম তালিকার ব্যবহার অপরিহার্য। সেইজন্য ঐ সকল তালিকা ব্যবহারের নিয়মাবলী প্রথমে আলোচিত হইতেছে।

Table I. সাধারণ লগ-তালিকা—এই তালিকায় 10 হইতে 10000 পর্যন্ত সংখ্যার লগারিদ্‌ম দেওয়া আছে। ব্যবহারের নিয়ম বীজগণিতে আলোচিত হইয়াছে।

Table II. অ্যান্টি-লগারিদ্‌ম-তালিকা—এই তালিকার সাহায্যে প্রদত্ত লগারিদ্‌ম হইতে উহা কোন্ সংখ্যার লগারিদ্‌ম তাহা নির্ণয় করা যায়। এই তালিকার ব্যবহারও বীজগণিতে আলোচিত হইয়াছে।

Table III. Natural Sines and Cosines Table—এই তালিকায় $1'$ অন্তর, $0°$ হইতে আরম্ভ করিয়া $90°$ পর্যন্ত কোণসমূহের sine এবং cosine উভয়ই দেওয়া আছে। লক্ষণীয়, একই তালিকায় sine এবং cosine উভয়ই দেওয়া আছে। Sine-এর কোণগুলি উপরের বামদিক্ হইতে ক্রমে ডানদিকে এবং নীচের দিকে বাড়িয়া গিয়াছে, আর cosine-এর কোণগুলি নীচের ডানদিক্ হইতে আরম্ভ হইয়া উপরের বামদিকে বাড়িয়া গিয়াছে। তালিকার উপরে লেখা আছে Natural sines এবং নীচে লেখা আছে Natural cosines. তালিকার প্রধান অংশে $10'$ অন্তর অন্তর কোণের sine এবং cosine দেওয়া আছে। পার্শ্বের Mean difference (গড় পার্থক্য) অংশের সাহায্যে $1'$ অন্তর অন্তর কোণের sine এবং cosine পাওয়া যায়। তালিকা দেখিবার সময়ে মনে রাখিতে হইবে, কোণ $0°$ হইতে $90°$ পর্যন্ত বাড়িয়া চলিলে sine-এর মান ক্রমশঃই বাড়ে, কিন্তু cosine-এর মান ক্রমশঃই কমে। সেইজন্য Mean difference-স্তম্ভের মান sine নির্ণয়ের সময়ে **যোগ করিতে হয়** আর cosine নির্ণয়ের সময়ে **বিয়োগ করিতে হয়।**

ধরা যাক, sine $25° 44'$ নির্ণয় করিতে হইবে। Sine বলিয়া একেবারে বাম-পার্শ্বের স্তম্ভের উপরের দিক্ হইতে আরম্ভ করিয়া নীচের দিকে আসিয়া $25°$ বাহির করা হইল ; ঐ সারিতে মাথার $40'$-এর নীচে আছে 0·43313 ; পরে ঐ সারিতেই মাথার উপরের Mean difference-স্তম্ভগুলির $4'$-এর স্তম্ভে আছে 105. তালিকাটিতে দশমিক বিন্দুর পরবর্তী পঞ্চম অঙ্কটির আসন্ন মান গ্রহণ করা হইয়াছে বলিয়া, অর্থাৎ উহাতে সন্নিবিষ্ট সকল সংখ্যা পাঁচ দশমিক স্থান পর্যন্ত শুদ্ধ বলিয়া, 105-কে মনে করিতে হইবে ·00105.

$\therefore$ নির্ণেয় sine $= 0{\cdot}43313 + {\cdot}00105$

$= 0{\cdot}43418.$

আবার ধরা যাক, cos 44° 48′ নির্ণয় করিতে হইবে।

ডানদিকের ডিগ্রী-চিহ্নিত স্তম্ভের নীচের দিক্ হইতে আরম্ভ করিয়া উপরের দিকে আসিয়া 44° বাহির করা হইল ; ঐ সারিতে নীচের 40′ বরাবর আছে 0·71121 ; পরে ঐ সারিতেই নীচের Mean difference-এর স্তম্ভগুলির 8′-এর স্তম্ভে আছে 163 ;

$\therefore$ নির্ণেয় cosine $= 0{\cdot}71121 - {\cdot}00163$

$= 0{\cdot}70958.$

Table IV. Natural Tangents এবং Cotangents Table—এই তালিকায়ও 1′ অন্তর, 0° হইতে আরম্ভ করিয়া 90° পর্যন্ত কোণসমূহের tangent এবং cotangent দেওয়া আছে। tangent-এর কোণগুলি উপরের বামদিক্ হইতে ক্রমে ডাইনে এবং নীচের দিকে বাড়িয়া গিয়াছে। তালিকার উপরে লেখা আছে Natural tangents এবং নীচে লেখা আছে Natural cotangents. তালিকার প্রধান অংশে 10′ অন্তর অন্তর কোণের tangent এবং cotangent দেওয়া আছে। পার্শ্বে Mean difference অংশের সাহায্যে 1′ অন্তর অন্তর কোণের tangent এবং cotangent পাওয়া যায়। মনে রাখিতে হইবে, কোণ 0° হইতে 90° পর্যন্ত বাড়িয়া চলিলে tangent-এর মান ক্রমশঃই বাড়ে, কিন্তু cotangent-এর মান ক্রমশঃই কমে। সেইজন্য Mean difference-স্তম্ভের মান tangent নির্ণয়ের সময়ে **যোগ করিতে হয়** এবং cotangent নির্ণয়ের সময়ে **বিয়োগ করিতে হয়।**

উদাহরণ। $\tan 58° 37' = 0{\cdot}63185 + {\cdot}00746$

$= 0{\cdot}63931,$

$\cot 64° 48' = 0{\cdot}47341 - {\cdot}00286$

$= 0{\cdot}47055.$

Table V. Logarithmic Sines এবং Cosines Table—লগারিদ্‌মিক sine θ এবং cosine θ-এর অর্থ $10 + \log \sin \theta$ এবং $10 + \log \cos \theta$ এবং ইহাকে $L \sin \theta$ এবং $L \cos \theta$ রূপে লেখা হয়। Table V-এ Mean difference-স্তম্ভের সাহায্যে 1′ অন্তর, 0° হইতে আরম্ভ করিয়া 90° পর্যন্ত কোণসমূহের লগারিদ্‌মিক sine ও cosine নির্ণয় করা যায়। ব্যবহার-পদ্ধতি sine এবং cosine তালিকারই অনুরূপ। $L \sin \theta$-এর সময়ে Mean difference যোগ করিতে হয় এবং $L \cos \theta$-এর সময়ে Mean difference বিয়োগ করিতে হয়।

এখন, যে-কোন কোণের sine এবং cosine-এর সাংখ্যমান 1 অপেক্ষা বৃহত্তর নহে, 0° হইতে 45° পর্যন্ত কোণসমূহের tangent এবং 45° হইতে 90° পর্যন্ত কোণসমূহের cotangent 1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর। অতএব, ইহাদের লগারিদ্‌ম ঋণাত্মক।

তালিকায় যাহাতে এই ঋণাত্মক মানগুলি না আসে, সেইজন্য ত্রৈকোণমিতিক অনুপাত-সমূহের লগারিদ্‌ম-এর সহিত সর্বদা 10 যোগ করিয়া তালিকা প্রস্তুত করা হয়।

উদাহরণ। $L \sin 65° 18'$

$= 9{\cdot}95786 + {\cdot}00046 = 9{\cdot}95832.$

$L \cos 54° 37'$

$= 9{\cdot}76395 - {\cdot}00124 = 9{\cdot}76271.$

Table VI. Logarithmic Tangents এবং Cotangents Table—এই তালিকায়ও 1′ অন্তর অন্তর 0° হইতে 90° পর্যন্ত লগারিদ্‌মিক tangents এবং cotangents-এর মান দেওয়া আছে। লগারিদ্‌মিক tangents এবং cotangents-কে $L \tan \theta$ এবং $L \cot \theta$ রূপে লেখা হয় এবং উহাদের অর্থ যথাক্রমে $10 + \log \tan \theta$ এবং $10 + \log \cot \theta$. ব্যবহার-পদ্ধতি পূর্বের তালিকারই অনুরূপ; মনে রাখিতে হইবে, এক্ষেত্রেও লগারিদ্‌মিক tangent-তালিকায় Mean difference যোগ করিতে হয় এবং লগারিদ্‌মিক cotangent তালিকায় Mean difference বিয়োগ করিতে হয়।

উদাহরণ। $L \tan 48° 35' = 10{\cdot}05319 + 0{\cdot}00127$

$= 10{\cdot}05446.$

$L \cot 44° 28' = 10{\cdot}01011 - {\cdot}00202$

$= 10{\cdot}00809.$

10·2. সমানুপাতী অংশ-বিধি (Principle of Proportional Parts)।

অতি ক্ষুদ্র রাশি অন্তর অন্তর কোন চলরাশির মান এবং উহার কোন অপেক্ষকের অনুরূপ মানসমূহ তালিকাবদ্ধ করিলে দেখা যায়, চলরাশির মানের অতি ক্ষুদ্র পরিবর্তনের জন্য উহার অপেক্ষকের অনুরূপ মানের যে পরিবর্তন হয়, তাহা চলরাশিটির মানের ক্ষুদ্র পরিবর্তনের সমানুপাতী। ইহাই সমানুপাতী অংশ-বিধি নামে খ্যাত।

প্রমাণ পাঠ্যতালিকা-বহির্ভূত, কিন্তু প্রয়োগ-বিধি প্রয়োজনীয়। নিম্নের উদাহরণ-সমূহ হইতে প্রয়োগ-বিধি সুস্পষ্ট হইবে।

উদা. 1. দেওয়া আছে: $\log 49765 = 4{\cdot}6969240$ এবং $\log 49766 = 4{\cdot}6969327$, (i) $\log 49{\cdot}7658$ এবং (ii) $\bar{3}{\cdot}6969282$ যে সংখ্যাটির log, তাহা নির্ণয় কর।

(i) স্পষ্টই $\log 49765{\cdot}8$-এর মান $\log 49765$ এবং $\log 49766$-এর মধ্যবর্তী হইবে। আরও দেখা যায়, $49765{\cdot}8$ সংখ্যাটি 49765 অপেক্ষা ·8 অধিক।

এখন, $\log 49766 = 4{\cdot}6969327$

এবং $\log 49765 = 4{\cdot}6969240$

∴ 1 বৃদ্ধির জন্য অন্তর $= {\cdot}0000087$;

$\therefore$ ˙8 বৃদ্ধির জন্য অন্তর $= \dot{}0000087 \times \dot{}8$
$= \dot{}00000696$;

$\therefore$ $\log 49765\dot{}8 = 4\dot{}6969240 + \dot{}00000696$
$= 4\dot{}69693096$;

$\therefore$ $\log 49\dot{}7658 = 1\dot{}69693096$
$= 1\dot{}6969310$ (7 দশমিক স্থান পর্যন্ত আসন্ন মান)।

(ii) যে সংখ্যার লগারিদ্‌ম 4˙6969282, তাহাই প্রথমে নির্ণয় করিতে হইবে।

এখন, 4˙6969282 সংখ্যাটি 4˙6969240 এবং 4˙6969327-এর মধ্যবর্তী। অতএব, 4˙6969282 যে সংখ্যার লগারিদ্‌ম তাহা অবশ্যই 49765 এবং 49766-এর মধ্যবর্তী হইবে।

মনে কর, এই নির্ণেয় সংখ্যাটি $= 49765 + x$.

এখন, $\log 49766 = 4\dot{}6969327,$ ... ... (1)

$\log 49765 = 4\dot{}6969240,$ ... ... (2)

এবং $\log 49765 + x = 4\dot{}6969282$ ... ... (3)

(1) এবং (2) হইতে 1 বৃদ্ধির জন্য অন্তর ˙0000087, (সংক্ষেপে, 1 বৃদ্ধির জন্য অন্তর 87)

(2) এবং (3) হইতে x বৃদ্ধির জন্য অন্তর ˙0000042, (সংক্ষেপে, x বৃদ্ধির জন্য অন্তর 42)

অর্থাৎ,	অন্তর	বৃদ্ধি	বা,	অন্তর	বৃদ্ধি
	˙0000087	1		87	1
	˙0000042	x		42	x

$$\therefore \quad x = \frac{\dot{}0000042}{\dot{}0000087} = \frac{42}{87} = 0\dot{}48\cdots$$

$\therefore$ $\log 49765\dot{}48 = 4\dot{}6969282.$

এখন, $\bar{3}\dot{}6969282$ এবং 4˙6969282-এর অংশক একই ; অতএব উহারা যে-সকল সংখ্যার লগারিদ্‌ম তাহারা একই ক্রমে সজ্জিত একই অঙ্কসমূহ দ্বারা গঠিত। সুতরাং $\bar{3}\dot{}6969282$ যে সংখ্যার লগারিদ্‌ম সেই সংখ্যাটি অবশ্য 4976548 সংখ্যাটির উপযুক্ত স্থানে দশমিক বিন্দু বসাইয়া পাওয়া যাইবে। এখন এক্ষেত্রে পূর্ণক $\bar{3}$;

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যা $= \dot{}004976548.$

উদা. 2. দেওয়া আছে : $\sin 62° \; 25' = \dot{}8863383$ এবং $\sin 62° \; 24' = \dot{}8862036$, $\sin 62° \; 24' \; 35''$ নির্ণয় কর।

$$\sin 62^\circ\ 25' = \cdot 8863383$$
$$\sin 62^\circ\ 24' = \cdot 8862036$$

$\therefore$ $1'$ বা $60''$-এর জন্য অন্তর $= \cdot 0001347$.

$\therefore$ $35''$ „ „ „ $= \dfrac{\cdot 0001347 \times 35}{60} = \cdot 00007857\cdots$

$\therefore$ $\sin 62^\circ\ 24'\ 35'' = \cdot 8862036 + \cdot 00007857\cdots$
$= \cdot 88628217\ldots. = \cdot 8862822.$

উদা. 3. দেওয়া আছে: $\cos 20^\circ\ 13' = \cdot 9383925$ এবং $\cos 20^\circ\ 14' = \cdot 9382920$, $\cos 20^\circ\ 13'\ 45''$ নির্ণয় কর।

এস্থলে, $20^\circ\ 13'\ 45''$ ও $20^\circ\ 13'$-এর অন্তর $45''$,

এবং $1'$ বা $60''$-এর জন্য অন্তর $\cdot 9383925 - \cdot 9382920$,

অর্থাৎ $\cdot 0001005$.

কোণের অন্তর	cosine-এর মানের অন্তর
$60''$	$\cdot 0001005$
$\therefore$ $45''$	x

$\therefore$ $x = \dfrac{\cdot 0001005 \times 45}{60} = \dfrac{\cdot 0001005 \times 3}{4} = 0\cdot 00007537\cdots$

এখন, কোণের পরিমাণ বৃদ্ধিপ্রাপ্ত হইলে, উহার cosine হ্রাসপ্রাপ্ত হয়;

$\therefore$ $\cos 20^\circ\ 13'\ 45'' = 0\cdot 9383925 - 0\cdot 00007537\cdots$
$= 0\cdot 93831713 = 0\cdot 9383171.$

উদা. 4. দেওয়া আছে: $\cot 6^\circ\ 28' = 8\cdot 8225186$ এবং $\cot 6^\circ\ 29' = 8\cdot 7996446$, $\cot 6^\circ\ 28'\ 25''$ নির্ণয় কর।

এস্থলে, কোণের পরিমাণ $1'$ বা $60''$ বাড়িবার জন্য cotangent-এর মান $(8\cdot 8225186 - 8\cdot 7996446)$ বা $\cdot 0228740$ কমিয়া গিয়াছে;

$\therefore$ কোণের পরিমাণ-বৃদ্ধি	cot-এর মানহ্রাস
$60''$	$\cdot 0228740$
$25''$	x

$\therefore$ $x = \dfrac{\cdot 0228740 \times 25}{60} = \cdot 00953083\cdots$

$\therefore$ $\cot 6^\circ\ 28'\ 25'' = 8\cdot 8225186 - \cdot 00953083\cdots$
$= 8\cdot 81298777 = 8\cdot 8129878.$

উদা. 5. দেওয়া আছে :

L sin 44° 24′ = 9·8448891 এবং L sin 44° 23′ = 9·8447601,

L sin 44° 23′ 40″ এবং L cosec 44° 23′ 40″ নির্ণয় কর।

$$\begin{aligned} L \sin 44° 24' &= 9{\cdot}8448891 \\ L \sin 44° 23' &= 9{\cdot}8447601 \end{aligned}$$

∴ 1′ বা 60″-এর জন্য অন্তর = ·0001290 (বা সংক্ষেপে, 1290)

∴ কোণের অন্তর	উহাদের লগারিদ্‌মিক sine-এর মানের অন্তর
60″	·0001290
40″	x

∴ $x = {\cdot}0001290 \times \frac{40}{60} = {\cdot}0000860.$

∴ $L \sin 44° 23' 40'' = 9{\cdot}8447601 + {\cdot}0000860$
$= 9{\cdot}8448461.$

এখন, $L \operatorname{cosec} 44° 23' 40''$

$= 10 + \log \operatorname{cosec} 44° 23' 40''$

$= 10 + \log \left(\frac{1}{\sin 44° 23' 40''}\right) = 10 + \log 1 - \log \sin 44° 23' 40''$

$= 10 - \log \sin 44° 23' 40'' = 10 + 10 - 10 - \log \sin 44° 23' 40''$

$= 20 - (10 + \log \sin 44° 23' 40'') = 20 - L \sin 44° 23' 40''$

$= 20 - 9{\cdot}8448461 = 10{\cdot}1551539.$

উদা. 6. দেওয়া আছে : L sec 32° 21′ = 10·0732486, এবং L sec 32° 20′ = 10·0731686, লগারিদ্‌ম তালিকায় যে কোণটির secant 10·0732126, তাহার পরিমাণ নির্ণয় কর।

$$\begin{aligned} L \sec 32° 21' &= 10{\cdot}0732486 \\ L \sec 32° 20' &= 10{\cdot}0731686 \end{aligned}$$

∴ 1′ বা 60″ এর জন্য অন্তর = ·00008.

আবার, 10·0732126 − 10·0731686 = ·000044

∴ লগারিদ্‌মিক secant-এর মান-বৃদ্ধি	কোণের পরিমাণ-বৃদ্ধি
·00008	60″
·000044	x

∴ $x = \frac{{\cdot}000044}{{\cdot}00008} \times 60'' = 33''.$

∴ নির্ণেয় কোণ = 32° 20′ 33″.

উদা. 7. $\dfrac{\sin 58^\circ 39' \times \cos 28^\circ 5'}{\cot 67^\circ 19'}$-এর মান নির্ণয় কর।

দেওয়া আছে: $L \sin 61^\circ 55' = 9{\cdot}9455985$,

$L \cos 31^\circ 21' = 9{\cdot}9314605$,

$L \cot 22^\circ 41' = 10{\cdot}3788577$

এবং $\log 180{\cdot}3 = 2{\cdot}2559167$.

মনে কর, নির্ণেয় মান $= x$.

$\therefore \quad x = \sin 58^\circ 39' \times \cos 28^\circ 5' \times \tan 67^\circ 19'$

$= \cos (90^\circ - 58^\circ 39') \times \sin (90^\circ - 28^\circ 5') \times \cot (90^\circ - 67^\circ 19')$

$= \cos 31^\circ 21' \times \sin 61^\circ 55' \times \cot 22^\circ 41'$.

$\therefore \quad \log x = \log \cos 31^\circ 21' + \log \sin 61^\circ 55' + \log \cot 22^\circ 41'$

$$\begin{aligned}
&= L \cos 31^\circ 21' - 10 &&= 9{\cdot}9314605 - 10\\
&\quad + L \sin 61^\circ 55' - 10 &&\quad + 9{\cdot}9455985 - 10\\
&\quad + L \cot 22^\circ 41' - 10 &&\quad + 10{\cdot}3788577 - 10\\
& &&= 30{\cdot}2559167 - 30\\
& &&= 0{\cdot}2559167
\end{aligned}$$

$= \log 1{\cdot}803$.

$\therefore \quad x = 1{\cdot}803$.

উদা 8. যদি $\sin \theta = 0{\cdot}4912$, θ-এর সমাধান কর;

দেওয়া আছে: $\log 2 = {\cdot}3010300$,

$\log 3{\cdot}07 = 0{\cdot}4872685$,

$L \sin 29^\circ 25' = 9{\cdot}6912205$,

$L \sin 29^\circ 26' = 9{\cdot}6914445$.

$\sin \theta = 0{\cdot}4912$;

$\therefore \quad \log \sin \theta = \log 0{\cdot}4912$

$= \log \dfrac{4912}{10000} = \log 4912 - \log 10^4$

$= \log (16 \times 307) - 4 \log 10$

$= \log 2^4 + \log 307 - 4$

$= 4 \log 2 + \log 307 - 4$

$= 4 \times {\cdot}3010300 + 2{\cdot}4872685 - 4$

$= 1{\cdot}2041200 + 2{\cdot}4872685 - 4$

$= 3{\cdot}6913885 - 4 = \bar{1}{\cdot}6913885$.

$\therefore \quad L \sin \theta = 10 + \log \sin \theta = 10 - 1 + {\cdot}6913885$

$= 9{\cdot}6913885$.

9·6913885 সংখ্যাটি 9·6912205 ও 9·6914445-এর মধ্যে অবস্থিত বলিয়া, উহা যে কোণের L sine তাহা, অর্থাৎ, θ অবশ্যই 29° 25′ এবং 29° 26′-এর মধ্যে অবস্থিত হইবে।

মনে কর, $\theta = 29° \ 25' \ x''$.

এখন, 9·6914445 = L sine 29° 26′
9·6912205 = L sine 29° 25′

·0002240 = 1′ বা 60″-এর জন্য অন্তর

এবং 9·6913885 = L sin 29° 25′ x''
9·6912205 = L sin 29° 25′

∴ ·0001680 = x''-এর জন্য অন্তর

$$\therefore \quad \frac{x}{60} = \frac{\cdot 0001680}{\cdot 0002240} = \frac{168}{224}; \qquad \therefore \quad x = \frac{168}{224} \times 60 = 45.$$

$$\therefore \quad \theta = 29° \ 25' \ 45''.$$

প্রশ্নমালা 12

লগারিদ্‌ম তালিকা হইতে মান নির্ণয় কর:

1. sin 60° 28′.
2. cos 38° 42′.
3. tan 25° 25′.
4. cot 65° 45′.
5. sec 26° 21′.
6. cosec 55° 15′.

মান নির্ণয় কর:

7. L sin 36° 35′.
8. L cos 72° 28′.
9. (*a*) L tan 45° 35′. (*b*) L cot 22° 41′.

10. যদি L cos θ = ·95652 হয়, নিকটতম মিনিট পর্যন্ত θ-এর মান নির্ণয় কর।

11. দেওয়া আছে: log 23512 = 4·3712896 এবং log 23513 = 4·3713080, log 235126-এর মান নির্ণয় কর।

12. দেওয়া আছে: log 4350 = 3·6384893 এবং log 4351 = 3·6385891, log 43501 এবং log ·435-এর মান নির্ণয় কর।

13. দেওয়া আছে: log 23454 = 4·3702199 এবং log 23·453 = 1·3701984, log 234·535-এর মান নির্ণয় কর।

14. দেওয়া আছে: log 3381·4 = 3·5290965 এবং log ·33813 = $\bar{1}$·5290837, যে সংখ্যাটির লগারিদ্‌ম $\bar{3}$·5290898, সেই সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

15. দেওয়া আছে : $\log 3 = 0{\cdot}4771213$, $\log 74008 = 4{\cdot}8692787$ এবং 1-এর পার্থক্য = 59, ·00243-এর বিংশতম মূল নির্ণয় কর।

16. দেওয়া আছে : $\sin 62^\circ\ 24' = 0{\cdot}8862036$ এবং $\sin 62^\circ\ 25' = {\cdot}8863383$, $\sin 62^\circ\ 24'\ 40''$-এর মান নির্ণয় কর।

17. দেওয়া আছে : $\tan 49^\circ\ 35' = 1{\cdot}1743038$ এবং $\tan 49^\circ\ 34' = 1{\cdot}1736120$, $\tan 49^\circ\ 34'\ 40''$-এর মান নির্ণয় কর।

18. দেওয়া আছে : $\cos 40^\circ\ 47' = 0{\cdot}7571851$ এবং $\cos 40^\circ\ 48' = 0{\cdot}7569951$, যে কোণটির cosine ·7570711, সেই কোণটি নির্ণয় কর।

19. দেওয়া আছে : $\operatorname{cosec} 34^\circ\ 27' = 1{\cdot}7677625$ এবং $\operatorname{cosec} 34^\circ\ 28' = 1{\cdot}7670133$, যে কোণটির cosecant 1·7672006, সেই কোণটি নির্ণয় কর।

20. দেওয়া আছে : $\text{L} \sin 5^\circ\ 25' = 8{\cdot}9749624$ এবং $\text{L} \sin 5^\circ\ 26' = 8{\cdot}9762926$, $\text{L} \sin 5^\circ\ 25'\ 38''$-এর মান নির্ণয় কর।

21. দেওয়া আছে : $\text{L} \sin 37^\circ\ 43'\ 50'' = 9{\cdot}7867152$ এবং $\text{L} \sin 37^\circ\ 44' = 9{\cdot}7867424$, $\text{L} \sin 37^\circ\ 43'\ 56''$- এর মান নির্ণয় কর। [C. U., 1910]

22. দেওয়া আছে : $\text{L} \cos 42^\circ\ 25' = 9{\cdot}8682088$ এবং $\text{L} \cos 42^\circ\ 26' = 9{\cdot}8680234$, যে কোণের $\text{L} \cos$ 9·8681318, সেই কোণটি নির্ণয় কর।

23. দেওয়া আছে : $\text{L} \tan 79^\circ\ 51'\ 40'' = 10{\cdot}7475657$ এবং $\text{L} \tan 79^\circ\ 51'\ 50'' = 10{\cdot}7476872$, যে কোণের $\text{L} \tan$ 10·7476532, সেই কোণটি নির্ণয় কর। [C. U., 1921]

24. দেওয়া আছে : $\text{L} \cot 68^\circ\ 52'\ 50'' = 9{\cdot}5868773$ এবং $10''$-এর জন্য অন্তর ·0000626, যে কোণের $\text{L} \cot$ 9·5868939, সেই কোণটি নির্ণয় কর।

25. প্রমাণ কর যে, $\text{L} \sin \theta + \text{L} \operatorname{cosec} \theta = \text{L} \cos \theta + \text{L} \sec \theta = \text{L} \tan \theta + \text{L} \cot \theta = 20.$

26. প্রমাণ কর যে, (i) $\text{L} \sin \theta - \text{L} \operatorname{cosec} \theta = 2 \log \sin \theta,$

(ii) $\text{L} \cos \theta - \text{L} \sec \theta = 2 \log \cos \theta,$

এবং (iii) $\text{L} \tan \theta - \text{L} \cot \theta = 2 \log \tan \theta.$

27. দেওয়া আছে : $\text{L} \cos 36^\circ\ 22' = 9{\cdot}9059247$, $\text{L} \sec 36^\circ\ 22'$-এর মান নির্ণয় কর।

28. দেওয়া আছে : $\text{L} \sin 61^\circ\ 55' = 9{\cdot}94560$ এবং $\text{L} \cos 61^\circ\ 55' = 9{\cdot}67281$, $\text{L} \tan 61^\circ\ 55'$-এর মান নির্ণয় কর।

29. $\dfrac{\sin 67^\circ\, 14' \times \cos 38^\circ\, 26'}{\tan 47^\circ\, 24'}$ এর মান নির্ণয় কর ;

দেওয়া আছে : $L \sin 51^\circ\, 34' = 9{\cdot}8939458$,

$L \cos 22^\circ\, 46' = 9{\cdot}9647726$,

$L \tan 42^\circ\, 36' = 9{\cdot}9635740$,

এবং $\log 6642 = 3{\cdot}8222924$.

30. $\tan \theta = {\cdot}981$ হইলে, θ-এর মান নির্ণয় কর ;

দেওয়া আছে : $\log 3 = 0{\cdot}47712$.

$\log 10{\cdot}9 = 1{\cdot}03743$,

$L \tan 44^\circ\, 27' = 9{\cdot}99166$,

$1'$-এর জন্য অন্তর $= 25$.

10·3. ত্রিভুজের সমাধান।

কোন ত্রিভুজের তিনটি বাহু ও তিনটি কোণের প্রত্যেককে ত্রিভুজের এক-একটি অঙ্গ (element) বলে। ত্রিভুজের এই সকল অঙ্গের পরস্পরের মধ্যে কোন-না-কোন সম্পর্ক থাকে। এইজন্য এই অঙ্গসমূহের মধ্যে সাধারণতঃ যে-কোন তিনটি দেওয়া থাকিলে, অবশিষ্ট তিনটি নির্ণয় করা যায়। প্রদত্ত অঙ্গসমূহ হইতে অবশিষ্ট অঙ্গসমূহ নির্ণয়ের এই প্রক্রিয়াকে **ত্রিভুজের সমাধান** বলে।

ত্রিভুজের সমাধানের জন্য যে-কোন তিনটি অঙ্গ দেওয়া থাকিতে পারে :

(i) তিনটি বাহু,

(ii) তিনটি কোণ,

(iii) দুইটি কোণ এবং একটি বাহু,

(iv) দুইটি বাহু এবং উহাদের অন্তর্ভূত কোণ,

(v) দুইটি বাহু এবং উহাদের একটির বিপরীত কোণ।

ইহাদের মধ্যে দ্বিতীয় ক্ষেত্র ছাড়া সকল ক্ষেত্রেই ত্রিভুজের যথাযথ সমাধান সম্ভব। কিন্তু দ্বিতীয় ক্ষেত্রে ত্রিভুজের সমাধান করিয়া কেবলমাত্র বাহুগুলির অনুপাতই পাওয়া যায় ; বাহুগুলির যথার্থ দৈর্ঘ্য জানা যায় না।

10·4. প্রদত্ত তিনটি বাহু হইতে ত্রিভুজের সমাধান।

কোন ত্রিভুজের তিনটি বাহু a, b, c দেওয়া থাকিলে, ত্রিভুজের কোণ-তিনটি নির্ণয় করা যায়। নবম অধ্যায়ে আমরা দেখিয়াছি :

(1) $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$,

(2) $\sin A = \frac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, যেখানে $2s = a+b+c$,

(3) $\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$,

(4) $\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$,

(5) $\tan\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$.

এই সকল সূত্রের যে-কোনটির সাহায্যেই A কোণটিকে নির্ণয় করা যায়। অনুরূপ সূত্রসমূহের সাহায্যে B ও C-এর মান নির্ণয় করা যায়।

দ্বিতীয় সূত্র হইতে A কোণ নির্ণয় করিতে গেলে 0° হইতে π-এর মধ্যে A কোণের দুইটি মান পাওয়া যাইবে। কারণ, $\sin A = \sin(\pi - A)$. সুতরাং, এই সূত্র ব্যবহার করা চলে না।

প্রথম সূত্রের সাহায্যে cos A-এর মান জানা যায়। 0° হইতে π-এর মধ্যে প্রত্যেক কোণের কোসাইন স্বতন্ত্র বলিয়া এক্ষেত্রে কোসাইন-তালিকার সাহায্যে A কোণের কেবলমাত্র একটি মানই পাওয়া যাইবে। এদিক দিয়া প্রথম সূত্রের ব্যবহার যুক্তিযুক্ত। কিন্তু cos A-এর মান-নির্ণয়ে লগারিদ্‌মের ব্যবহার খুব সুবিধাজনক নহে। a, b, c-এর মান বড় হইলে প্রক্রিয়াটি দীর্ঘ এবং সময়সাপেক্ষ হইয়া পড়ে। এইজন্য কেবলমাত্র a, b, c-এর মান ক্ষুদ্র হইলে এই সূত্র ব্যবহার করা যায়।

অবশিষ্ট সূত্রগুলি হইতে লগারিদ্‌মের সাহায্যে সহজেই কোণটির মান জানা যায়।

বিভিন্ন তালিকা হইতে এই কোণের যে মান নিরূপণ করা হয়, অধিকাংশ ক্ষেত্রে তাহার সকল মানই আসন্ন মান মাত্র। উচ্চতর গণিতে প্রমাণ করা হইয়াছে যে, কোন কোণের বিভিন্ন তালিকা হইতে প্রাপ্ত আসন্ন মানসমূহের মধ্যে লগারিদ্‌মিক ট্যানজেণ্ট (logarithmic tangent) তালিকা হইতে প্রাপ্ত আসন্ন মানই সর্বাপেক্ষা শুদ্ধ। সুতরাং কোণগুলির যথাসম্ভব শুদ্ধ মান পাইবার জন্য কার্যক্ষেত্রে উপরিউক্ত পঞ্চম সূত্রই ব্যবহৃত হইয়া থাকে।

পঞ্চম সূত্র হইতে আমরা জানি,

$$\tan\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}},$$

$$\therefore \quad L\tan\frac{A}{2} = 10 + \log\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$$
$$= 10 + \tfrac{1}{2}[\log(s-b) + \log(s-c) - \log s - \log(s-a)].$$

উদা. 1. একটি ত্রিভুজের বাহুগুলি 15, 19, 24 ; ত্রিভুজের বৃহত্তম কোণটির পরিমাণ নির্ণয় কর। দেওয়া আছে, $\log 5{\cdot}7 = 0{\cdot}75587$, $L \cos 88° 59' = 8{\cdot}24903$ এবং 1′-এর অন্তর = 718. [C. U., 1936]

24—এই বৃহত্তম বাহুর বিপরীত কোণটিই ত্রিভুজটির বৃহত্তম কোণ হইবে। এক্ষেত্রে $a = 15$, $b = 19$, $c = 24$ ধরিলে,

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

$$= \frac{15^2 + 19^2 - 24^2}{2 \times 19 \times 15} = \frac{225 + 361 - 576}{570}$$

$$= \frac{10}{570} = \frac{1}{57};$$

$$\therefore \quad L \cos C = 10 + \log \frac{1}{57}$$

$$= 10 - \log 57 = 10 - 1{\cdot}75587 = 8{\cdot}24413;$$

দেওয়া আছে $L \cos 88° 59' = 8{\cdot}24903$.

মনে কর, $\angle C = 88° 59' x''$,

$\therefore$ x''-এর অন্তর $= 8{\cdot}24903 - 8{\cdot}24413 = {\cdot}00490$.

কিন্তু 1′ বা 60″-এর অন্তর = ·00718 ;

$\therefore$ $\frac{x}{60} = \frac{{\cdot}00490}{{\cdot}00718}$, বা, $x = \frac{490}{718} \times 60 = \frac{29400}{718} = 41$ (প্রায়) ;

$\therefore$ $\angle C = 88° 59' 41''$ (প্রায়)।

উদা. 2. একটি ত্রিভুজের বাহুগুলি 9, 10 এবং 11. যে বাহুর দৈর্ঘ্য 10 তাহার বিপরীত কোণের পরিমাণ নির্ণয় কর ; দেওয়া আছে, $\log 2 = {\cdot}30103$, $L \tan 29° 30' = 9{\cdot}7526420$, $L \tan 29° 29' = 9{\cdot}7523472$.

[C. U., 1943]

এক্ষেত্রে $a = 9$, $b = 10$, $c = 11$ ধরিলে, $s = \frac{1}{2}(a + b + c) = \frac{1}{2}(9 + 10 + 11) = 15$; সুতরাং, $s - a = 15 - 9 = 6$, $s - b = 15 - 10 = 5$, $s - c = 15 - 11 = 4$.

যে বাহুর দৈর্ঘ্য 10 তাহার বিপরীত কোণ B. B কোণ নির্ণেয়।

$$\tan \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}} = \sqrt{\frac{4.6}{15.5}} = \sqrt{\frac{8}{25}} = \sqrt{\frac{32}{100}}$$

$$= \frac{2^{\frac{5}{2}}}{10}.$$

$$L \tan \frac{B}{2} = 10 + \tfrac{5}{2} \log 2 - \log 10 = 10 + \tfrac{5}{2} \times {\cdot}30103 - 1 = 9{\cdot}752575.$$

প্রদত্ত মান হইতে দেখা যাইতেছে যে, $\text{L} \tan \frac{\text{B}}{2}$-এর মান $\text{L} \tan 29° \ 29'$ ও $\text{L} \tan 29° \ 30'$-এর মধ্যে রহিয়াছে। সুতরাং, মনে কর, $\frac{\text{B}}{2} = 29° \ 29' \ x''$.

$\therefore$ x''-এর অন্তর $= 9{\cdot}752575 - 9{\cdot}7523472 = {\cdot}0002278$;

আবার $1'$ বা 60-এর অন্তর $= 9{\cdot}7526420 - 9{\cdot}7523472 = {\cdot}0002948$;

$$\therefore \quad \frac{x}{60} = \frac{{\cdot}0002278}{{\cdot}0002948} = \frac{2278}{2948};$$

$$\therefore \quad x = \frac{2278}{2948} \times 60 = 46{\cdot}363 \text{ (প্রায়) };$$

সুতরাং, $\frac{\text{B}}{2} = 29° \ 29' \ 46{\cdot}363''$; $\therefore$ $\mathbf{B = 58° \ 59' \ 32{\cdot}73''}$ (প্রায়)।

প্রশ্নমালা 13

1. কোন সমতল ত্রিভুজে $a = 18$, $b = 20$, $c = 22$; $\text{L} \tan \frac{\text{A}}{2}$-এর মান নির্ণয় কর। দেওয়া আছে, $\log 2 = {\cdot}30103$, $\log 3 = {\cdot}4771213$.

[C. U., 1915]

2. একটি ত্রিভুজের বাহুগুলি 7, 8, 9 ; ত্রিভুজের কোণসমূহ নির্ণয় কর। দেওয়া আছে, $\log 2 = {\cdot}3010300$, $\text{L} \tan 24° \ 5' \ 40'' = 9{\cdot}6505069$, $\text{L} \tan 24° \ 5' \ 50'' = 9{\cdot}6505634$, $\text{L} \tan 29° \ 12' \ 20'' = 9{\cdot}7474183$ এবং $\text{L} \tan 29° \ 12' \ 30'' = 9{\cdot}7474677$. [C. U., 1938 ; B. H. U., 1938]

3. যে ত্রিভুজের বাহুগুলি 2, 3, 4, উহার বৃহত্তম কোণটি নির্ণয় কর। দেওয়া আছে, $\log 2 = {\cdot}30103$, $\log 3 = {\cdot}4771213$, $\text{L} \tan 52° \ 14' = 10{\cdot}1108395$, $\text{L} \tan 52° \ 15' = 10{\cdot}1111004$. [C. U., 1929 ; B. H. U., 1952]

4. একটি ত্রিভুজের বাহুগুলি 315, 420, 531 ; যে বাহুর দৈর্ঘ্য 420, তাহার বিপরীত কোণটি নির্ণয় কর। দেওয়া আছে, $\log 633 = 2{\cdot}8014037$, $\log 318 = 2{\cdot}5024271$, $\log 213 = 2{\cdot}3283796$, $\log 102 = 2{\cdot}0086002$, $\text{L} \tan 26° \ 7' \ 37{\cdot}43'' = 9{\cdot}6906220$.

5. যে ত্রিভুজের বাহুগুলি 32, 40, 66, উহার বৃহত্তম কোণটি নির্ণয় কর। দেওয়া আছে, $\log 207 = 2{\cdot}3159703$, $\log 1073 = 3{\cdot}0305997$, $\text{L} \cos 66° \ 18' = 9{\cdot}6424342$, $1'$-এর জন্য অন্তর $= {\cdot}0003431$. [C. U., 1955]

6. কোন ত্রিভুজের বাহুগুলি 4, 5, 6 ; 5 বাহুর বিপরীত কোণটি নির্ণয় কর। দেওয়া আছে, $\log 2 = {\cdot}30103$, $\text{L} \cos 27° \ 53' = 9{\cdot}9464040$, $1'$-এর জন্য অন্তর $= {\cdot}0000669$. [C. U. 1941]

7. যে ত্রিভুজের বাহুগুলি 5, 6, 7, উহার বৃহত্তম কোণটি নির্ণয় কর। দেওয়া আছে, $\log 6 = \cdot7781513$, $L \cos 39^\circ\ 14' = 9\cdot8890644$, $1'$-এর জন্য অন্তর $= 1032$. [Pat. U., 1933 ; U. P. B., 1944]

8. যে ত্রিভুজের বাহুগুলি 12, 15, 16, উহার বৃহত্তম কোণটি নির্ণয় কর। [লগারিদ্‌ম তালিকার সাহায্যে] [C. U., 1957]

9. একটি ত্রিভুজের বাহুগুলি 7, 8, 9 ; ত্রিভুজটি সমাধান কর। [লগারিদ্‌ম তালিকা ব্যবহার কর।] [C. U., 1938]

10. একটি ত্রিভুজের বাহুগুলি 2, 3, 4 ; ত্রিভুজটি সমাধান কর। [লগারিদ্‌ম তালিকা ব্যবহার কর।]

10·5. প্রদত্ত দুইটি কোণ ও একটি বাহু হইতে ত্রিভুজের সমাধান।

মনে কর, কোন ত্রিভুজের দুইটি কোণ A ও B দেওয়া আছে ; এবং যে-কোন বাহু a দেওয়া আছে। ত্রিভুজের অপর দুই বাহু ও অবশিষ্ট কোণটি নির্ণয় করিতে হইবে।

আমরা জানি, $A + B + C = 180^\circ$; $\therefore$ $C = 180^\circ - (A + B)$.

আবার, $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$ বলিয়া,

$$b = \frac{a \sin B}{\sin A}, \quad c = \frac{a \sin C}{\sin A}.$$

উদা. 1. কোন ত্রিভুজের $a = 39$, $A = 81^\circ\ 35'$, $B = 27^\circ\ 55'$, ত্রিভুজটির সমাধান কর। [C. U., 1935]

$$C = 180^\circ - (A + B) = 180^\circ - (81^\circ\ 35' + 27^\circ\ 55') = 70^\circ\ 30'.$$

তালিকা হইতে জানা যায়, $L \sin 81^\circ\ 35' = 9\cdot99530$, $L \sin 27^\circ\ 55' = 9\cdot67044$, $L \sin 70^\circ\ 30' = 9\cdot97435$.

$$b = a\frac{\sin B}{\sin A} = 39 \times \frac{\sin 27^\circ\ 55'}{\sin 81^\circ\ 35'},$$

$$\begin{aligned}
\therefore\quad \log b &= \log 39 + \log \sin 27^\circ\ 55' - \log \sin 81^\circ\ 35' \\
&= \log 39 + L \sin 27^\circ\ 55' - L \sin 81^\circ\ 35' \\
&= 1\cdot59106 + 9\cdot67044 - 9\cdot99530 \\
&= 1\cdot26620\ ;
\end{aligned}$$

$$\therefore \quad b = 18\cdot46.$$

আবার, $c = a \times \dfrac{\sin C}{\sin A} = 39 \times \dfrac{\sin 70^\circ\ 30'}{\sin 81^\circ\ 35'}.$

$\therefore \quad \log c = \log 39 + \text{L} \sin 70° \, 30' - \text{L} \sin 81° \, 35'$

$= 1{\cdot}59106 + 9{\cdot}97435 - 9{\cdot}99530$

$= 1{\cdot}57011$;

$\therefore \quad c = 37{\cdot}16.$

$\therefore \quad \mathbf{b = 18{\cdot}46,\ c = 37{\cdot}16,\ C = 70° \, 30'.}$

10·6. প্রদত্ত দুই বাহু ও তদন্তর্ভূত কোণ হইতে ত্রিভুজের সমাধান।

ত্রিভুজের দুই বাহু b ও c এবং তাহাদের অন্তর্ভূত কোণ A দেওয়া আছে। ত্রিভুজের সমাধান করিতে হইবে।

মনে কর, $b > c$; তাহা হইলে $\angle B > \angle C$ হইবে।

$$B + C = 180° - A ; \quad \therefore \quad \frac{B+C}{2} = 90° - \frac{A}{2} \cdot$$

আবার, $\tan \frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{b+c} \cot \frac{A}{2}$;

$$\therefore \quad \text{L} \tan \frac{B-C}{2} = 10 + \log \left(\frac{b-c}{b+c} \cot \frac{A}{2} \right)$$

$$= 10 + \log (b-c) - \log (b+c) + \text{L} \cot \frac{A}{2} \cdot$$

b, c ও A-এর মান জানা থাকায়, দক্ষিণ পক্ষের মান নির্ণয় করিলে $\text{L} \tan \frac{B-C}{2}$-এর মান পাওয়া যায়। $\text{L} \tan \frac{B-C}{2}$-এর মান হইতে $\frac{B-C}{2}$-এর মান জানা যায়।

$\frac{B+C}{2}$ এবং $\frac{B-C}{2}$-এর মান হইতে সহজেই B ও C-এর মান জানা যায়। এইরূপে প্রদত্ত A কোণকে লইয়া ত্রিভুজের তিনটি কোণই জানা গেল।

এখন, $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$, সূত্রটির সাহায্যে a-র মান পূর্বের প্রক্রিয়ায় নির্ণয় করা যাইবে।

উদা. 2. একটি ত্রিভুজের দুইটি বাহু 80 সেমি. ও 100 সেমি. এবং তাহাদের অন্তর্ভূত কোণটি 60° ; অন্যান্য কোণগুলি নির্ণয় কর। দেওয়া আছে, $\log 3 = {\cdot}47712$ এবং $\text{L} \tan 10° \, 53' \, 36'' = 9{\cdot}28432$. [C. U., 1923, '46]

মনে কর, $b = 100$ সেমি., $c = 80$ সেমি. ; তাহা হইলে, $A = 60°$.

এখন, $\tan \frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{b+c} \cot \frac{1}{2}A = \frac{100-80}{100+80} \cot 30° = \frac{1}{9}\sqrt{3}$;

$\therefore \quad \text{L} \tan \frac{B-C}{2} = 10 + \log \frac{1}{9}\sqrt{3} = 10 + \log 3^{-\frac{3}{2}} = 10 - \frac{3}{2}\log 3$

$= 10 - \frac{3}{2} \times \cdot 47712 = 10 - \cdot 71568 = 9\cdot 28432$

$= \text{L} \tan 10° \, 53' \, 36''.$

$\therefore \quad \frac{B-C}{2} = 10° \, 53' \, 36''$;

আবার, $\frac{B+C}{2} = 90° - \frac{A}{2} = 90° - 30° = 60°.$

$\therefore \quad \mathbf{B = 70° \, 53' \, 36'', \quad C = 49° \, 6' \, 24''.}$

উদা. 3. একটি ত্রিভুজের দুইটি বাহু 3 সেমি. ও 5 সেমি. এবং তাহাদের অন্তর্ভূত কোণটি 120° ; অন্যান্য কোণগুলি নির্ণয় কর। দেওয়া আছে, log 48 = 1·6812412, L tan 8° 12′ = 9·1586706, এবং 1′-এর জন্য অন্তর = ·0008940.

[C. U., 1940, '49]

এক্ষেত্রে মনে কর, $b = 5$ সেমি., C = 3 সেমি., সুতরাং, 120° = A.

এখন, $\tan \frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{b+c} \cot \frac{A}{2} = \frac{5-3}{5+3} \cot 60° = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{48}}$;

$\therefore \quad \text{L} \tan \frac{B-C}{2} = 10 + \log \frac{1}{\sqrt{48}} = 10 - \frac{1}{2} \log 48$

$= 10 - \frac{1}{2} \times 1\cdot 6812412 = 10 - \cdot 8406206$

$= 9\cdot 1593794.$

দেওয়া আছে, L tan 8° 12′ = 9·1586706 এবং 1′-এর অন্তর = ·0008940. মনে কর, $\frac{B-C}{2} = 8° \, 12' \, x''$.

$\therefore \quad x''$-এর অন্তর = 9·1593794 − 9·1586706 = ·0007088 ;

$\therefore \quad \frac{x}{60} = \frac{\cdot 0007088}{\cdot 0008940}$, বা, $x = \frac{7088}{8940} \times 60 = 47\cdot 6$ (প্রায়) ;

$\therefore \quad \frac{B-C}{2} = 8° \, 12' \, 47\cdot 6''.$

$\frac{B+C}{2} = 90° - \frac{A}{2} = 90° - 60° = 30°.$

$\therefore \quad \mathbf{B = 38° \, 12' \, 47\cdot 6'', \; C = 21° \, 47' \, 12\cdot 4''.}$

প্রশ্নমালা 14

1. ABC ত্রিভুজে, $a = 19$, B = 52° 28′ এবং C = 93° 40′ ; b নির্ণয় কর। দেওয়া আছে, log 19 = 1·2787536, L sin 52° 28′ = 9·8992727, log 27037 = 4·4319585, log 27038 = 4·4319746, L sin 33° 52′ = 9·7460595.

[Pat. U., 1936]

2. যদি $b=10$, $A=45°$, $B=66° \ 42' \ 20''$; a নির্ণয় কর। দেওয়া আছে, $\log 2 = \cdot3010300$, $\log 7\cdot698622 = \cdot8864131$, $L \sin 66° \ 42' = 9\cdot9630538$, $1'$-এর জন্য অন্তর $= 544$. [C. U., 1906]

3. যদি $B=45°$, $C=10°$, এবং $a=200$ সেমি. ; b-র দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। দেওয়া আছে, $\log 2 = \cdot3010300$, $\log 1726\cdot4 = 3\cdot2371414$, $\log 1726\cdot5 = 3\cdot2371666$, $L \sin 55° = 9\cdot9133645$. [C. U., 1947]

4. একটি ত্রিভুজের কোণসমূহ $40°, 60°, 80°$, এবং বৃহত্তম বাহুর দৈর্ঘ্য 22 মিটার ; ক্ষুদ্রতম বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। দেওয়া আছে,

$L \sin 40° = 9\cdot8080675$, $L \sin 80° = 9\cdot9933515$,

$\log 22 = 1\cdot3424227$, $\log 14359 = 4\cdot1571242$, এবং

$1'$-এর জন্য অন্তর $= \cdot0000302$. [Bombay, 1899]

5. একটি ত্রিভুজের দুইটি বাহু যথাক্রমে 5 মিটার ও 4 মিটার এবং উহাদের অন্তর্ভূত কোণটি $60°$; অপর কোণগুলি নির্ণয় কর। দেওয়া আছে,

$\log 3 = \cdot47712$, $L \tan 10° \ 53' = 9\cdot28390$, $L \tan 10° \ 54' = 9\cdot28458$.

6. একটি সমতল ত্রিভুজে, $b=540$, $c=420$, এবং $A=52° \ 6'$; B এবং C নির্ণয় কর। দেওয়া আছে, $L \tan 26° \ 3' = 9\cdot6891430$, $L \tan 14° \ 20' = 9\cdot4074189$, $L \tan 14° \ 21' = 9\cdot4079543$.

[C. U., 1934 ; Pat. U., 1950]

7. একটি ত্রিভুজের a এবং b বাহুর দৈর্ঘ্যের অনুপাত $7:3$ এবং উহাদের অন্তর্ভূত কোণ $C=60°$; A ও B নির্ণয় কর। দেওয়া আছে, $\log 2 = \cdot3010300$, $\log 3 = \cdot4771213$, $L \tan 34° \ 42' = 9\cdot8403776$, $1'$-এর জন্য অন্তর $= 2699$.

[Pat. U. 1940 ; B. H. U., 1940]

8. একটি সমতল ত্রিভুজের দুইটি বাহু 14 ও 11 এবং উহাদের অন্তর্ভূত কোণটি $60°$; অবশিষ্ট কোণগুলি নির্ণয় কর। দেওয়া আছে, $\log 2 = \cdot3010300$, $\log 3 = \cdot4771213$, $L \tan 11° \ 44' = 9\cdot3174299$, $L \tan 11° \ 45' = 9\cdot3180640$.

[C. U., 1944 ; B. H. U., 1948]

9. একটি ত্রিভুজের দুইটি বাহুর দৈর্ঘ্য 18 সেমি. এবং 2 সেমি. এবং উহাদের অন্তর্ভূত কোণটি $55°$; অবশিষ্ট কোণগুলি নির্ণয় কর। দেওয়া আছে, $\log 2 = \cdot3010300$, $L \cot 27° \ 30' = 10\cdot2835233$, $L \tan 56° \ 46' = 10\cdot1863769$ এবং $1'$-এর জন্য অন্তর $= \cdot0002763$. [C. U., 1942]

10. যদি $b=\sqrt{3}$, $c=1$ এবং $A=30°$ হয়, ত্রিভুজটির সমাধান কর।

[C. U., 1951]

10·7. প্রদত্ত দুই বাহু এবং বাহুদ্বয়ের একটির বিপরীত কোণ হইতে ত্রিভুজের সমাধান কর।

কোন ত্রিভুজের দুই বাহু a, b এবং a বাহুর বিপরীত কোণ A দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি সমাধান করিতে হইবে।

আমরা জানি, $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$.

$$\therefore \quad \sin B=\frac{b}{a}\sin A. \quad \cdots \quad \cdots \quad \text{(i)}$$

$$\therefore \quad L\sin B=\log b-\log a+L\sin A. \quad \cdots \quad \text{(ii)}$$

a, b এবং A-এর মান জানা থাকায়, এই সমীকরণ হইতে B-এর মান জানা যাইবে। এইরূপে A ও B-এর মান জানিলে, $\angle$C-এর মান সহজেই জানা যাইবে। কারণ,

$$\angle C=180^\circ-(A+B).$$

আবার, $c=\dfrac{a\sin C}{\sin A}$,

বা, $\log c=\log a+L\sin C-L\sin A$. $\cdots$ (iii)

এই সমীকরণ হইতে c-এর মান জানা যাইবে।

প্রথম সমীকরণ হইতে ত্রিভুজ সম্পর্কে প্রদত্ত উপাত্ত বিষয়ে তিনটি সম্ভাবনা দেখা যাইতেছে। প্রদত্ত উপাত্ত হইতে

(1) কোন ত্রিভুজই অঙ্কন করা সম্ভব নহে ;

(2) মাত্র একটি ত্রিভুজ অঙ্কন করা সম্ভব ;

(3) দুইটি ত্রিভুজ অঙ্কন করা সম্ভব।

(1) যদি $b\sin A>a$ অর্থাৎ $a<b\sin A$ হয়, তাহা হইলে,

$$\sin B=\frac{b\sin A}{a}>1$$

হইবে ; অর্থাৎ $\sin$ B-এর মান 1 অপেক্ষা বড় হইবে। কিন্তু বাস্তব ক্ষেত্রে কোন কোণের sine, 1 অপেক্ষা বড় হইতে পারে না। সুতরাং, এরূপ কোণের অস্তিত্ব অসম্ভব বলিয়া এক্ষেত্রে **কোন ত্রিভুজই অঙ্কন করা সম্ভব হইবে না।**

(2) যদি $b\sin A=a$ হয়, তাহা হইলে $\sin B=\dfrac{b\sin A}{a}=1$ হইবে ; অর্থাৎ $B=90^\circ$ হইবে। এক্ষেত্রে **একটিমাত্র সমকোণী ত্রিভুজ অঙ্কন করা সম্ভব** যদি $b>a$ হয়। কিন্তু $b=a$ হইলে **কোন ত্রিভুজই অঙ্কন করা সম্ভব হইবে না।**

(3) যদি $b\sin A<a$ অর্থাৎ $a>b\sin A$ হয়, তাহা হইলে,

$$\sin B=\frac{b\sin A}{a}<1$$

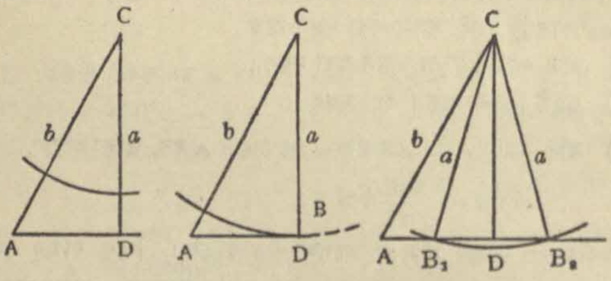
হইবে ; অর্থাৎ sin B-এর মান 1 অপেক্ষা কম হইবে। কিন্তু $\sin(\pi - B) = \sin B$ বলিয়া, $\pi - B$ ও B উভয় কোণের sine-ই সমান হইবে। এক্ষেত্রে ইহাদের মধ্যে একটি কোণ সূক্ষ্মকোণ হইবে এবং অপর কোণটি স্থূলকোণ হইবে।

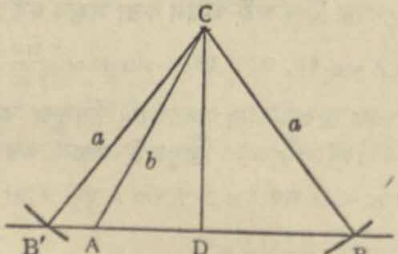
যদি $b < a$ হয়, তবে $B < A$ হইবে। সুতরাং, B কোণটিকে অবশ্যই সূক্ষ্মকোণ হইতে হইবে। আবার $b = a$ হইলেও $B = A$ হইবে, এবং এক্ষেত্রেও B কোণটি সূক্ষ্মকোণ হওয়া আবশ্যক। সুতরাং, $b \leqslant a$ হইলে B কোণের দুইটি মানের মধ্যে 90° অপেক্ষা কম মান (সূক্ষ্মকোণ) হইতে হইবে। অতএব, এক্ষেত্রে **একটিই মাত্র** ত্রিভুজ অঙ্কন করা যাইবে।

কিন্তু যদি $b > a$, তাহা হইলে $B > A$ হইবে। এক্ষেত্রে A কোণ সূক্ষ্মকোণও হইতে পারে, স্থূলকোণও হইতে পারে। সুতরাং, এক্ষেত্রে **দুইটি ত্রিভুজ** অঙ্কন করা সম্ভব হইবে। সুতরাং, $a > b \sin A$ কিন্তু $a < b$ হইলে, প্রদত্ত উপাত্ত হইতে দুইটি ত্রিভুজ অঙ্কন করা সম্ভব। ত্রিভুজের সমাধানে ইহাকে **দ্ব্যর্থক ক্ষেত্র** (Ambiguous case) বলা হয়। যেক্ষেত্রে দুইটি বাহু ও ক্ষুদ্রতর বাহুটির বিপরীত কোণ দেওয়া থাকে, কেবলমাত্র সেই ক্ষেত্রেই দ্ব্যর্থক সমাধানের উদ্ভব হইতে পারে।

10·8. জ্যামিতিক আলোচনা।

উপরের তথ্যগুলি জ্যামিতির সাহায্যে সহজেই দেখানো যায়।





প্রদত্ত b বাহুর সমান করিয়া AC সরল রেখা আঁকা হইয়াছে। প্রদত্ত কোণ A-এর সমান করিয়া $\angle CAD$ আঁকা হইয়াছে। CD সরল রেখা C হইতে AD-এর উপর লম্ব। সুতরাং, $CD = b \sin A$. C-কে কেন্দ্র করিয়া প্রদত্ত বাহু a-এর সমান ব্যাসার্ধ লইয়া বৃত্তচাপ অঙ্কিত করা হইল।

(*a*) $a < b \sin A$ হইলে, এই বৃত্ত AD রেখাকে আদৌ ছেদ করিবে না। সুতরাং, এক্ষেত্রে কোন ত্রিভুজই পাওয়া যাইবে না।

(*b*) $a = b \sin A$ হইলে, এই বৃত্ত AD-কে D বিন্দুতে স্পর্শ করিবে। সুতরাং, এক্ষেত্রে একটিমাত্র ত্রিভুজ পাওয়া যাইবে এবং তাহা একটি সমকোণী ত্রিভুজ হইবে।

(*c*) $a > b \sin A$ কিন্তু $a < b$ হইলে, এই বৃত্ত AD-কে B_1 ও B_2 বিন্দুতে ছেদ করিবে এবং এক্ষেত্রে দুইটি ত্রিভুজ পাওয়া যাইবে এবং দুইটি ত্রিভুজেরই অঙ্গসমূহ প্রদত্ত উপাত্তের সহিত সঙ্গতিযুক্ত হইবে।

(*d*) $a = b$ হইলে, বৃত্তটি AD-কে A বিন্দু ছাড়া আর কেবলমাত্র একটি বিন্দু B-তে ছেদ করিবে। সুতরাং, এক্ষেত্রে একটিই মাত্র ত্রিভুজ পাওয়া যাইবে।

(*e*) $a > b$ হইলে, বৃত্তটি AD-কে B′ ও B দুইটি বিন্দুতে ছেদ করিবে। কিন্তু কেবলমাত্র CAB ত্রিভুজটিই উপাত্তের সহিত সঙ্গতিপূর্ণ হইবে। কারণ $\angle CAB = \angle A$; কিন্তু CAB′ ত্রিভুজে $\angle CAB'$ কোণ A কোণের সমান নহে। সুতরাং, এক্ষেত্রেও একটিমাত্র ত্রিভুজ পাওয়া যাইবে।

উদা. 4. ABC ত্রিভুজে, $b = 16$, $c = 25$, এবং $B = 35° 15'$; অপর কোণগুলি নির্ণয় কর। দেওয়া আছে,

$$\log 2 = \cdot 30103, \qquad L \sin 33° 15' = 9\cdot 7390129,$$

$$L \sin 58° 56' = 9\cdot 9327616 \text{ এবং } L \sin 58° 57' = 9\cdot 9328376.$$

আমরা জানি, $\dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$; $\therefore \quad \sin C = \dfrac{c \sin B}{b}$.

$$\begin{aligned}
\therefore \quad L \sin C &= \log c - \log b + L \sin B \\
&= \log 25 - \log 16 + L \sin 33° 15' \\
&= (\log 100 - 2 \log 2) - 4 \log 2 + L \sin 33° 15' \\
&= 2 - 6 \log 2 + L \sin 33° 15' \\
&= 2 - 6 \times \cdot 30103 + 9\cdot 7390129 \\
&= 2 - 1\,80618 + 9\cdot 7390129 \\
&= 9\cdot 9328329.
\end{aligned}$$

দেওয়া আছে, $L \sin 58° 57' = 9\cdot 9328376$

এবং $L \sin 58° 56' = 9\cdot 9327616$;

$\therefore$ 1′-এর অন্তর $= \cdot 0000760$.

মনে কর, $C = 58° 56' x''$.

$\therefore$ x''-এর অন্তর $= 9{\cdot}9328329 - 9{\cdot}9327616 = {\cdot}0000713$;

$\therefore$ $\frac{x}{60} = \frac{{\cdot}0000713}{{\cdot}0000760}$, বা, $x = \frac{713}{760} \times 60 = 56{\cdot}3$ (প্রায়);

$\therefore$ $\mathbf{C = 58° 56' 56{\cdot}3''}$;

$\therefore$ $A = 180° - (B + C) = 180° - (33° 15' + 58° 56' 56{\cdot}3'')$
$= 180° - 92° 11' 56{\cdot}3'' = \mathbf{87° 48' 3{\cdot}7''}$;

কিন্তু এক্ষেত্রে $c > b$ বলিয়া, $C > B$;

$\therefore$ C কোণের অপর মানটি লইয়াও আর একটি ত্রিভুজ অঙ্কন করা যাইবে।

$C' = 180° - C = 180° - 58° 56' 56{\cdot}3'' = \mathbf{121° 3' 3{\cdot}7''}$

এবং $A' = 180° - (B + C) = 180° - (33° 15' + 121° 3' 3{\cdot}7'')$
$= 180° - 154° 18' 3{\cdot}7'' = \mathbf{25° 41' 56{\cdot}3''}$.

উদা. 5. যদি $a = 5$, $b = 7$, এবং $A = 30°$, B-এর মান ডিগ্রী ও মিনিটে নির্ণয় কর। দেওয়া আছে, $\sin 44° = {\cdot}6947$, $\sin 45° = {\cdot}7071$.

[C. U., 1929]

আমরা জানি, $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$.

$\therefore$ $\sin B = \frac{b \sin A}{a} = \frac{7 \sin 30°}{5} = \frac{7}{10} = {\cdot}7$.

দেওয়া আছে, $\sin 45° = {\cdot}7071$, $\sin 44° = {\cdot}6947$.

$\therefore$ $1°$-এর অন্তর $= {\cdot}0124$.

মনে কর, $B = 44° x'$; $\therefore$ x' এর অন্তর $= {\cdot}7 - {\cdot}6947 = {\cdot}0053$.

$\therefore$ $\frac{x}{60} = \frac{{\cdot}0053}{{\cdot}0124}$; $\therefore$ $x = \frac{53}{124} \times 60 = 25{\cdot}6$ (প্রায়);

$\therefore$ $\mathbf{B = 44° 25{\cdot}6'}$.

কিন্তু $b > a$ হওয়ায় $B > A$; সুতরাং, B কোণটি স্থূলকোণও হইতে পারে। B-এর অপর মানকে B′ দ্বারা সূচিত করিলে,

$B' = 180° - B = 180° - 44° 25{\cdot}6'$
$= \mathbf{135° 34{\cdot}4'}$.

10·9. প্রদত্ত তিনটি কোণ হইতে ত্রিভুজের সমাধান।

কেবলমাত্র তিনটি কোণ দেওয়া থাকিলে কোন ত্রিভুজের বাহু-তিনটিকে যথাযথভাবে নির্ণয় করা যায় না। কারণ কোন ত্রিভুজ ABC-এর সদৃশ সকল ত্রিভুজেরই

কোণ-তিনটি যথাক্রমে ABC-এর তিনটি কোণের সমান। এই সকল সদৃশ ত্রিভুজের বাহুগুলি সমানুপাতিক মাত্র, সমান নহে। সুতরাং, তিনটি কোণ দেওয়া থাকিলে 'সাইন-সূত্রের' সাহায্যে ত্রিভুজের বাহু-তিনটির কেবলমাত্র অনুপাত নির্ণয় করা যায়।

উদা. 6. একটি ত্রিভুজের কোণগুলির অনুপাত 1 : 2 : 3 ; বাহুগুলির অনুপাত নির্ণয় কর।

মনে কর, কোণ-তিনটি যথাক্রমে θ, 2θ এবং 3θ.

$$\therefore \quad 180^\circ = \theta + 2\theta + 3\theta = 6\theta, \quad \therefore \quad \theta = 30^\circ.$$

সুতরাং, কোণগুলি যথাক্রমে 30°, 60° এবং 90°.

আমরা জানি, $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$,

অর্থাৎ, $$\mathbf{a : b : c} = \sin A : \sin B : \sin C$$
$$= \sin 30^\circ : \sin 60^\circ : \sin 90^\circ$$
$$= \frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} : 1 = \mathbf{1 : \sqrt{3} : 2}.$$

প্রশ্নমালা 15

1. যদি $A = 45^\circ$, $b = 1 + \sqrt{3}$, $a = 2$; B, C এবং c নির্ণয় কর।

2. একটি ত্রিভুজে যদি $a = 5$, $b = 4$ এবং $A = 45^\circ$ হয় ; অপর কোণগুলি নির্ণয় কর। দেওয়া আছে,

$\log 2 = \cdot 30103$, $L \sin 34^\circ\ 26' = 9\cdot 7523919$,
$L \sin 34^\circ\ 27' = 9\cdot 7525761$. [B. H. U., 1951]

3. $a = 13$, $b = 20$, $A = 36^\circ\ 52'\ 11\cdot 5''$; ত্রিভুজটির সমাধান কর। দেওয়া আছে, $\log 2 = 0\cdot 3010300$, $\log 11 = 1\cdot 0413927$, $\log 13 = 1\cdot 1139434$, $\log 21 = 1\cdot 3222193$, $L \sin 67^\circ\ 22'\ 48\cdot 5'' = 9\cdot 9652379$, $L \sin 75^\circ\ 45' = 9\cdot 9864272$, $L \sin 30^\circ\ 30'\ 37'' = 9\cdot 7056006$.

4. একটি ত্রিভুজের $a = 5$ সেমি., $b = 8$ সেমি. এবং $A = 30^\circ$; প্রথমে c-এর মান নির্ণয় করিয়া ত্রিভুজটির সমাধান কর। দেওয়া আছে, $\sqrt{3} = 1\cdot 732051$, $\sin 83^\circ\ 7' = \cdot 9927922$, $1'$-এর জন্য অন্তর $= \cdot 0000349$.

5. যদি $a = 5$ মিটার, $b = 8$ মিটার, $A = 35^\circ$; c-এর ক্ষুদ্রতর মান নির্ণয় কর। দেওয়া আছে,

$\log 2 = \cdot 30103$, $L \sin 35^\circ = 9\cdot 758591$,
$\log 456706 = 5\cdot 659637$, $L \sin 66^\circ\ 35' = 9\cdot 962672$,
$L \sin 31^\circ\ 35'\ 43'' = 9\cdot 719261$, $L \sin 66^\circ\ 36' = 9\cdot 962727$.

[A. U. 1913]

6. ABC ত্রিভুজের a, b এবং A দেওয়া আছে ; প্রমাণ কর যে, দ্ব্যর্থক ক্ষেত্রে c-এর মানদ্বয়ের অন্তর $2\sqrt{a^2 - b^2 \sin^2 A}$. [B. H. U., 1941]

7. দেখাও যে, যে ক্ষেত্রে দুইটি সমাধান সম্ভব, সেখানে C-এর উভয় মান দ্বারাই

$$\frac{(a+b)^2}{1+\cos C} + \frac{(b-a)^2}{1-\cos C} = \frac{2a^2}{\sin^2 A}$$ সমীকরণটি সিদ্ধ হয়।

[B. H. U., 1942]

8. a, b, A দেওয়া আছে ; দ্ব্যর্থক ক্ষেত্রে যদি তৃতীয় বাহুর মান c_1, c_2 হয়, প্রমাণ কর যে, যদি $c_1 > c_2$ হয়, তাহা হইলে,

(i) $c_1 - c_2 = 2a \cos B$. [B. H. U., 1928]

(ii) $c_1^2 + c_2^2 - 2c_1c_2 \cos 2A = 4a^2 \cos^2 A$. [Pat. U., 1946]

9. একটি ত্রিভুজের কোণগুলির অনুপাত 7 : 3 : 2 হইলে, বাহুগুলির অনুপাত নির্ণয় কর।

10. একটি ত্রিভুজের কোণগুলির অনুপাত 2 : 3 : 4 হইলে, বাহুগুলির অনুপাত নির্ণয় কর।

একাদশ অধ্যায়

উচ্চতা ও দূরত্ব

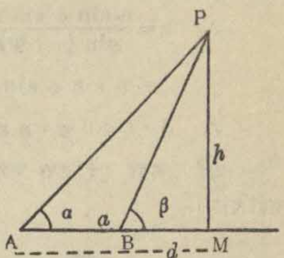
(Height and Distance)

11·1. দূরস্থ বস্তুর উচ্চতা ও দূরত্ব নির্ণয় (Determination of the height and distance of a distant object)।

মনে কর, পর্যবেক্ষণ দ্বারা কোন A বিন্দুর অনুভূমিক তল হইতে দূরস্থ বস্তু P-এর উচ্চতা এবং A হইতে P-এর পাদবিন্দুর দূরত্ব (AM) নির্ণয় করিতে হইবে। প্রথমে A বিন্দু হইতে P-এর উন্নতি লক্ষ্য করিতে হয়। পরে A বিন্দুর সহিত একই অনুভূমিক তলে অবস্থিত অপর কোন একটি সুগম্য বিন্দু B হইতে P-এর উন্নতির পরিমাপ করিতে হয়। A ও B বিন্দু হইতে P-এর উন্নতি এবং AB দূরত্বের পরিমাপ হইতে P-এর উচ্চতা নির্ণয় করা যায়।

(*a*) A ও B বিন্দুদ্বয় P-এর সহিত একই উল্লম্ব তলে অবস্থিত।

P হইতে AB রেখার উপর PM লম্ব। মনে কর, A এবং B বিন্দু হইতে P বিন্দুর উন্নতি যথাক্রমে α ও β ; এবং AB $= a$.



মনে কর, A বিন্দুর অনুভূমিক তল হইতে P-এর উচ্চতা PM $= h$ এবং AM $= d$.

চিত্র হইতে দেখা যাইতেছে,

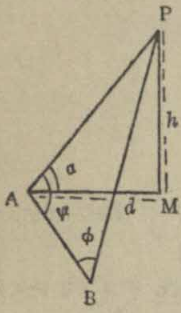
$$a = AB = AM - BM$$
$$= h \cot \alpha - h \cot \beta$$
$$= h\left(\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \frac{\cos \beta}{\sin \beta}\right)$$
$$= h\left(\frac{\cos \alpha \sin \beta - \sin \alpha \cos \beta}{\sin \alpha \sin \beta}\right) = h\,\frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin \alpha \sin \beta};$$

$$\therefore \quad h = \frac{\mathbf{a \sin \alpha \sin \beta}}{\mathbf{\sin(\beta - \alpha)}} = \mathbf{a \sin \alpha \sin \beta \operatorname{cosec}(\beta - \alpha)}.$$

$$d = AM = h \cot \alpha = a \sin \alpha \sin \beta \operatorname{cosec}(\beta - \alpha) \cot \alpha$$
$$= \mathbf{a \cos \alpha \sin \beta \operatorname{cosec}(\beta - \alpha)}.$$

লগারিদ্‌মের সাহায্যে এখন সহজেই h বা d-এর মান নির্ণয় করা যায়।

(*b*) **A ও B বিন্দুদ্বয় P-এর সহিত বিভিন্ন উলম্ব তলে অবস্থিত।**



P এবং A যে উলম্ব তলে অবস্থিত, B তাহা হইতে ভিন্ন উলম্ব তলে অবস্থিত।

এক্ষেত্রে P-এর উচ্চতা বা দূরত্ব জানিতে হইলে, A হইতে P-এর উন্নতি α, $\angle PAB=\psi$, $\angle PBA=\phi$ এবং AB-এর দূরত্ব a-এর পরিমাপ করা প্রয়োজন। এই চারিটি বিষয় জানিলে P-এর উচ্চতা PM (h) বা দূরত্ব AM (d) সহজেই জানা যাইবে।

আমরা sine-এর সূত্র হইতে জানি, PAB ত্রিভুজে,

$$\frac{AP}{\sin\phi}=\frac{BP}{\sin\psi}=\frac{AB}{\sin APB};$$

$$\therefore\quad AP=\frac{AB\sin\phi}{\sin APB}=\frac{a\sin\phi}{\sin\{180^\circ-(\phi+\psi)\}}=\frac{a\sin\phi}{\sin(\phi+\psi)}.$$

আবার, PAM ত্রিভুজে, $AP=PM\ \mathrm{cosec}\ \alpha=h\ \mathrm{cosec}\ \alpha$;

$$\therefore\quad h\ \mathrm{cosec}\ \alpha=\frac{a\sin\phi}{\sin(\phi+\psi)}.$$

$$\therefore\quad \mathbf{h=\frac{a\sin\phi\sin\alpha}{\sin(\phi+\Psi)}}$$

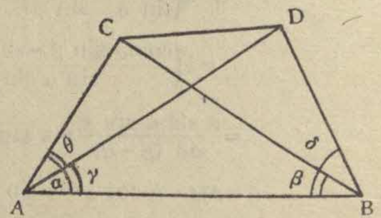
$$\mathbf{=a\sin\phi\sin\alpha\ cosec\ (\phi+\Psi).}$$

$$\therefore\quad \mathbf{d}=h\cot\alpha=\mathbf{a\sin\phi\cos\alpha\ cosec\ (\phi+\Psi).}$$

এই সূত্রদ্বয় হইতেও লগারিদ্‌মের সাহায্যে সহজেই h ও d-এর মান নির্ণয় করা যায়।

11·2. দুইটি অগম্য বস্তুর মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় (Determination of distance between two inaccessible objects)।

C ও D দুইটি অগম্য বস্তু। উহাদের মধ্যের দূরত্ব CD নির্ণয় করিতে হইবে। কোন বিন্দু A এবং A হইতে সুগম আর একটি বিন্দু B হইতে পর্যবেক্ষণ করিয়া $\angle CAB=\alpha$, $\angle DAB=\gamma$, $\angle CAD=\theta$, $\angle CBA=\beta$ এবং $\angle DBA=\delta$ নির্ণয় করা হয়। আবার AB-এর দূরত্ব a জানিলে CD-এর দূরত্ব জানা যাইবে।



CAB ত্রিভুজে, $\frac{AC}{\sin CBA} = \frac{BC}{\sin CAB} = \frac{AB}{\sin ACB}$;

$$\therefore \quad AC = \frac{AB \sin CBA}{\sin ACB} = \frac{a \sin \beta}{\sin (a+\beta)} \qquad \cdots \text{(i)}$$

$[\because \ \angle ACB = 180° - a - \beta]$

আবার DAB ত্রিভুজে, $\frac{AD}{\sin DBA} = \frac{BD}{\sin DAB} = \frac{AB}{\sin ADB}$;

$$\therefore \quad AD = \frac{AB \sin DBA}{\sin ADB} = \frac{a \sin \delta}{\sin (\gamma+\delta)} \qquad \cdots \text{(ii)}$$

$[\because \ \angle ADB = 180° - \gamma - \delta]$

এখন, ACD ত্রিভুজে,

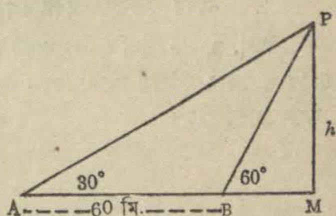
$$CD^2 = AC^2 + AD^2 - 2AC.AD \cos \theta. \qquad \cdots \text{(iii)}$$

(i) ও (ii) সমীকরণ হইতে AC ও AD-এর মান পাওয়া যায়। AC ও AD-এর এই মান তৃতীয় সমীকরণে বসাইলে CD-এর মান পাওয়া যাইবে।

উদা. 1. কোন অট্টালিকার সহিত উলম্ব সমতলে অবস্থিত দুইটি স্থান A ও B হইতে সেই অট্টালিকার উচ্চতা যথাক্রমে 30° ও 60°. যদি A ও B-এর মধ্যে দূরত্ব 60 মিটার হয়, তবে অট্টালিকার উচ্চতা কত?

মনে কর, উচ্চতা $= h$.

পার্শ্বস্থ চিত্র হইতে দেখা যাইতেছে,



$$AB = AM - BM$$
$$= PM \cot 30° - PM \cot 60°$$
$$= h (\cot 30° - \cot 60°)$$
$$= h\left(\sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = h \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

$$\therefore \quad h = \frac{\sqrt{3}}{2} AB = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 60 \text{ মিটার}$$

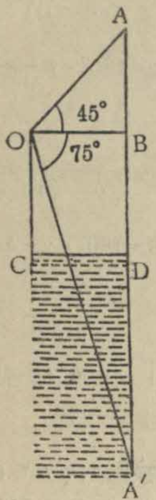
$= 30$ মিটার $\times 1{\cdot}732$ (প্রায়)

$= 51{\cdot}96$ মিটার (প্রায়)।

∴ উচ্চতা = 51·96 মিটার (প্রায়)।

উদা. 2. একটি হ্রদের 200 মিটার উপরে কোন স্থান হইতে একটি এরোপ্লেনের উন্নতি-কোণ 45° এবং ইহার প্রতিবিম্বের অবনতি-কোণ 75°; হ্রদের জলতল হইতে

এরোপ্লেনটি কত উচ্চে আছে, তাহা নির্ণয় কর। ধরিয়া লও, জলতল হইতে এরোপ্লেনটি যত উচ্চে আছে, জলতল হইতে উলম্বভাবে তত নিচে ইহার প্রতিবিম্ব।



মনে কর, এরোপ্লেনটি A এবং A′ উহার প্রতিবিম্ব ; CD জলতল। AA′ উলম্ব রেখা। DA = DA′. পর্যবেক্ষণ-কেন্দ্র O জলতল হইতে 200 মিটার উচ্চে। O বিন্দুতে A-এর উন্নতি-কোণ 45° এবং A′-এর অবনতি-কোণ 75°.

অতএব, AA′-এর উপর OB লম্ব হইলে, $\angle BOA = 45°$ এবং $\angle BOA' = 75°$, এবং BD = 200 মিটার ;

$$\therefore \frac{AB}{A'B} = \frac{OB \tan 45°}{OB \tan 75°} = \frac{\tan 45°}{\tan 75°};$$

$$\therefore \frac{AB + A'B}{A'B - AB} = \frac{\tan 45° + \tan 75°}{\tan 75° - \tan 45°},$$

বা, $$\frac{AA'}{2BD} = \frac{\sin 45° \cos 75° + \sin 75° \cos 45°}{\sin 75° \cos 45° - \sin 45° \cos 75°},$$

বা, $$\frac{2AD}{2BD} = \frac{\sin(45° + 75°)}{\sin(75° - 45°)} = \frac{\sin 120°}{\sin 30°} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}.$$

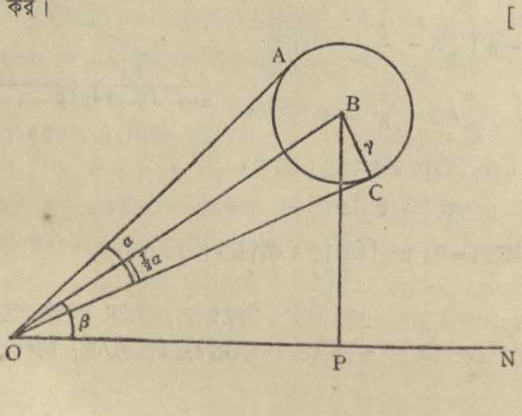
$$\left[\begin{array}{l} AB + A'B = AD + A'D = 2AD, \\ A'B - AB = (A'D + BD) - (AD - BD) = 2BD \end{array}\right]$$

$\therefore$ AD = $\sqrt{3}$BD = $\sqrt{3} \times 200$ মিটার

= 200 × 1·732 মিটার = 346·4 মিটার।

$\therefore$ নির্ণেয় উচ্চতা = **346·4 মিটার।**

উদা. 3. r সেমি. ব্যাসার্ধ-বিশিষ্ট একটি গোলকাকৃতি বেলুন একজন দর্শকের চোখে α কোণ উৎপন্ন করে, যখন ইহার কেন্দ্রের উন্নতি-কোণ β. বেলুনটির কেন্দ্রের উচ্চতা নির্ণয় কর। [C. U., 1953]



মনে কর, O দর্শকের চক্ষু। AC বেলুন O বিন্দুতে a কোণ ধারণ করে; অর্থাৎ O হইতে B কেন্দ্রীয় AC গোলকে OA এবং OC স্পর্শক টানিলে $\angle$AOC = a হইবে।

ON অনুভূমিক রেখা O বিন্দুর মধ্য দিয়া গিয়াছে। B হইতে ON-এর উপর BP লম্ব টানা হইল। BP-ই বেলুনের কেন্দ্রের উদ্দিষ্ট উচ্চতা। OB যোগ কর।

শর্তানুসারে, $\angle$BOP = β. OB রেখা a কোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়াছে।

$\therefore$ BOC = $\frac{1}{2}a$.

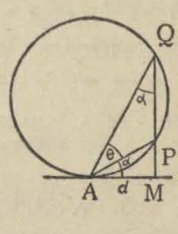
এখন, BOC ত্রিভুজে, $OB = BC \operatorname{cosec}\frac{a}{2} = r \operatorname{cosec}\frac{a}{2}$;

$\therefore$ BOP ত্রিভুজে, $BP = OB \sin\beta = r \operatorname{cosec}\frac{a}{2}\sin\beta$.

$\therefore$ নির্ণেয় উচ্চতা $= \mathbf{r \operatorname{cosec}\frac{a}{2}\sin\beta}$.

উদা. 4. পতাকাদণ্ডযুক্ত একটি অট্টালিকার দিকে অগ্রসর হইতে হইতে এক ব্যক্তি দেখিলেন যে, অট্টালিকার পাদদেশ হইতে d পরিমিত দূরত্বে পতাকাদণ্ডটি বৃহত্তম কোণ ধারণ করে। এই বৃহত্তম কোণ θ হইলে, অট্টালিকার উচ্চতা এবং পতাকাদণ্ডের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। [P. U., 1921]

মনে কর, PM একটি অট্টালিকা এবং উহার উপর অবস্থিত PQ একটি পতাকাদণ্ড। PM হইতে A বিন্দুর দূরত্ব যেন d; সুতরাং, প্রদত্ত শর্তানুসারে A বিন্দুতে PQ-এর সম্মুখকোণ বৃহত্তম (অর্থাৎ AM-এর উপর যে-কোন বিন্দুতে PQ-এর সম্মুখ-কোণ θ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর)। PQ ও PM-এর মান নির্ণয় করিতে হইবে। জ্যামিতির সাহায্যে জানা যায় যে, P, Q ও A বিন্দুত্রয় দিয়া অঙ্কিত বৃত্তটি যদি AM-কে A বিন্দুতে স্পর্শ করে, তবেই AM-এর উপর A বিন্দুতে PQ-এর সম্মুখকোণটি বৃহত্তম হইবে।



মনে কর, $\angle PAM = a$, $\therefore$ $\angle AQP = \angle PAM = a$,

$\because$ $\angle QAM + \angle AQM = 90^\circ$; $\therefore$ $\theta + 2a = 90^\circ$.

এক্ষণে, $PQ = MQ - PM = AM \tan QAM - AM \tan PAM$

$$= d\tan(\theta+a) - d\tan a = d\left\{\frac{\sin(\theta+a)}{\cos(\theta+a)} - \frac{\sin a}{\cos a}\right\}$$

$$= d\left\{\frac{\sin(\theta+a)\cos a - \sin a\cos(\theta+a)}{\cos(\theta+a)\cos a}\right\}$$

$$= d\frac{\sin\theta}{\cos(\theta+\alpha)\cos\alpha} = d\frac{2\sin\theta}{2\cos(\theta+\alpha)\cos\alpha}$$

$$= \frac{2d\sin\theta}{\cos(\theta+2\alpha)+\cos\theta} = \frac{2d\sin\theta}{\cos 90^\circ+\cos\theta}$$

$$[\because \quad \theta+2\alpha=90^\circ]$$

$$= \frac{2d\sin\theta}{\cos\theta} = 2d\tan\theta. \quad [\because \quad \cos 90^\circ = 0]$$

আবার, $\because \quad \theta+2\alpha=90^\circ, \quad \therefore \quad \alpha = 45^\circ - \frac{1}{2}\theta = \frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}$.

$\therefore \quad \text{PM} = d\tan\alpha = d\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)$.

প্রশ্নমালা 16

1. A একটি অট্টালিকার চূড়া ; যে সমতলে অট্টালিকাটি অবস্থিত, B এবং C সেই সমতলে অবস্থিত দুইটি বিন্দু। B ও C হইতে A-এর উন্নতি-কোণ যথাক্রমে β ও γ দৃষ্ট হইলে, প্রমাণ কর যে,

$$\tan \text{ABC} = \frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin\gamma-\cos\alpha\sin\beta}, \quad \tan \text{ACB} = \frac{\sin\alpha\sin\gamma}{\sin\beta-\cos\alpha\sin\gamma}.$$

2. পর্বতশীর্ষের উপর দণ্ডায়মান একটি উল্লম্ব অট্টালিকার উচ্চতা c মিটার। পর্বতের পাদদেশের অনুভূমিক সমতলে A এবং B দুইটি বিন্দু। A হইতে অট্টালিকাটি ঠিক উত্তরদিকে অবস্থিত এবং অট্টালিকার ভূমি ও শীর্ষের উন্নতি-কোণ যথাক্রমে α এবং β. B হইতে অট্টালিকাটি ঠিক পশ্চিমে অবস্থিত এবং ইহার শীর্ষের উন্নতি-কোণ 45°. দেখাও যে, A ও B-এর মধ্যবর্তী দূরত্ব

$$= c\cos\alpha/\sin(\beta-\alpha).$$

3. A বিন্দুর ঠিক উত্তরে অবস্থিত একটি অট্টালিকার উন্নতি-কোণ θ এবং A-এর ঠিক পশ্চিমে অবস্থিত B বিন্দুতে ϕ ; প্রমাণ কর যে, অট্টালিকার উচ্চতা

$$= \frac{\text{AB}\sin\theta\sin\phi}{\sqrt{(\sin^2\theta-\sin^2\phi)}}.$$ [P. U., 1938 Sup.]

4. সম-ঢালবিশিষ্ট পর্বতগাত্রের কোন বিন্দু হইতে পর্বতশীর্ষোপরি খাড়া প্রস্তর-খণ্ডের চূড়ার উন্নতি-কোণ α ; শীর্ষের দিকে a মিটার অগ্রসর হইলে উন্নতি-কোণ β হয়। দেখাও যে, যদি h প্রস্তরখণ্ডের উচ্চতা হয় এবং অনুভূমিক সমতলের সহিত পর্বতের ঢালু দিক্ θ কোণে নত থাকে, তাহা হইলে

$$\cos\theta = \frac{a\sin(\alpha-\theta)\sin(\beta-\theta)}{h\sin(\beta-\alpha)}.$$

5. কোন দণ্ডের পাদদেশের সহিত একই অনুভূমিক সমতলে অবস্থিত এক বিন্দুতে ঐ দণ্ডের উপরার্ধ যে কোণ ধারণ করে, তাহার $\tan = \frac{1}{6}$. সম্পূর্ণ দণ্ডটি ঐ বিন্দুতে যে কোণ ধারণ করে, তাহার tan নির্ণয় কর। [B. H. U., 1942]

6. α পরিমাণ ঢালযুক্ত পর্বতের ঢালে দাঁড়াইয়া কোন লোক পর্বতের পাদদেশে দণ্ডায়মান কোন স্তম্ভের শীর্ষের উন্নতি-কোণ 30° দেখিল। সে a পরিমাণ দূরত্ব নিচের দিকে আসিয়া দেখিল স্তম্ভশীর্ষের উন্নতি-কোণ 60°. দেখাও যে, স্তম্ভের উচ্চতা

$$= \tfrac{1}{2}a(\sqrt{3} \sec \alpha + 4 \sin \alpha).$$

7. $2a$ পরিমাণ দীর্ঘ এক অনুভূমিক ভূমির (base) প্রত্যেক প্রান্ত হইতে কোন পর্বতশিখরের উন্নতি-কোণ θ এবং ঐ ভূমির মধ্যবিন্দু হইতে ϕ. দেখাও যে, শিখরের উল্লম্ব-উচ্চতা (vertical height)

$$= \frac{a \sin \theta \sin \phi}{\sqrt{\sin (\phi + \theta) \sin (\phi - \theta)}}.$$ [U. P. B., 1955]

8. একটি অট্টালিকার ঠিক দক্ষিণে অবস্থিত কোন বিন্দু A-তে ইহার উন্নতি-কোণ 30°. A হইতে ঠিক পশ্চিমে এবং a পরিমাণ দূরে অবস্থিত অপর কোন বিন্দু B-তে উন্নতি-কোণ 18°. দেখাও যে, অট্টালিকার উচ্চতা

$$= \frac{a}{\sqrt{(2 + 2\sqrt{5})}}.$$

9. এক সরল অনুভূমিক রাস্তার সহিত উল্লম্বভাবে অবস্থিত কোন এরোপ্লেনের দুই দিকে অবস্থিত এক কিলোমিটার অন্তর্বর্তী দুইটি প্রস্তর-ফলকের অবনতি-কোণ α ও β. দেখাও যে, রাস্তা হইতে এরোপ্লেনের উচ্চতা (কিলোমিটারে)

$$= \frac{\tan \alpha \tan \beta}{\tan \alpha + \tan \beta}.$$

10. দুইটি বস্তুর মধ্যে ব্যবধান 360 মিটার। একটি পর্বতশীর্ষ হইতে ঐ বস্তু-দ্বয়ের অবনতি-কোণ যথাক্রমে 27° 12′ এবং 18° 24′. বস্তু-দুইটি এবং পর্বতশীর্ষ একই সমতলে অবস্থিত ধরিয়া লইয়া পর্বতের উচ্চতা নির্ণয় কর।

[দেওয়া আছে, $\log 360 = 2{\cdot}5563$, $\log 339{\cdot}4 = 2{\cdot}5308$, $\log \sin 27° 12' = \bar{1}{\cdot}6600$, $\log \sin 18° 24' = \bar{1}{\cdot}4992$, $\log \sin 8° 48' = \bar{1}{\cdot}1847$.]

বিশ্লেষণমূলক দ্বিমাত্রিক জ্যামিতি

(Analytical Geometry of Two Dimensions)

প্রথম অধ্যায়

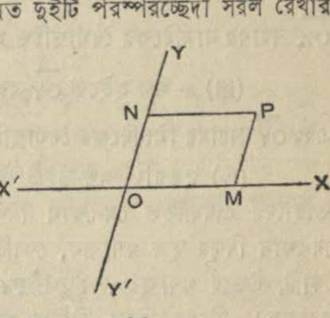
কার্তেজীয় আয়ত স্থানাঙ্ক

(Rectangular cartesian co-ordinates)

1·1. বিশ্লেষণমূলক দ্বিমাত্রিক জ্যামিতি : রেখাচিত্রের সাহায্য না লইয়া কেবলমাত্র বিন্দুনিচয়ের স্থানাঙ্কের বৈজিক বিশ্লেষণ দ্বারা যে জ্যামিতি-শাস্ত্র গড়িয়া উঠিয়াছে, তাহাকে স্থানাঙ্ক বা বিশ্লেষণমূলক জ্যামিতি বলে। সামতলিক বিন্দুমাত্রেরই, ভুজ ও কোটি, এই দুইটি মাত্র মাত্রা আছে। সেইজন্য বিশ্লেষণমূলক জ্যামিতির যে-অংশ শুধু সামতলিক বিন্দুর বিচারেই সীমাবদ্ধ তাহাকে **বিশ্লেষণমূলক দ্বিমাত্রিক জ্যামিতি** বলে।

1·2. স্থানাঙ্ক (Co-ordinates) : মাধ্যমিক স্তরে বিন্দুবিশেষের স্থানাঙ্ক-নির্ণয় এবং স্থানাঙ্ক হইতে বিন্দু-স্থাপন-প্রণালী বিশদভাবে আলোচিত হইয়াছে। পুনরালোচনা-প্রসঙ্গে এখানে একটি নূতন তথ্যের অবতারণা করা যাইতেছে।

যে-কোন সমতলে $\overleftrightarrow{XOX'}$ ও $\overleftrightarrow{YOY'}$-এর মত দুইটি পরস্পরচ্ছেদী সরল রেখার তুলনায় ঐ সমতলস্থিত যে-কোন বিন্দুর অবস্থান নির্ণয় করা যায়। উদাহরণস্বরূপ, P যেন $\overleftrightarrow{XOX'}$ ও $\overleftrightarrow{YOY'}$-এর সমতলে একটি বিন্দু। P-এর মধ্য দিয়া $\overline{PN} \parallel \overleftrightarrow{XOX'}$ এবং $\overline{PM} \parallel \overline{YOY'}$ টানিলে OMPN একটি সামান্তরিক হয়। উহার $\overline{NP}$ বাহু $\cong \overline{OM}$ বাহু এবং $\overline{MP} \cong \overline{ON}$ বাহু বলিয়া, $\overline{OM}$ ও $\overline{ON}$-এর



দৈর্ঘ্য দ্বারা P-এর অবস্থান সূচিত করা যায়। $\overleftrightarrow{XOX'}$ এবং $\overleftrightarrow{YOY'}$ এখানে, যথাক্রমে ভুজ-জ্ঞাপক ও কোটি-সূচক অক্ষ। সুতরাং P-এর ভুজ $\overline{OM}$, কোটি $\overline{ON}$; $\overline{OM}$ ও $\overline{ON}$-এর মান যথাক্রমে x ও y হইলে P-বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y).

অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণটি যদি এক সমকোণ না হয় তবে উহাদের **তির্যক্ অক্ষ** এবং স্থানাঙ্কযুগলকে **তির্যক্ স্থানাঙ্ক** বলা হয় ; সেক্ষেত্রে দেখা গেল, যে-কোন বিন্দু P-এর স্থানাঙ্ক সূচিত হয় একটি সামান্তরিকের সন্নিহিত দুই বাহুর দুইটি মান দ্বারা।

আর অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণটি যদি হয় এক সমকোণ, তবে ঐরূপ যে-কোন বিন্দু P-এর স্থানাঙ্ক সূচিত হয় একটি আয়তক্ষেত্রের একজোড়া সন্নিহিত বাহুর মান

দুইটি দ্বারা। উপরের চিত্রে সেক্ষেত্রে OMPN ক্ষেত্রটি আয়তাকার হইয়া পড়িবে। সেইজন্য এইরূপ ক্ষেত্রে, যেখানে অক্ষদ্বয় পরস্পরকে লম্বভাবে ছেদ করে সেখানে ঐ অক্ষদ্বয়কে **আয়ত অক্ষ** বলে এবং উহাদের তুলনায় ভুজ ও কোটি-সূচক মান-যুগলকে বলা হয় **আয়ত স্থানাঙ্ক** (Rectangular Co-ordinates)।

বিখ্যাত ফরাসী দার্শনিক Descartes সর্বপ্রথম উল্লিখিত দুই প্রকার অক্ষ ব্যবহার করিয়া বিন্দুসমূহের স্থানাঙ্ক-নির্ণয়-প্রণালী প্রবর্তন করেন। সেইজন্য তাঁহার নাম অনুসারে এইগুলিকে কার্তেজীয় (cartesian) স্থানাঙ্ক বলে। একই কারণে আয়ত স্থানাঙ্ক-কেও **কার্তেজীয় আয়ত স্থানাঙ্ক** (Rectangular Cartesian Co-ordinates) রূপেই প্রায়শঃ উল্লেখ করা হয়।

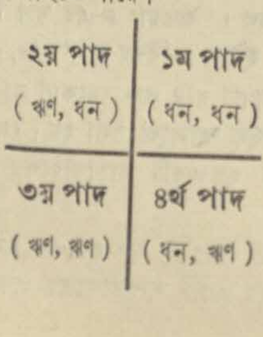
মাধ্যমিক স্তরে একমাত্র আয়ত স্থানাঙ্কেরই ব্যবহার-পদ্ধতি বিবৃত হইয়াছে। উচ্চ মাধ্যমিক স্তরেও কার্তেজীয় পদ্ধতির এই আয়ত স্থানাঙ্কই পাঠ্য। সুতরাং এ-বিষয়ে পূর্বজ্ঞানের একটি সারসংকলন দেওয়া যাইতেছে।

(i) অক্ষদ্বয় পরস্পরকে যে-বিন্দুতে ছেদ করে তাহাকে মূলবিন্দু বলা হয়। সুতরাং $\overline{XOX'}$ ও $\overleftrightarrow{YOY'}$, এই দুইটি লম্বচ্ছেদী অক্ষদ্বয়ের মূলবিন্দু হইল O-বিন্দু।

y-অক্ষ হইতে $\overrightarrow{OX}$ বরাবর ডানদিকের দৈর্ঘ্যসূচিত মান ধনাত্মক ভুজ এবং $\overrightarrow{OX'}$ বরাবর বামদিকের দৈর্ঘ্যসূচিত মান ঋণাত্মক ভুজ বুঝায়।

(iii) x-অক্ষ হইতে $\overrightarrow{OY}$-বরাবর উপরদিকের দৈর্ঘ্যসূচিত মান ধনাত্মক কোটি এবং $\overrightarrow{OY'}$-বরাবর নিচদিকের দৈর্ঘ্যসূচিত মান ঋণাত্মক কোটি বুঝায়।

(iv) সুতরাং অক্ষ-দুইটি উহার সমতলকে যে-চারিটি **পাদে** বিভক্ত করে তাহাদের প্রথমটিতে যে-কোন বিন্দুর ভুজ ও কোটি উভয়ে ধনাত্মক; দ্বিতীয়টিতে যে-কোন বিন্দুর ভুজ ঋণাত্মক, কোটি ধনাত্মক; তৃতীয়টিতে যে-কোন বিন্দুর ভুজ ও কোটি, উভয়ে ঋণাত্মক; চতুর্থটিতে যে-কোন বিন্দুর ভুজ ধনাত্মক কিন্তু কোটি ঋণাত্মক। নিচের চিত্রে বিভিন্ন পাদে ভুজ ও কোটির মান, ধনাত্মক বা ঋণাত্মক কিরূপ হয়, তাহা প্রত্যক্ষ করা যাইতে পারে।

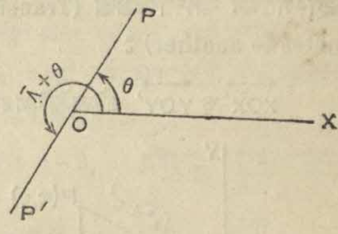


(v) সুতরাং কোন বিন্দু P-এর ভুজ ও কোটির সাংখ্যমান যদি যথাক্রমে x ও y হয়, তবে

প্রথম পাদে অবস্থিত হইলে P-এর স্থানাঙ্ক (x, y);
দ্বিতীয় পাদে " " " " $(-x, y)$;
তৃতীয় পাদে " " " " $(-x, -y)$;
এবং চতুর্থ পাদে " " " " $(x, -y)$.

1·3. পোলার স্থানাঙ্ক (Polar co-ordinates) :

কার্তেজীয় পদ্ধতি হইতে ভিন্ন আরেক প্রণালীতেও সামতলিক বিন্দুর অবস্থান নির্ণয় করা যায়।



একটি স্থির-বিন্দু O এবং ঐ O-বিন্দুগামী একটি স্থির-রেখা $\overrightarrow{OX}$ লইলে, একই সমতলে যে-কোন বিন্দু P-এর অবস্থান নির্ণয় করিবার জন্য শুধু $\overline{OP}$-এর দৈর্ঘ্য ও $\angle XOP$-এর মান জানা দরকার। সুতরাং $\overline{OP}$-এর দৈর্ঘ্য যদি r এবং $\angle XOP$-এর মান যদি হয় θ, তবে P-বিন্দুর স্থানাঙ্ক (r, θ) বলিয়া নির্দেশ করা যায়। লক্ষণীয় যে এই পদ্ধতিতে স্থির-বিন্দুকে মূলবিন্দু বলা চলে, বস্তুতঃ কখনও কখনও উহাকে মূলবিন্দুই বলা হয়। আবার দৈর্ঘ্য r এবং কোণ θ-এর পক্ষে O বিন্দুকে পোল (pole) বা মেরু বলিয়াও অভিহিত করা হয়। সেইজন্য (r, θ)-সূচিত স্থানাঙ্ককে **পোলার স্থানাঙ্ক** বলে।

পোলার স্থানাঙ্কের **অক্ষ** একটি-ই এবং তাহা হইল $\overrightarrow{OX}$ স্থির রেখা। এই অক্ষকে কখনও কখনও **প্রারম্ভিক রেখা** (initial line) বলে।

স্থানাঙ্ক-দুইটির r-দৈর্ঘ্য $(=\overline{OP})$-কে বলে **রেডিয়াস-ভেক্টর** (Radius vector) এবং θ $(=m\angle XOP)$ কোণকে বলে **ভেক্টর-কোণ** (Vectorical angle)।

1·4. ভেক্টর-কোণের ধনাত্মক ও ঋণাত্মক মান :

ত্রিকোণমিতির কোণের ন্যায় ঘড়ির কাঁটার বিপরীত মুখে মাপিলে ভেক্টর-কোণের মান ধনাত্মক এবং ঘড়ির কাঁটার মুখে মাপিলে ঋণাত্মক ধরা হয়।

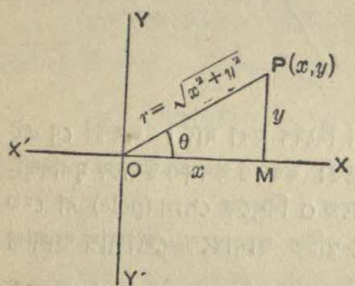
1·5. রেডিয়াস-ভেক্টরের ধনাত্মক ও ঋণাত্মক মান :

ভেক্টর-কোণের একটি বাহু প্রারম্ভিক রেখা এবং তাহা স্থির। পোল O বিন্দু হইতে অপর বাহু $\overrightarrow{OP}$ বরাবর মাপিলে r-এর মান ধনাত্মক, কিন্তু উহার বিপরীত দিকে $\overrightarrow{PO}$

মুখে r-এর সমান দৈর্ঘ্যযুক্ত $\overline{OP'}$ এর মানকে ঋণাত্মক অর্থাৎ $(-r)$ ধরিতে হয়। সেই হিসাবে উপরের চিত্রে, P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (r, θ) ; কিন্তু P'-এর স্থানাঙ্ক দুইভাবে লেখা যায়। একভাবে উহার স্থানাঙ্ক $(-r, \theta)$, কেননা θ কোণের বাহু $\overrightarrow{OP}$-এর বিপরীত দিকে OP'-এর দূরত্ব r একক। আবার $\angle XOP' = \pi + \theta$ বলিয়া প্রবৃদ্ধ কোণ XOP'-এর বাহু $\overline{OP'}$ এবং সেই বাহু বরাবর $\overline{OP'}$ দৈর্ঘ্য r-এর মান অবশ্যই ধনাত্মক ধরিতে হইবে। অতএব $(\pi+\theta)$ ভেক্টর-কোণ-সাপেক্ষে রেডিয়াস-ভেক্টর হইবে r এবং সেই কারণে, P'-এর স্থানাঙ্ক হইবে $(r, \pi+\theta)$ সুতরাং $(-r, \theta)$ ও $(r, \pi+\theta)$ উভয়েই একই বিন্দু P'-এর পোলার স্থানাঙ্ক সূচিত করিবে।

1·6. এক পদ্ধতির স্থানাঙ্ক হইতে অন্য পদ্ধতির স্থানাঙ্কে রূপান্তর (Transformation from one system of Co-ordinates to another) :

$\overleftrightarrow{XOX'}$ ও $\overleftrightarrow{YOY'}$ এই দুইটি লম্বচ্ছেদী অক্ষের সমতলে অবস্থিত P-বিন্দুর কার্তেজীয় আয়ত এবং পোলার স্থানাঙ্ক যথাক্রমে যেন (x, y) ও (r, θ). P-বিন্দু হইতে অঙ্কিত $\overline{PM}$ যেন $\overrightarrow{OX}$-এর উপর লম্ব এবং $\angle XOP$-এর মান যেন θ. তাহা হইলে,



$OM = x$, $PM = y$, এবং $OP = \sqrt{OM^2+PM^2} = \sqrt{x^2+y^2}$. আবার, P বিন্দুর রেডিয়াস-ভেক্টর $r = OP = \sqrt{x^2+y^2}$ এবং ভেক্টর-কোণ $\angle XOP = \theta$.

এখন, $\tan\theta = \tan XOP = \dfrac{PM}{OM} = \dfrac{y}{x}$ বলিয়া,

$$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}.\quad \text{অধিকন্তু } x = r\cos\theta \text{ এবং } y = r\sin\theta.$$

(i) $\therefore$ P-বিন্দুর কার্তেজীয় আয়ত স্থানাঙ্ক (x, y) হইলে উহার পোলার স্থানাঙ্ক (r, θ) হইবে,

$$\left(\sqrt{x^2+y^2}, \tan^{-1}\frac{y}{x}\right)\quad \left[\because r=\sqrt{x^2+y^2} \text{ এবং } \theta=\tan^{-1}\frac{y}{x}\right].$$

(ii) বিপরীতক্রমে, P-বিন্দুর পোলার স্থানাঙ্ক (r, θ) হইলে উহার কার্তেজীয় আয়ত স্থানাঙ্ক (x, y) হইবে $(r\cos\theta, r\sin\theta)$

$$[\therefore\quad x = e\cos\theta \text{ এবং } y = r\sin\theta\,].$$

উদাহরণমালা

উদা. 1. নিম্নে স্থানাঙ্ক-সূচিত বিন্দুগুলির কোন্‌টি কোন্ পাদে অবস্থিত তাহা কারণসহ বল :

(i) $(\sqrt{5}, \sqrt{3})$; (ii) $(1-\sqrt{3}, 1+\sqrt{3})$; (iii) $(4 \cos 150°, 4 \sin 150°)$.

(i) $\sqrt{5}$ ও $\sqrt{3}$ উভয়ে ধনাত্মক বলিয়া $(\sqrt{5}, \sqrt{3})$-সূচিত বিন্দুটি প্রথম পাদে অবস্থিত।

(ii) $\sqrt{3}$-এর মান > 1 বলিয়া $(1-\sqrt{3}) < 1$ অর্থাৎ $(1-\sqrt{3})$ ঋণাত্মক কিন্তু $1+\sqrt{3}$ ধনাত্মক। সুতরাং এক্ষেত্রে $(1-\sqrt{3}, 1+\sqrt{3})$-সূচিত বিন্দুটির ভুজ ঋণাত্মক, কোটি ধনাত্মক বলিয়া উহা দ্বিতীয় পাদে অবস্থিত।

(iii) $150°$ দ্বিতীয়পাদস্থ কোণ বলিয়া উহার sine ধনাত্মক, cos ঋণাত্মক ;

$\therefore$ $4 \cos 150°$ ঋণাত্মক এবং $4 \sin 150°$ ধনাত্মক এবং সেই কারণে $(4 \cos 150°, 4 \sin 150°)$-সূচিত বিন্দু দ্বিতীয় পাদে অবস্থিত।

উদা. 2. একটি বিন্দুর কার্তেজীয় স্থানাঙ্ক $(-3, 3)$ হইলে, উহার পোলার স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

প্রশ্নানুসারে, বিন্দুটির ভুজ $x=-3$ এবং কোটি $y=3$.

যেহেতু, সূত্রানুসারে, (x, y) বিন্দুর পোলার স্থানাঙ্ক $\left(\sqrt{x^2+y^2}, \tan^{-1}\frac{y}{x}\right)$,

সেইহেতু, বিন্দুটির রেডিয়াস-ভেক্টর $\gamma=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(-3)^2+3^2}$
$=\sqrt{9+9}=3\sqrt{2}$

এবং ভেক্টর-কোণ $\theta=\tan^{-1}\frac{y}{x}=\tan^{-1}\frac{3}{-3}=\tan^{-1}(-1)$.

$(-3, 3)$ দ্বিতীয়পাদস্থ বিন্দু বলিয়া θ কোণ নিশ্চয়ই দ্বিতীয়পাদস্থ।

আবার, $\tan\theta=-1=\tan(180°-45°)=\tan 135°$;

$\therefore$ $\theta=135°=\frac{3\pi}{4}$ রেডিয়ান।

$\therefore$ নির্ণেয় পোলার স্থানাঙ্ক $\left(3\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$.

দ্রষ্টব্য : উপরের উদাহরণে বিন্দুটির স্থানাঙ্ক যদি $(3, -3)$ হইত, তবে উহার অবস্থান হইত চতুর্থ পাদে এবং সেই কারণে ঐ বিন্দুর ভেক্টর-কোণও চতুর্থ পাদে পড়িত। সেক্ষেত্রে $\tan\theta=\frac{-3}{3}=-1=\tan(360°-45°)=\tan 315°$ বা $\frac{7\pi}{4}$ রেডিয়ান হইত কিন্তু রেডিয়াস-ভেক্টর একই অর্থাৎ $3\sqrt{2}$-ই থাকিত।

উদা. 3. একটি বিন্দুর পোলার স্থানাঙ্ক $\left(2\sqrt{3}, \frac{4\pi}{3}\right)$ হইলে, উহার কার্তেজীয় স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

প্রশ্নানুসারে, বিন্দুটির রেডিয়াস-ভেক্টর $r=2\sqrt{3}$ এবং ভেক্টর-কোণ $\theta=\frac{4\pi}{3}$.

উহার কার্তেজীয় ভুজ $x=2\sqrt{3}\cos\frac{4\pi}{3}=2\sqrt{3}\times\cos 240°=2\sqrt{3}\times\cos(180°+60°)=2\sqrt{3}\times(-\cos 60°)=2\sqrt{3}\times(-\frac{1}{2})=-\sqrt{3}$.

এবং কোটি $y=2\sqrt{3}\sin\frac{4\pi}{4}=2\sqrt{3}\times\sin 240°=2\sqrt{3}\sin(180°+60°)$

$$=2\sqrt{3}\times(-\sin 60°)=2\sqrt{3}\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-3.$$

∴ আলোচ্য বিন্দুর কার্তেজীয় স্থানাঙ্ক $(-\sqrt{3}, -3)$.

প্রশ্নমালা 1

1. নিম্নলিখিত বিন্দুগুলির আয়ত স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর :

(i) চতুর্থপাদস্থ যে বিন্দু x ও y অক্ষ হইতে সাংখ্যমানে যথাক্রমে 3 ও 4 একক দূরে অবস্থিত ;

(ii) মূলবিন্দু O এবং y অক্ষ হইতে যে বিন্দুর দূরত্ব যথাক্রমে 5 ও 4 একক।

2. আয়ত স্থানাঙ্কে প্রকাশিত নিম্নলিখিত বিন্দুগুলির পোলার স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর :

(i) $(1, 1)$; (ii) $(1, -1)$; (iii) $(-1, -\sqrt{3})$; (iv) $(-4, 0)$; (v) $(-3, -\sqrt{3})$.

3. নিম্নলিখিত বিন্দুগুলির পোলার হইতে আয়ত স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর :

(i) $\left(2, \frac{\pi}{2}\right)$; (ii) $\left(2, -\frac{\pi}{3}\right)$; (iii) $\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$; (iv) $\left(4, \frac{2\pi}{3}\right)$;

(vi) $\left(1, \frac{5\pi}{6}\right)$.

1·7. প্রতিফলন, চলন ও আবর্তনের বিশ্লেষণমূলক রূপ :

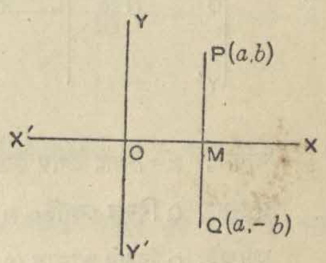
প্রতিফলন, চলন ও আবর্তনের ফলে বিন্দুবিশেষের যে স্থানান্তর ঘটে তাহা স্থানাঙ্কের পরিবর্তন দ্বারা প্রকাশ করা যায়। বস্তুত বিশ্লেষণমূলক জ্যামিতিতে এইরূপ পরিবর্তিত স্থানাঙ্ক দ্বারাই উল্লিখিত রূপান্তরসমূহ (অর্থাৎ প্রতিফলন, চলন

ও আবর্তনজনিত রূপান্তরসমূহ) সূচিত হইয়া থাকে। উহাদের প্রত্যেকটিকে স্বতন্ত্র-ভাবে আলোচনা করা যাইতেছে।

1·8. প্রতিফলন :

(a) বিভিন্ন অক্ষে প্রতিফলনজনিত প্রতিবিম্ব :

(i) X-অক্ষের উপর প্রতিফলনে P বিন্দুর প্রতিবিম্ব যদি Q হয় এবং P-এর স্থানাঙ্ক যদি হয় (a, b), তবে $(a, -b)$ স্থানাঙ্ক দ্বারা Q বিন্দুকে সূচিত করা যায়। P-বিন্দু হইতে অঙ্কিত X-অক্ষের উপর $\overline{PM}$ লম্বকে $\overline{PM} \cong \overline{MQ}$ করিয়া বর্ধিত করিলে, Q-বিন্দু P বিন্দুর প্রতিবিম্ব হইবে।



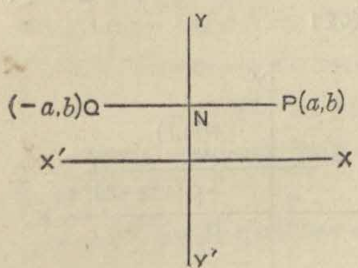
এখন, Q-এর ভুজ = OM = a

এবং কোটি MQ = − PM = − b.

∴ Q-এর স্থানাঙ্ক $(a, -b)$.

অতএব, **x-অক্ষের উপর প্রতিফলনে (a, b) বিন্দুর প্রতিবিম্ব হয় (a, − b) বিন্দু।**

(ii) দ্বিতীয়তঃ, Y-অক্ষের উপর P (a, b) বিন্দুর প্রতিফলনে প্রতিবিম্ব Q হইলে, ধরা যাক, P-হইতে Y-অক্ষের উপর অঙ্কিত লম্ব $\overline{PN}$; প্রতিফলনের সূত্র অনুসারে, $\overline{PN}$-কে বর্ধিত করিলে Q বিন্দু দিয়া যাইবে এবং $\overline{PN} \cong \overline{NQ}$ হইবে।



এখন, NP = a বলিয়া Q-এর ভুজ NQ = − NP = − a হইবে ;

কিন্তু $\overline{PQ} \parallel \overline{XOX'}$ বলিয়া P ও Q-এর কোটি সমান হইবে,

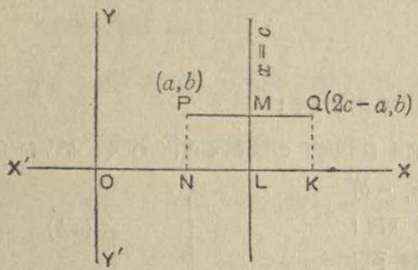
অর্থাৎ P-র কোটি b বলিয়া Q-এর কোটিও b হইবে।

∴ Q-এর স্থানাঙ্ক হইবে $(-a, b)$.

অতএব, **y-অক্ষের উপর প্রতিফলনে (a, b) বিন্দুর প্রতিবিম্ব হইবে (−a, b) বিন্দু।**

(iii) $x = c$-এর উপর প্রতিফলনে P (a, b) বিন্দুর প্রতিবিম্ব যেন Q বিন্দু। স্থানাঙ্ক দ্বারা Q বিন্দুর অবস্থান নির্দেশ করিতে হইবে। প্রতিফলন-সূত্র অনুসারে $\overline{PQ}$ রেখা $x = c$ রেখার উপর লম্ব এবং M উহাদের ছেদবিন্দু হইলে PM = MQ.

স্পষ্টতঃ $x=c$ রেখা y-অক্ষের সমান্তরাল এবং উহাদের ছেদবিন্দু L হইলে OL $=c$ হইবে। Q হইতে অঙ্কিত লম্ব $\overline{OX}$-কে যেন K বিন্দুতে ছেদ করে।



সুতরাং Q বিন্দুর ভুজ

$$=OK=OL+LK=c+MQ$$
$$=c+PM=c+NL$$
$$=c+OL-ON$$
$$=c+c-a=2c-a.$$

আবার, $x=c$-এর উপর উভয়ে লম্ব বলিয়া $PQ \parallel \overrightarrow{OX}$.

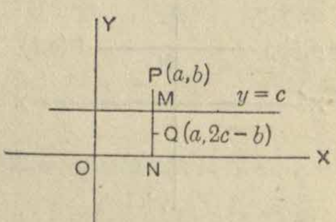
সুতরাং, Q বিন্দুর কোটি $=$ P বিন্দুর কোটি, অর্থাৎ $KQ=NP=b$.

কাজেই, Q বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(2c-a, b)$.

অতএব, **$x=c$-এর উপর প্রতিফলনে (a, b) বিন্দুর প্রতিবিম্ব হইবে $(2c-a, b)$ বিন্দু।**

(iv) $y=c$-এর উপর প্রতিফলনে P (a, b) বিন্দুর প্রতিবিম্ব যেন Q বিন্দু। স্থানাঙ্ক দ্বারা Q বিন্দুর অবস্থান সূচিত করিতে হইবে।

$y=c$ রেখা x-অক্ষের সমান্তরাল। P হইতে $y=c$ ও x-অক্ষের উপর অঙ্কিত লম্ব যেন উহাদের যথাক্রমে M ও N বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে।



প্রতিফলন-সূত্র অনুসারে Q বিন্দু $\overrightarrow{PM}$-এর উপর অবস্থিত এবং PM $=$ MQ.

$\therefore$ Q বিন্দুর ভুজ $=ON=a$

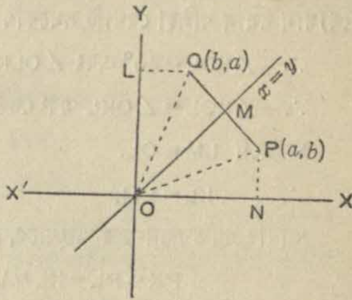
এবং কোটি $=NQ=NM-QM=c-MP=c-(NP-NM)$

$$=c-(b-c)=c-b+c=2c-b.$$

অতএব, **$y=c$-এর উপর প্রতিফলনে (a, b) বিন্দুর প্রতিবিম্ব হইবে $(a, 2c-b)$ বিন্দু।**

(v) $x=y$ রেখার উপর প্রতিফলনে P (a, b) বিন্দুর প্রতিবিম্ব যেন Q বিন্দু। Q-বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করিতে হইবে।

P হইতে $x=y$-এর উপর লম্বরেখাটি যেন $x=y$-কে M বিন্দুতে ছেদ করিয়া প্রতিবিম্ব Q বিন্দু পর্যন্ত প্রসারিত।



P ও M হইতে $\overrightarrow{OX}$-এর উপর যথাক্রমে যেন $\overline{PN}$ ও $\overline{MK}$ লম্ব এবং Q হইতে $\overrightarrow{OY}$-এর উপর যেন $\overline{QL}$ লম্ব। প্রতিফলন-সূত্র অনুসারে PM = MQ.

∴ POM ও QOM ত্রিভুজদ্বয়ে $\overline{PM} \cong \overline{QM}$, $\overline{OM}$ সাধারণ এবং $\angle PMO = \angle QMO$ (উভয়ে সমকোণ বলিয়া)। অতএব ত্রিভুজ-দুইটি সর্বসম এবং সেই কারণে $\overline{OP} \cong \overline{OQ}$ এবং $\angle MOP = \angle MOQ$.

আবার, M বিন্দু $x=y$-এর উপর অবস্থিত বলিয়া উহার ভুজ = উহার কোটি এবং সেই কারণে $\overrightarrow{OM}$ রেখা $\angle LON$-এর সমদ্বিখণ্ডক।

$\therefore\ \angle MOL = 45° = \angle MON.$

$\therefore\ \angle LOQ = \angle MOL - \angle MOQ$

$= \angle MON - \angle MOP = \angle PON.$

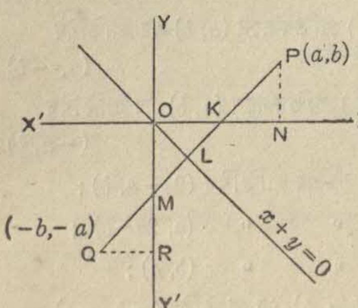
∴ LOQ ও NOP, এই দুইটি সমকোণী ত্রিভুজে অতিভুজ $\overline{OP} \cong$ অতিভুজ $\overline{OQ}$ এবং $\angle LOQ = \angle NOP$ বলিয়া ত্রিভুজ-দুইটি সর্বসম।

∴ $ON = OL = a$ এবং $PN = QL = b$.

অতএব, Q-এর ভুজ $= QL = b$ এবং কোটি $= OL = a$.

সুতরাং, **x = y-এর উপর প্রতিফলনে (a, b) বিন্দুর প্রতিবিম্ব হইবে (b, a) বিন্দু।**

(vi) $x+y=0$-এর উপর প্রতিফলনে P (a, b) বিন্দুর প্রতিবিম্ব যদি Q হয়, তবে Q-এর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করিতে হইবে।



P হইতে $x+y=0$-এর উপর অঙ্কিত লম্বরেখাটি যেন $\overrightarrow{OX}$, $x+y=0$, এবং $\overrightarrow{OY'}$-কে যথাক্রমে, K, L ও M বিন্দুতে ছেদ করিয়া প্রতিবিম্ব Q বিন্দুতে সীমাবদ্ধ হইয়াছে। P হইতে $\overrightarrow{OX}$-এর উপর এবং Q হইতে $\overline{OY'}$-এর উপর লম্ব-দুইটি যেন যথাক্রমে $\overline{PN}$ ও $\overline{QR}$.

এখন, $x+y=0$ বা $x=-y$-এর উপর যে-কোন বিন্দুর ভুজ ও কোটির সাংখ্যমান সমান বলিয়া রেখাটি সমকোণ NOR-এর সমদ্বিখণ্ডক।

$\therefore$ $\angle KOL=45°$ এবং $\angle OLK=90°$ বলিয়া $\angle OKL=45°$.

$\therefore$ $\angle KOL=\angle OKL$ এবং সেই কারণে $KL=OL$.

অনুরূপে $LM=OL$.

$\therefore$ $KL=LM$.

আবার প্রতিফলন-সূত্র অনুসারে, $PL=LQ$ বলিয়া,

$$PK=PL-KL=LQ-LM=MQ.$$

$\therefore$ PNK ও QRM ত্রিভুজদ্বয়ে,

$PK=MQ$, $\angle PNK=\angle QRM$ [$\because$ উভয়ে সমকোণ]

এবং $\angle KPN=\angle QMR$ [$\because$ $\overline{PN} \parallel \overline{MR}$ এবং $\overline{PQ}$ উহাদের ছেদক]

$\therefore$ ত্রিভুজ-দুইটি সর্বসম।

$\therefore$ $KN=QR$ এবং $PN=MR$.

কিন্তু $\angle PKN=45°=\angle KPN$ বলিয়া $KN=NP=b$ এবং অনুরূপে $QR=RM=KN=b$; আবার $\triangle OKL \cong \triangle OML$ বলিয়া সাংখ্যমানে $OK=OM$.

$\therefore$ OK ধনাত্মক এবং OM ঋণাত্মক বলিয়া $OM=-OK$.

$\therefore$ Q-এর ভুজ $=RQ=-QR=-b$ এবং উহার কোটি $=OR=OM+MR$
$=-OK-RM=-OK-KN=-ON$
$=-a$, কাজেই Q-এর স্থানাঙ্ক $(-b, -a)$.

অতএব, **$x+y=0$-এর উপর প্রতিফলনে (a, b) বিন্দুর প্রতিবিম্ব হইবে $(-b, -a)$.**

(b) প্রতিফলনের সারণী :

(i) x-অক্ষে (অর্থাৎ $y=0$-এর উপর) প্রতিফলনে (a, b)-এর প্রতিবিম্ব $(a, -b)$;

(ii) y-অক্ষে (অর্থাৎ $x=0$-এর উপর) প্রতিফলনে (a, b)-এর প্রতিবিম্ব $(-a, b)$;

(iii) $x=c$-এর উপর প্রতিফলনে (a, b)-এর প্রতিবিম্ব $(2c-a, b)$;

(iv) $y=c$ " " " " $(a, 2c-b)$;

(v) $x=y$ " " " " (b, a) ;

(vi) $x+y=0$-এর উপর প্রতিফলনে (a, b)-এর প্রতিবিম্ব $(-b, -a)$.

উদাহরণমালা

উদা 1. নিম্নলিখিত বিন্দুগুলি x-অক্ষের উপর প্রতিফলিত হইলে প্রত্যেক ক্ষেত্রে স্থানাঙ্ক দ্বারা প্রতিবিম্ব সূচিত কর :

(i) $(-4, -5)$; (ii) $(-5, 7)$; (iii) $(-7, 4)$.

x-অক্ষের উপর প্রতিফলনে (a, b)-এর প্রতিবিম্ব হয় $(a, -b)$.

(i) এখানে $a = -4$ এবং $b = -5$ বা $-b = 5$;

$\therefore$ $(-4, -5)$-এর প্রতিবিম্ব হইবে $(-4, 5)$.

(ii) এখানে, $a = -5$, এবং $b = 7$. $\therefore$ $-b = -7$;

$\therefore$ x-অক্ষের উপর প্রতিফলনে $(-5, 7)$-এর প্রতিবিম্ব হইবে $(-5, -7)$.

(iii) এখানে, $a = -7$ এবং $b = 4$ অথবা $-b = -4$.

$\therefore$ x-অক্ষের উপর প্রতিফলনে $(-7, 4)$-এর প্রতিবিম্ব হইবে $(-7, -4)$.

উদা. 2. $x = -5$-এর উপর প্রতিফলনে $(3, 4)$ বিন্দুর যে প্রতিবিম্ব হইবে তাহার স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

$x = c$-এর উপর প্রতিফলনে (a, b)-এর প্রতিবিম্ব হয় $(2c - a, b)$ বিন্দু।

এখানে $a = 3$, $b = 4$ এবং $c = -5$.

$\therefore$ $2c - a = 2 \times (-5) - 3 = -10 - 3 = -13$ এবং $b = 4$.

$\therefore$ নির্ণেয় প্রতিবিম্বটি হইবে $(-13, 4)$ বিন্দু।

উদা. 3. (h, q) বিন্দুকে পর পর $x = y$ এবং $x + y = 0$ অক্ষে প্রতিফলিত করিলে উহার অন্তিম প্রতিবিম্ব কি হইবে?

$x = y$ অক্ষে প্রতিফলনে (a, b)-এর প্রতিবিম্ব (b, a) হয়। এই সূত্রানুসারে $x = y$ অক্ষে প্রতিফলনে (h, q)-এর প্রতিবিম্ব (q, h) হইবে। আবার, $x + y = 0$ অক্ষে প্রতিফলিত হইলে (a, b)-এর প্রতিবিম্ব হয় $(-a, -b)$; সুতরাং এই অক্ষে (q, h)-এর প্রতিফলনে $(-q, —h)$ প্রতিবিম্ব পাওয়া যাইবে। $\therefore$ অন্তিম প্রতিবিম্বের স্থানাঙ্ক হইবে $(-q, -h)$.

প্রশ্নমালা 2

1. x-অক্ষের উপর প্রতিফলনে নিম্নলিখিত প্রত্যেকটি বিন্দুর প্রতিবিম্ব নির্ণয় কর :

(i) $(3, -5)$; (ii) $(-4, 3)$; (iii) $(-5, -2)$.

2. y-অক্ষের উপর প্রতিফলনে 1নং প্রশ্নে প্রদত্ত বিন্দুগুলির প্রত্যেকটির প্রতিবিম্ব নির্ণয় কর।

3. নিম্নলিখিত বিন্দুগুলি $x = -2$ অক্ষে প্রতিফলিত হইলে উহাদের প্রত্যেকটির প্রতিবিম্ব নির্ণয় কর :

(i) (2, 3) ; (ii) (−3, 2) ; (iii) (−4, 3) ;
(iv) (4, −2) (v) (−1, −1).

4. $y = 1$ অক্ষে প্রতিফলিত হইলে 3নং প্রশ্নে প্রদত্ত বিন্দুগুলির প্রতিবিম্ব নির্ণয় কর।

5. 3নম্বর প্রশ্নে প্রদত্ত বিন্দুগুলির $x = y$ অক্ষে প্রতিফলনজনিত প্রতিবিম্ব নির্ণয় কর।

6. 1নম্বর প্রশ্নে প্রদত্ত বিন্দুগুলির $x + y = 0$ অক্ষে প্রতিফলনজনিত প্রতিবিম্ব নির্ণয় কর।

7. (i) (3, 5) বিন্দুটি পর পর x-অক্ষ এবং y-অক্ষে প্রতিফলিত হইলে অন্তিম প্রতিবিম্বের স্থানাঙ্ক কি হইবে ?

(ii) ঐ বিন্দু পর পর y-অক্ষ ও x-অক্ষে প্রতিফলিত হইলেই বা উহার অন্তিম প্রতিবিম্বের স্থানাঙ্ক কি হইবে ?

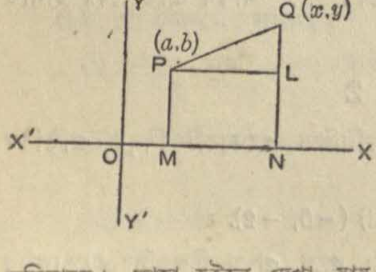
8. (4, 3) বিন্দুকে পর পর y-অক্ষ এবং $x = y$-অক্ষে প্রতিফলিত করিলে অন্তিম প্রতিবিম্বের স্থানাঙ্ক কি হইবে ?

9. (5, 7) বিন্দুকে পর পর $x = 3$ এবং $x = 5$ অক্ষে প্রতিফলিত করিলে অন্তিম প্রতিবিম্বের স্থানাঙ্ক কি হইবে ?

10. (−3, 5) বিন্দুকে পর পর $x = 2$ ও $y = 2$ অক্ষে প্রতিফলিত করিলে অন্তিম প্রতিবিম্বের স্থানাঙ্ক কি হইবে ?

11. (−2, −5) বিন্দুকে পর পর $x + y = 0$ এবং $x = y$ অক্ষে প্রতিফলিত করিলে অন্তিম প্রতিবিম্বের স্থানাঙ্ক কি হইবে ?

1·9. চলন : চলনের ফলে P বিন্দু তাহার (a, b) অবস্থান হইতে যেন Q বিন্দুতে (x, y) অবস্থানে স্থানান্তরিত হইয়াছে।



স্পষ্টতঃ লম্বচ্ছেদী $\overleftrightarrow{XOX'}$ ও $\overleftrightarrow{YOY'}$, এই দুইটি কার্তেজীয় আয়ত অক্ষের তুলনায় P-এর স্থানাঙ্ক (a, b) এবং Q-এর স্থানাঙ্ক (x, y). P ও Q হইতে $\overrightarrow{OX}$-এর উপর যথাক্রমে $\overline{PM}$ ও $\overline{QN}$ লম্ব এবং P হইতে অঙ্কিত $\overrightarrow{OX}$-এর সমান্তরাল রেখা যেন $\overline{QN}$-কে L বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। তাহা হইলে দেখা যায়, $\overrightarrow{OX}$ মুখে $\overline{PL}$ পরিমাণ এবং $\overrightarrow{OY}$ মুখে $\overline{LQ}$ পরিমাণ চলনের সমবেত ফলই $\overline{PQ}$ চলন।

ধরা যাক, $PL = p$ এবং $LQ = q$. তাহা হইলে বলা যায় যে $\overrightarrow{OX}$ মুখে p পরিমাণ এবং $\overrightarrow{OY}$ মুখে q পরিমাণ চলনের ফলে $P(a, b)$ বিন্দু $Q(x, y)$ বিন্দুতে স্থানান্তরিত হইয়াছে। গণিতের ভাষায় এই চলনকে $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ এই সংকেতে প্রকাশ করা হইয়া থাকে।

এখন চিত্র হইতে দেখা যায়,

$$x = ON = OM + MN = a + PL = a + p$$

এবং $$y = NQ = NL + LQ = MP + q = b + q;$$

$\therefore$ বলা চলে যে, **$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ চলন (a, b) বিন্দুকে $(a+p, b+q)$ বিন্দুতে চিত্রিত করে।**

দ্রষ্টব্য : লক্ষণীয় যে (p, q) এমন একটি বিন্দু সূচিত করে যাহার ভুজ $= p$ এবং কোটি $= q$; আর $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ এমন একটি চলন সূচিত করে যাহার ফলে একটি বিন্দু x-অক্ষের সমান্তরাল রেখায় p পরিমাণ এবং y-অক্ষের সমান্তরাল রেখায় q পরিমাণ অপসৃত হয়।

উদাহরণমালা

উদা. 1. ABCD সামন্তরিকের A, B ও C শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(1, 1)$, $(3, 5)$ ও $(-3, 4)$ হইলে D-এর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

ABCD সামান্তরিক বলিয়া $\overline{BA}$ চলন $= \overline{CD}$ চলন। ধরা যাক, $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ চলনে $B(3, 5)$ বিন্দু A বিন্দুতে এবং $C(-3, 4)$ D বিন্দুতে চিত্রিত হয়। তাহা হইলে

$$3 + p = 1 \text{ অথবা } p = -2$$

এবং $$5 + q = 1 \text{ অথবা } q = -4.$$

$\therefore$ $\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix}$ চলনে $C(-3, 4)$ বিন্দু D বিন্দুতে চিত্রিত হইয়াছে এবং সেই কারণে D বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(-3-2, 4-4)$ বা $(-5, 0)$.

উদা. 2. (a, b) বিন্দু পর পর x-অক্ষ ও y-অক্ষে প্রতিফলিত হইলে যে অন্তিম প্রতিবিম্ব পাওয়া যায়, দেখাও যে একটিমাত্র চলনে সেই প্রতিবিম্ব পাওয়া যায়।

x-অক্ষে প্রতিফলিত হইলে (a, b)-এর প্রতিবিম্ব $(a, -b)$ হয়, আবার y-অক্ষে $(a, -b)$ প্রতিফলিত হইলে অন্তিম প্রতিবিম্ব হয় $(-a, -b)$.

$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ চলনের ফলেও যেন (a, b)-এর প্রতিবিম্ব $(-a, -b)$ হয়। তাহা হইলে

$$a+p=-a \quad \text{বা} \quad p=-2a$$

এবং $$b+q=-b \quad \text{বা} \quad q=-2b.$$

$\therefore$ $\begin{pmatrix} -2a \\ -2b \end{pmatrix}$ চলনে (a, b) বিন্দুর প্রতিবিম্ব $(-a, -b)$ হইবে।

প্রশ্নমালা 3

1. $\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$ চলনে নিম্নলিখিত বিন্দুগুলি কোন্ কোন্ বিন্দুতে চিত্রিত হইবে ?

(i) $(1, 2)$; (ii) $(-3, 5)$; (iii) $(3, -1)$;
(iv) $(-2, 6)$; (v) $(-4, 4)$.

2. $\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$ চলনের ফলে নিম্নলিখিত বিন্দুগুলির প্রতিবিম্ব নির্ণয় কর :

(i) $(3, 4)$; (ii) $(2, 2)$; (iii) $(3, 2)$;
(iv) $(2, 3)$; (v) $(-3, -2)$.

3. ABCD সামান্তরিকের A, B ও D-এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(0, 1)$, $(3, 4)$ ও $(-2, 3)$; C-এর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

4. A$(2, 0)$ বিন্দু $\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ চলনে B বিন্দুতে এবং $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ চলনে D-বিন্দুতে চিত্রিত হয়। ABCD একটি সামান্তরিক হইলে C বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

5. $x=3$ অক্ষে প্রতিফলিত হইলে $(2, 3)$ বিন্দুর যে প্রতিবিম্ব পাওয়া যায় $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ চলনে ঐ বিন্দুকেও সেই প্রতিবিম্ব-বিন্দুতেই চিত্রিত করে। $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$-এর মান নির্ণয় কর।

6. $y=-1$ অক্ষে প্রতিফলিত হইলে P$(4, 4)$ বিন্দুর প্রতিবিম্ব Q পাওয়া যায়। যে-চলন P-কে Q বিন্দুতে চিত্রিত করে তাহার মান নির্ণয় কর।

7. পর পর $x=2$ এবং $x=5$-এর উপর প্রতিফলনে P$(1, 1)$ বিন্দুর প্রতিবিম্ব Q হয়। কি পরিমাণ চলন P-কে Q বিন্দুতে চিত্রিত করিবে ?

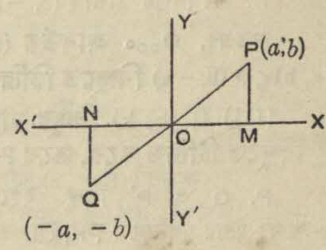
8. $x=y$ অক্ষে প্রতিফলিত হইলে P$(3, 5)$ বিন্দু Q বিন্দুতে প্রতিবিম্বিত হয়। $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ চলনেও P বিন্দু যদি Q বিন্দুতেই চিত্রিত হয় তবে $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$-এর মান নির্ণয় কর।

9. $x+y=0$-এর উপর প্রতিফলন ও $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ চলন (3, 2) বিন্দুতে চিত্রিত করে। $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$-এর মান কত ?

10. পর পর $x=2$ এবং $y=2$ অক্ষে প্রতিফলিত P (1, 1) বিন্দুর অন্তিম প্রতিবিম্ব Q বিন্দু $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ চলনে পুনরায় P বিন্দুতে চিত্রিত হয়। $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$-এর মান কত ?

1·10. আবর্তন :

(I) O (বা মূলবিন্দুর) চারিদিকে 180° আবর্তনে P (a, b) বিন্দু যদি Q বিন্দুতে চিত্রিত হয়, তবে Q-বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।



মূলবিন্দু O-এর চারিদিকে 180° আবর্তনে P (a, b) বিন্দুর প্রতিবিম্ব যেন Q হইয়াছে। P ও Q হইতে x-অক্ষের উপর যথাক্রমে $\overline{PM}$ ও $\overline{QN}$ লম্ব টানা হইল।

$\overline{OP}$ 180° আবর্তিত হইয়া OQ অবস্থানে আসায়,

$\overline{OP} \cong \overline{OQ}$; এবং $\angle POM \simeq$ বিপ্রতীপ $\angle QON$ ও সমকোণ PMO $\cong$ সমকোণ QNO.

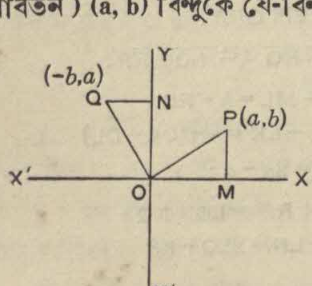
$\therefore \quad \triangle PMO \cong \triangle QNO.$

$\therefore \quad PM = QN = -NQ = -b,$ এবং $OM = -ON = -a.$

$\therefore$ Q-এর স্থানাঙ্ক $(-a, -b)$.

দ্রষ্টব্য—O বিন্দুর চারিদিকে 180° আবর্তনকে O_{180° লিখিলে বলা যায় যে, **O_{180° আবর্তন (a, b) বিন্দুকে (−a, −b) বিন্দুতে চিত্রিত করে।**

(II) মূলবিন্দু O-এর চারিদিকে 90° আবর্তন (অর্থাৎ O_{90° বা O_{-90° আবর্তন) (a, b) বিন্দুকে যে-বিন্দুতে চিত্রিত করে তাহার স্থানাঙ্ক-নির্ণয়।

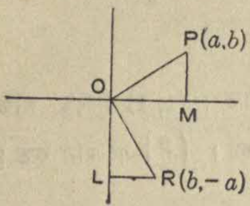


(i) (a, b) বিন্দুকে P দ্বারা এবং উহার O_{90° আবর্তনজনিত প্রতিবিম্বকে Q-দ্বারা সূচিত করা হইল। P হইতে x-অক্ষের উপর এবং Q হইতে y-অক্ষের উপর যথাক্রমে $\overline{PM}$ ও $\overline{QN}$ লম্ব টানা হইল।

O_{90° আবর্তন M বিন্দুকে N বিন্দুতে এবং P বিন্দুকে Q বিন্দুতে চিত্রিত করায়, $\overline{OM} \cong \overline{ON}$ এবং $\overline{MP} \cong \overline{NQ}$.

কিন্তু NQ ঋণাত্মক বলিয়া, $NQ = -MP = -b$, এবং $ON = OM = a$.

$\therefore$ Q বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(-b, a)$,



(ii) আবার $P(a, b)$ বিন্দুর $O_{-90°}$ আবর্তন-জনিত প্রতিবিম্বকে R-দ্বারা সূচিত করা হইল।

P হইতে x-অক্ষের উপর $\overline{PM}$ এবং R হইতে y-অক্ষের উপর লম্ব যেন $\overline{RL}$.

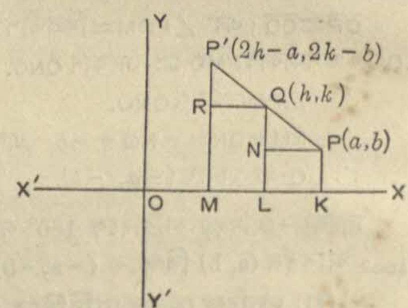
$O_{-90°}$ আবর্তন P বিন্দুকে R বিন্দুতে এবং M বিন্দুকে L বিন্দুতে চিত্রিত করিয়াছে।

$\therefore$ $\overline{MP} \cong \overline{LR}$ এবং $\overline{OM} \cong \overline{OL}$; কিন্তু $\overline{OM}$ ধনাত্মক এবং $\overline{OL}$ ঋণাত্মক বলিয়া, $OL = -OM = -a$ এবং $LR = MP = b$.

$\therefore$ R বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(b, -a)$.

অতএব, $O_{90°}$ আবর্তন (a, b)-কে (−b, a)-তে এবং $O_{-90°}$ আবর্তন (a, b)-কে (b, −a) বিন্দুতে চিত্রিত করে।

(III) Q (h, k) বিন্দুর চারিদিকে 180° আবর্তন P (a, b) বিন্দুকে যদি P′ বিন্দুতে চিত্রিত করে, তবে P-এর স্থানাঙ্ক-নির্ণয়।



P, Q ও P′ বিন্দু হইতে x-অক্ষের উপর যথাক্রমে $\overline{PK}$, $\overline{QL}$ এবং $\overline{P'M}$ লম্ব টানা হইল। আবার P হইতে $\overline{QL}$-এর উপর $\overline{PN}$ এবং Q হইতে $\overline{P'M}$-এর উপর যথাক্রমে $\overline{PN}$ ও $\overline{QR}$ লম্ব টানা হইল।

Q-এর চারিদিকে 180° আবর্তনে P বিন্দু P′ বিন্দুতে চিত্রিত হওয়ায়, $\overline{QP} \cong \overline{QP'}$; $\overline{QL} \parallel \overline{P'M}$ বলিয়া, $\angle PQN \cong \angle QP'R$ এবং সমকোণ PNQ $\cong$ সমকোণ QRP′.

$\therefore$ $\triangle PQN \cong \triangle QP'R$; $\therefore$ $\overline{NP} \cong \overline{RQ}$ এবং $\overline{NQ} = \overline{RP'}$.

অতএব, P′-এর ভুজের মান $= OM = OL - ML = h - RQ$
$= h - NP = h - LK = h - (OK - OL)$
$= h - (a - h) = 2h - a$;

এবং P′-এর কোটির মান $= MP' = MR + RP' = LQ + NQ$
$= LQ + LQ - LN = 2LQ - KP$
$= 2k - b$.

$\therefore$ P′-এর স্থানাঙ্ক $(2h - a, 2k - b)$.

উদাহরণমালা

উদা. 1. O মূলবিন্দু হইলে নিম্নলিখিত আবর্তন (3, −2) বিন্দুকে কোন্ বিন্দুতে চিত্রিত করিবে?

(i) $O_{180°}$; (ii) $O_{90°}$; (iii) $O_{-90°}$.

(i) $O_{180°}$ আবর্তন (a, b) বিন্দুকে $(-a, -b)$ বিন্দুতে চিত্রিত করে। এই সূত্র অনুসারে, $O_{180°}$ আবর্তন (3, −2) বিন্দুকে (−3, 2) বিন্দুতে চিত্রিত করিবে।

(ii) $O_{90°}$ আবর্তন (a, b)-কে $(-b, a)$ বিন্দুতে চিত্রিত করে।

∴ $O_{90°}$ আবর্তন (3, −2)-কে (2, 3) বিন্দুতে চিত্রিত করিবে।

(iii) $O_{-90°}$ (a, b)-কে $(b, -a)$ বিন্দুতে চিত্রিত করে।

∴ $O_{-90°}$ আবর্তন (3, −2)-কে (−2, −3) বিন্দুতে চিত্রিত করিবে।

উদা. 2. মূলবিন্দু O হইলে, (−4, 1) বিন্দুর চারিদিকে 180° আবর্তন (2, −3) বিন্দুকে কোন্ বিন্দুতে চিত্রিত করিবে?

(h, k) বিন্দুর চারিদিকে 180° আবর্তন (a, b)-কে $(2h-a, 2k-b)$ বিন্দুতে চিত্রিত করে।

∴ (−4, 1) বিন্দুর চারিদিকে 180° আবর্তন (2, −3) বিন্দুকে

$[\overline{2\times(-4)-2}, \overline{2\times1+3}]$ বা (−10, 5) বিন্দুতে চিত্রিত করিবে।

উদা. 3. পর পর y-অক্ষ ও $x=y$ অক্ষে প্রতিফলনের পর (h, q) বিন্দুর যে অন্তিম প্রতিবিম্ব পাওয়া যাইবে তাহা একটিমাত্র রূপান্তর প্রক্রিয়ায় পাওয়া যাইতে পারে কি? সম্ভব হইলে ঐ রূপান্তর-প্রক্রিয়াটি কি?

y-অক্ষে প্রতিফলন (h, q)-কে $(-h, q)$ বিন্দুতে চিত্রিত করিবে। আবার $x=y$ অক্ষে প্রতিফলিত হইলে $(-h, q)$ বিন্দুর প্রতিবিম্ব হইবে $(q, -h)$ বিন্দু এবং তাহাই আলোচ্য প্রশ্নে (h, q)-এর অন্তিম প্রতিবিম্ব। আমরা জানি, $O_{90°}$ আবর্তন, (যেখানে O মূলবিন্দু) (a, b)-কে $(-b, a)$ বিন্দুতে চিত্রিত করে। সুতরাং $O_{90°}$, এই একটিমাত্র রূপান্তর প্রক্রিয়ায় (h, q)-কে $(q, -h)$ বিন্দুতে চিত্রিত করা সম্ভব।

প্রশ্নমালা 4

1. মূলবিন্দুর চারিদিকে 90° আবর্তন হইলে নিম্নলিখিত বিন্দুগুলির প্রতিবিম্বের স্থানাঙ্ক লিখ: (i) (2, 3); (ii) (−3, 2); (iii) (4, −5).

2. মূলবিন্দু O হইলে $O_{-90°}$ আবর্তন নিম্নলিখিত বিন্দুগুলিকে কোন্ বিন্দুতে চিত্রিত করিবে? (i) (−2, 3); (ii) (1, −1); (iii) (−3, −5).

3. 1 ও 2 নম্বর প্রশ্নে প্রদত্ত বিন্দুগুলি মূলবিন্দুর চারিদিকে 180° আবর্তিত হইলে, কোন্ কোন্ বিন্দুতে চিত্রিত হইবে?

4. নিম্নলিখিত বিন্দুগুলির চারিদিকে 180° আবর্তন (3, −5) বিন্দুকে কোন্ কোন্ বিন্দুতে চিত্রিত করিবে ?

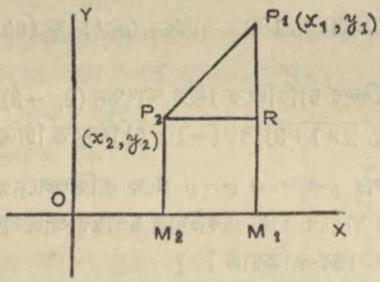
(i) (1, 1) ; (ii) (− 3, 5) ; (iii) (− 2, − 3).

5. পর পর $x=y$ এবং y-অক্ষে প্রতিফলনে (a, b) বিন্দুর যে অন্তিম প্রতিবিম্ব হয়, একটিমাত্র কোন্ আবর্তনের সাহায্যে ঐ বিন্দুর একই প্রতিবিম্ব পাওয়া যায় ?

1·11. দুইটি বিন্দুর মধ্যে দূরত্ব (Distance between two points)।

দুইটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক দেওয়া আছে ; উহাদের মধ্যে দূরত্ব নির্ণয় করিতে হইবে।

[To find the distance between two points whose co-ordinates are given.]



P_1 এবং P_2 যেন দুইটি প্রদত্ত বিন্দু এবং উহাদের স্থানাঙ্ক যথাক্রমে যেন (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2). $\overrightarrow{OX}$-এর উপর $\overline{P_1M_1}$, $\overline{P_2M_2}$ এবং $\overline{P_1M_1}$-এর উপর $\overline{P_2R}$ লম্ব টানা হইল।

তাহা হইলে $P_2R = M_2M_1 = OM_1 - OM_2 = x_1 - x_2$.

এখন, $P_1R = P_1M_1 - RM_1 = P_1M_1 - P_2M_2 = y_1 - y_2$.

∴ P_1RP_2 সমকোণী ত্রিভুজে,

$$P_1P_2^2 = P_2R^2 + P_1R^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2.$$

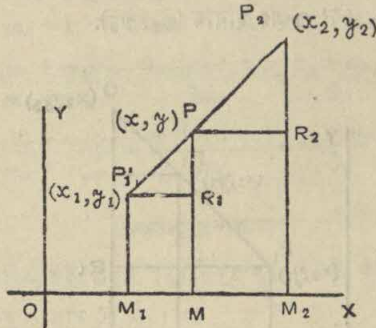
$$\therefore \quad P_1P_2 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

অনুসিদ্ধান্ত। P_2 বিন্দুটি মূলবিন্দু O-এর সহিত মিলিয়া গেলে, $x_2 = 0$, $y_2 = 0$; ∴ $P_1O = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$ = মূলবিন্দু হইতে P_1 বিন্দুর দূরত্ব।

1·12. একটি খণ্ডরেখাকে নির্দিষ্ট অনুপাতে বিভাজন।

[Division of a segment in a given ratio.]

(1) $\overline{P_1P_2}$ খণ্ডরেখাটিকে P বিন্দুতে $m_1 : m_2$ অনুপাতে অন্তঃস্থভাবে বিভাজন এবং P বিন্দুর স্থানাঙ্ক-নির্ণয়।



ধরা যাক, P_1-এর স্থানাঙ্ক, (x_1, y_1) এবং P_2-এর স্থানাঙ্ক, (x_2, y_2), এবং P বিন্দু $\overline{P_1P_2}$-এর উপর এরূপে অবস্থিত, যেন $P_1P : PP_2 :: m_1 : m_2$.

P-এর স্থানাঙ্ক যেন (x, y). OX-এর উপর PM, P_1M_1, P_2M_2 এবং $\overline{PM}$-এর উপর $\overline{P_1R_1}$ ও $\overline{P_2M_2}$-এর উপর $\overline{PR_2}$ লম্ব টানা হইল।

তাহা হইলে $P_1R_1 = M_1M = OM - OM_1 = x - x_1,$

$PR_2 = MM_2 = OM_2 - OM = x_2 - x,$

$R_1P = PM - R_1M = PM - P_1M_1 = y - y_1,$

এবং $P_2R_2 = P_2M_2 - R_2M_2 = P_2M_2 - PM = y_2 - y.$

এখন, $\triangle P_1R_1P$ ও $\triangle PR_2P_2$ সদৃশ,

$$\therefore \quad \frac{m_1}{m_2} = \frac{P_1P}{PP_2} = \frac{P_1R_1}{PR_2} = \frac{x - x_1}{x_2 - x};$$

$$\therefore \quad m_1(x_2 - x) = m_2(x - x_1);$$

$$\therefore \quad x = \frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}.$$

আবার, $\dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{P_1P}{PP_2} = \dfrac{PR_1}{P_2R_2} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y};$

$$\therefore \quad m_1(y_2 - y) = m_2(y - y_1);$$

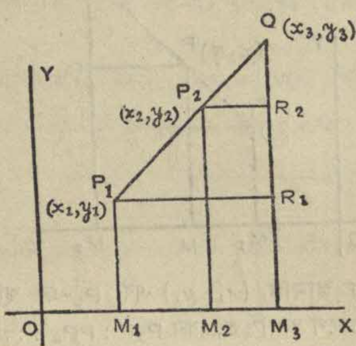
$$\therefore \quad y = \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}.$$

$\therefore$ P-এর স্থানাঙ্ক, $\left(\dfrac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}, \dfrac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}\right)$.

(2) Q বিন্দু $\overline{P_1P_2}$-কে $m_1 : m_2$ অনুপাতে বহির্বিভক্ত করিলে উহার স্থানাঙ্ক নির্ণয় করিতে হইবে।

[To find the co-ordinates of Q which externally divides $\overline{P_1P_2}$ in the ratio $m_1 : m_2$.]

ধরা যাক, Q বিন্দুটি বর্ধিত $\overline{P_1P_2}$-এর উপর এরূপভাবে অবস্থিত যে, $P_1Q : P_2Q = m_1 : m_2$ এবং Q-এর স্থানাঙ্ক (x_3, y_3).



$\overline{OX}$-এর উপর $\overline{P_1M_1}$, $\overline{P_2M_2}$, $\overline{QM_3}$ এবং $\overline{QM_3}$-এর উপর $\overline{P_1R_1}$ এবং $\overline{P_2R_2}$ লম্ব টানা হইল।

তাহা হইলে $P_1R_1 = M_1M_3 = OM_3 - OM_1 = x_3 - x_1$,

$P_2R_2 = M_2M_3 = OM_3 - OM_2 = x_3 - x_2$,

$QR_1 = QM_3 - R_1M_3 = QM_3 - P_1M_1 = y_3 - y_1$,

এবং $QR_2 = QM_3 - R_2M_3 = QM_3 - P_2M_2 = y_3 - y_2$.

এক্ষণে, $\triangle P_1QR_1$ এবং $\triangle P_2QR_2$ সদৃশ ;

$$\therefore \frac{m_1}{m_2} = \frac{P_1Q}{P_2Q} = \frac{P_1R_1}{P_2R_2} = \frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2} ;$$

$$\therefore m_1x_3 - m_1x_2 = m_2x_3 - m_2x_1 ;$$

$$\therefore (m_1 - m_2)x_3 = m_1x_2 - m_2x_1 ;$$

$$\therefore x_3 = \frac{m_1x_2 - m_2x_1}{m_1 - m_2}.$$

পুনশ্চ, $$\frac{m_1}{m_2} = \frac{P_1Q}{P_2Q} = \frac{QR_1}{QR_2} = \frac{y_3 - y_1}{y_3 - y_2} ;$$

$$\therefore m_1y_3 - m_1y_2 = m_2y_3 - m_2y_1 ;$$

$$\therefore (m_1 - m_2)y_3 = m_1y_2 - m_2y_1 ;$$

$$\therefore\quad y_3=\frac{m_1y_2-m_2y_1}{m_1-m_2}.$$

$$\therefore\quad \text{Q-এর স্থানাঙ্ক}\left(\frac{m_1x_2-m_2x_1}{m_1-m_2},\ \frac{m_1y_2-m_2y_1}{m_1-m_2}\right).$$

অনুসিদ্ধান্ত : P বিন্দু $\overline{P_1P_2}$-কে সমদ্বিখণ্ডিত করিলে, অর্থাৎ $\overline{P_1P_2}$-এর মধ্যবিন্দু হইলে, $m_1 : m_2=1$, অর্থাৎ $m_1=m_2$.

$$\therefore\quad x=\frac{m_1x_2+m_1x_1}{m_1+m_1}=\frac{m_1(x_2+x_1)}{2m_1}=\frac{x_1+x_2}{2},$$

$$y=\frac{m_1y_2+m_1y_1}{m_1+m_1}=\frac{m_1(y_2+y_1)}{2m_1}=\frac{y_1+y_2}{2}.$$

উদাহরণমালা

উদা. 1. মূলবিন্দু হইতে (8, 12) বিন্দুর দূরত্ব নির্ণয় কর।

মূলবিন্দুর স্থানাঙ্ক (0, 0) ;

$\therefore$ নির্ণেয় দূরত্ব $=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{8^2+12^2}=\sqrt{64+144}$
$=\sqrt{208}=4\sqrt{13}.$

উদা. 2. (13, 7) এবং (8, −5) বিন্দুদ্বয়ের মধ্যে দূরত্ব নির্ণয় কর।

ধরা যাক, P_1 বিন্দুর স্থানাঙ্ক (13, 7) এবং P_2 বিন্দুর স্থানাঙ্ক (8, −5) ;

$$\therefore\quad P_1P_2=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$
$$=\sqrt{(13-8)^2+[7-(-5)]^2}$$

[x_1, x_2 এবং y_1, y_2-এর মান বসাইয়া]

$$=\sqrt{5^2+12^2}=\sqrt{25+144}=13.$$

উদা. 3. a-এর মান যাহাই হউক না কেন, মূলবিন্দু হইতে $(b\cos a, b\sin a)$ বিন্দুর দূরত্ব সর্বদাই b-এর সমান।

নির্ণেয় দূরত্ব $=\sqrt{(b\cos a)^2+(b\sin a)^2}$

[যেহেতু মূলবিন্দুর স্থানাঙ্ক (0, 0)]

$$=\sqrt{b^2\cos^2 a+b^2\sin^2 a}=b\sqrt{\cos^2 a+\sin^2 a}=b\times 1=b.$$

উদা. 4. প্রমাণ কর যে, (2, 2), (−2, −2) এবং $(-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3})$ বিন্দুত্রয় একটি সমবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু।

ধরা যাক A (2, 2), B (−2, −2) এবং C $(-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3})$ ত্রিভুজের তিনটি শীর্ষবিন্দু।

$$AB=\sqrt{\{2-(-2)\}^2+\{2-(-2)\}^2}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}\ ;$$

$BC = \sqrt{(-2\sqrt{3}+2)^2+(2\sqrt{3}+2)^2}$
$= \sqrt{12+4-8\sqrt{3}+12+4+8\sqrt{3}} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$;
$CA = \sqrt{(-2\sqrt{3}-2)^2+(2\sqrt{3}-2)^2}$
$= \sqrt{12+4+8\sqrt{3}+12+4-8\sqrt{3}} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$.

যেহেতু বাহু-তিনটির প্রত্যেকটির দৈর্ঘ্য $= 4\sqrt{2}$, অতএব, A, B, C সমবাহু ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুত্রয়।

উদা. 5. $(x, 4)$ এবং $(2, 1)$ বিন্দুদ্বয়ের মধ্যে দূরত্ব 5 হইলে, x-এর মান কত হইবে?

প্রদত্ত বিন্দুদ্বয়ের মধ্যে দূরত্ব $= \sqrt{(x-2)^2+(4-1)^2}$.
$\therefore\ (x-2)^2+9=5^2=25$; বা, $(x-2)^2=16$; বা, $x-2=\pm 4$;
$\therefore\ x=2\pm 4=6$ বা, -2.

উদা. 6. (x, y) বিন্দুটি $(4, 5)$ এবং $(-2, 3)$ বিন্দু-দুইটি হইতে সমদূরবর্তী। প্রমাণ কর যে, $3x+y=7$.

(x, y) এবং $(4, 5)$ বিন্দুদ্বয়ের মধ্যে দূরত্ব $= \sqrt{(x-4)^2+(y-5)^2}$.
(x, y) এবং $(-2, 3)$ বিন্দুদ্বয়ের মধ্যে দূরত্ব $= \sqrt{(x+2)^2+(y-3)^2}$.
যেহেতু (x, y) বিন্দুটি $(4, 5)$ এবং $(-2, 3)$ বিন্দুদ্বয় হইতে সমদূরবর্তী,
অতএব, $\sqrt{(x-4)^2+(y-5)^2} = \sqrt{(x+2)^2+(y-3)^2}$;
অথবা, $(x-4)^2+(y-5)^2=(x+2)^2+(y-3)^2$;
অথবা, $x^2-8x+16+y^2-10y+25=x^2+4x+4+y^2-6y+9$;
অথবা, $-8x-4x-10y+6y=4+9-16-25$;
অথবা, $12x+4y=28$;
$\therefore\ 3x+y=7$.

উদা. 7. দেখাও যে, $(8, 6)$ এবং $(16, 12)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরল রেখা মূলবিন্দু দিয়া যাইবে।

P_1 এবং P_2 বিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(16, 12)$ এবং $(8, 6)$ এবং O যেন মূলবিন্দু।

$$OP_1 = \sqrt{16^2+12^2}=20\ ;$$
$$P_1P_2 = \sqrt{(16-8)^2+(12-6)^2} = \sqrt{8^2+6^2}=10\ ;$$
$$OP_2 = \sqrt{8^2+6^2}=10.$$

$\because\ OP_2+P_1P_2=10+10=20=OP_1$.
$\therefore$ O, P_2, P_1 একই সরল রেখায় অবস্থিত।

উদা. 8. $(4, 6)$ এবং $(10, 12)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরল রেখাকে $(6, 8)$ বিন্দু কি অনুপাতে বিভক্ত করে, তাহা নির্ণয় কর।

ধরা যাক, নির্ণেয় অনুপাত $= m_1 : m_2$.

সূত্র 1·12 হইতে দেখা যায়,

$$x = \frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}.$$

$$\therefore \quad 6 = \frac{m_1 \times 10 + m_2 \times 4}{m_1 + m_2};$$

অথবা, $6m_1 + 6m_2 = 10m_1 + 4m_2$; বা, $-4m_1 = -2m_2$;

$$\therefore \quad \frac{m_1}{m_2} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}.$$

$\therefore$ নির্ণেয় অনুপাত $= 1 : 2$.

[দ্রষ্টব্য। $y = \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}$ হইতেও একই অনুপাত নির্ণীত হইবে।]

উদা. 9. যে বিন্দুটি (13, −1) এবং (8, 9) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরল রেখাকে 2 : 3 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে, উহার স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

ধরা যাক, নির্ণেয় স্থানাঙ্ক $= (x, y)$; $2 : 3 = m_1 : m_2$.

অনুচ্ছেদ 1·12 (1)-এর সূত্র হইতে পাই,

$$x = \frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2} = \frac{2.8 + 3.13}{2 + 3} = \frac{55}{5} = 11 ;$$

$$y = \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2} = \frac{2 \times 9 + 3(-1)}{2 + 3} = \frac{15}{5} = 3.$$

$\therefore$ নির্ণেয় স্থানাঙ্ক $= (11, 3)$.

উদা. 10. (10, 1) এবং (4, 8) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরল রেখাকে যে বিন্দু 3 : 4-এর অনুপাতে বহির্বিভক্ত করে, উহার স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

ধরা যাক, নির্ণেয় স্থানাঙ্ক $= (x_3, y_3)$; $3 : 4 = m_1 : m_2$.

1·12 (2)-এর সূত্র হইতে পাই,

$$x_3 = \frac{m_1x_2 - m_2x_1}{m_1 - m_2} = \frac{3 \times 4 - 4 \times 10}{3 - 4} = \frac{-28}{-1} = 28 ;$$

$$y_3 = \frac{m_1y_2 - m_2y_1}{m_1 - m_2} = \frac{3 \times 8 - 4 \times 1}{3 - 4} = \frac{20}{-1} = -20.$$

$\therefore$ নির্ণেয় স্থানাঙ্ক $= (28, -20)$.

উদা. 11. দেখাও যে, (9, −2), (10, 6), (−1, 6) এবং (−2, −2) বিন্দু-চতুষ্টয় একটি সামান্তরিকের শীর্ষবিন্দু।

[কোন চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করিলে, চতুর্ভুজটি সামান্তরিক—এই জ্যামিতিক শর্তের উপর আলোচ্য প্রশ্নের সমাধান নির্ভর করে।]

ধরা যাক, A (9, −2), B (10, 6), C (−1, 6) এবং D (−2, −2) বিন্দুগুলি চতুর্ভুজটির কৌণিক বিন্দু।

এবং কর্ণদ্বয় $\overline{AC}$ এবং $\overline{BD}$-এর মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (x_1, y_1), (x_2, y_2).

$\overline{AC}$-এর মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক $x_1 = \dfrac{9-1}{2} = 4,\ y_1 = \dfrac{-2+6}{2} = 2.$

$\overline{BD}$-এর মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক $x_2 = \dfrac{10-2}{2} = 4,\ y_2 = \dfrac{6-2}{2} = 2.$

∴ (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) বিন্দুদ্বয় একই বিন্দু।

∴ $\overline{AC}$ এবং $\overline{BD}$ পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

∴ ABCD একটি সামান্তরিক।

উদা. 12. (3, 3), (10, 4) এবং (2, 10) বিন্দুত্রয় হইতে সমদূরবর্তী বিন্দুটির স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

নির্ণেয় স্থানাঙ্ক যেন (x, y).

অনুচ্ছেদ 1·11-এর সূত্র অনুসারে

$$\sqrt{(x-3)^2+(y-3)^2} = \sqrt{(x-10)^2+(y-4)^2} = \sqrt{(x-2)^2+(y-10)^2}.$$

ইহা হইতে পাওয়া যায়,

$$(x-3)^2+(y-3)^2 = (x-10)^2+(y-4)^2 \quad \cdots \text{(i)}$$

$$(x-10)^2+(y-4)^2 = (x-2)^2+(y-10)^2 \quad \cdots \text{(ii)}$$

(i) হইতে $-6x+9-6y+9 = -20x+100-8y+16$;

অথবা, $14x+2y=98$;

অথবা, $7x+y=49$; ··· (iii)

(ii) হইতে $-20x+100-8y+16 = -4x+4-20y+100$;

অথবা, $-16x+12y=-12$;

অথবা, $4x-3y=3$; ··· (iv)

(iii) ও (iv) সমীকরণদ্বয়ের সমাধান করিয়া,

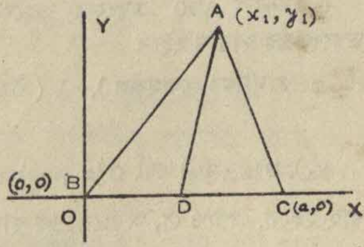
$x=6$ এবং $y=7$ পাওয়া যায়।

∴ নির্ণেয় স্থানাঙ্ক (6, 7).

উদা. 13. ABC ত্রিভুজে $\overline{BC}$-এর মধ্যবিন্দু D. প্রমাণ কর যে,

$$AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2).$$

B-কে মূলবিন্দু, বর্ধিত $\overrightarrow{BC}$-কে x-অক্ষরেখা, এবং BC-এর উপর অঙ্কিত লম্ব BY-কে y-অক্ষরেখা, ধরা হইল। $\therefore$ B-এর স্থানাঙ্ক $(0, 0)$, এবং $BC=a$ ধরিলে, C-এর স্থানাঙ্ক $(a, 0)$, D-এর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{a}{2}, 0\right)$.



A-এর স্থানাঙ্ক যেন (x_1, y_1). তাহা হইলে,

$$AB^2 + AC^2 = (x_1^2 + y_1^2) + (a - x_1)^2 + y_1^2$$
$$= 2x_1^2 + 2y_1^2 - 2ax_1 + a^2$$

এবং $2(AD^2 + BD^2) = 2\left[\left\{\left(x_1 - \frac{a}{2}\right)^2 + y_1^2\right\} + \left(\frac{a}{2}\right)^2\right]$

$$= 2x_1^2 + 2y_1^2 - 2ax_1 + a^2.$$

$\therefore \quad AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2).$

উদা. 14. ABC ত্রিভুজে D, E, F যথাক্রমে $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ এবং $\overline{AB}$ বাহুর মধ্যবিন্দু। G বিন্দু $\overline{AD}$-কে $2:1$ অনুপাতে বিভক্ত করিলে, G-এর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর ; এবং প্রমাণ কর যে, G বিন্দু $\overline{BE}$ ও $\overline{CF}$ উভয়কেই একই অনুপাতে ভাগ করিবে।

ইহা হইতে প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয় সমবিন্দু।

A, B, C-এর স্থানাঙ্ক যেন যথাক্রমে (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3).

$\therefore$ D-এর স্থানাঙ্ক, $\left(\frac{x_2+x_3}{2}, \frac{y_2+y_3}{2}\right)$.

$\therefore$ G-এর স্থানাঙ্ক, (x, y) হইলে,

$$x = \frac{2 \times \frac{x_2+x_3}{2} + 1 \times x_1}{2+1} = \frac{x_1+x_2+x_3}{3}.$$

অনুরূপে, $\quad y = \frac{y_1+y_2+y_3}{3}.$

এইরূপে প্রমাণ করা যায় যে, যে বিন্দুদ্বয় $\overline{BE}$ এবং $\overline{CF}$-কে $2:1$ অনুপাতে ভাগ করে, তাহাদের স্থানাঙ্ক $\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$ অর্থাৎ G বিন্দু $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ এবং $\overline{CF}$-এর প্রত্যেকটির উপর অবস্থিত।

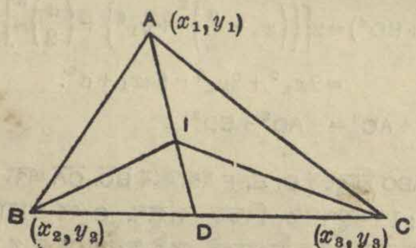
অতএব, মধ্যমাত্রয় একবিন্দুগামী।

বিশেষ দ্রষ্টব্য। G বিন্দুকে ABC ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র (centroid) বলে। অতএব কোন ত্রিভুজের ভরকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক হইবে

[$\frac{1}{3}$ (শীর্ষবিন্দুত্রয়ের x স্থানাঙ্কের যোগফল), $\frac{1}{3}$ (শীর্ষবিন্দুত্রয়ের y স্থানাঙ্কের যোগফল)]।

উদা. 15. $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ এবং $C(x_3, y_3)$ কোন ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু এবং a, b, c ত্রিভুজের বাহু হইলে, দেখাও যে, অন্তঃকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $\frac{ax_1+bx_2+cx_3}{a+b+c}$, $\frac{ay_1+by_2+cy_3}{a+b+c}$.

ত্রিভুজটির কোণত্রয়ের সমদ্বিখণ্ডকগুলি যেন I বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে, এবং AI বর্ধিত হইয়া যেন D বিন্দুতে $\overline{BC}$-এর সহিত মিলিত হইয়াছে।



অতএব, BD : DC = AB : AC = $c : b$.

অতএব, D বিন্দু $\overline{BC}$-কে $c : b$-এর অনুপাতে বিভক্ত করিয়াছে।

$\therefore$ D-এর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{cx_3+bx_2}{c+b}, \frac{cy_3+by_2}{c+b}\right)$.

CI, ∠ACD-এর সমদ্বিখণ্ডক বলিয়া,

$$\frac{AI}{ID}=\frac{AC}{DC}.$$

BI, ∠ABD-এর সমদ্বিখণ্ডক বলিয়া,

$$\frac{AI}{ID}=\frac{AB}{BD}.$$

$$\therefore \quad \frac{\text{AI}}{\text{ID}} = \frac{\text{AC}}{\text{DC}} = \frac{\text{AB}}{\text{BD}} = \frac{\text{AC}+\text{AB}}{\text{DC}+\text{BD}} = \frac{b+c}{a}.$$

I-এর স্থানাঙ্ক (x, y) হইলে,

$$x = \frac{(b+c) \times \dfrac{(cx_3 + bx_2)}{(c+b)} + ax_1}{b+c+a}, \quad y = \frac{(b+c) \times \dfrac{(cy_3 + by_2)}{(c+b)} + ay_1}{b+c+a},$$

অর্থাৎ $x = \dfrac{ax_1 + bx_2 + cx_3}{a+b+c}, \quad y = \dfrac{ay_1 + by_2 + cy_3}{a+b+c}.$

প্রশ্নমালা 5

1. মূলবিন্দু হইতে নিম্নলিখিত বিন্দুগুলির দূরত্ব নির্ণয় কর (Find the distance between the origin and the following points) : $(3, 4), (-4, 3), (-8, -6), (12, 5)$.

2 হইতে 6 প্রশ্নের বিন্দুদ্বয়ের মধ্যে দূরত্ব নির্ণয় কর :

2. $(2, 3)$ এবং $(5, 7)$.

3. $(4, -7)$ এবং $(-1, 5)$.

4. $(a, 0)$ এবং $(0, b)$.

5. $(b+c, c+a)$ এবং $(c+a, a+b)$.

6. $(am_1{}^2, 2am_1)$ এবং $(am_2{}^2, 2am_2)$.

7. $(x_1, 2)$ এবং $(3, 4)$ বিন্দুদ্বয়ের মধ্যে দূরত্ব 8 হইলে, x_1-এর মান নির্ণয় কর।

8. θ-এর যে-কোন মানের জন্য মূলবিন্দু এবং $(a \cos\theta, a \sin\theta)$ বিন্দুটির সংযোজক সরল রেখা সর্বদা a-এর সমান।

9. দেখাও যে, $(3, 5)$ এবং $(6, 10)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরল রেখা মূলবিন্দু-গামী।

10. AB সরল রেখার দৈর্ঘ্য 10, A এবং B-এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(2, -3)$ এবং $(10, y_1)$ হইলে, y_1-এর মান নির্ণয় কর।

11. প্রমাণ কর যে, $(2a, 4a), (2a, 6a)$ এবং $(2a + \sqrt{3}a, 5a)$ বিন্দুত্রয় সংযুক্ত করিলে, একটি সমবাহু ত্রিভুজ পাওয়া যাইবে, যাহার প্রত্যেক বাহুর দৈর্ঘ্য $= 2a$.

12. প্রমাণ কর যে, $(-2, -1), (1, 0), (4, 3)$ এবং $(1, 2)$ বিন্দুচতুষ্টয় যথাক্রমে যোগ করিলে একটি সামান্তরিক উৎপন্ন হইবে।

(দেখাও যে বিপরীত বাহুগুলি সমান, অথবা কর্ণদ্বয়ের মধ্যবিন্দুদ্বয় একই।)

13. প্রমাণ কর যে, (a, b) $(a+h, b+k)$, $(a+h+h', b+k+k')$, এবং $(a+h', b+k')$ বিন্দুচতুষ্টয় যথাক্রমে যোগ করিলে একটি সামান্তরিক উৎপন্ন হইবে।

14. $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ এবং (x_4, y_4) বিন্দুচতুষ্টয় যথাক্রমে যোগ করিলে উৎপন্ন ক্ষেত্রটি একটি সামান্তরিক হইলে, প্রমাণ কর যে,

$$x_1 + x_3 = x_2 + x_4 \text{ এবং } y_1 + y_3 = y_2 + y_4.$$

15. প্রমাণ কর যে, $(0, 0)$ $(a, 0)$, $(0, b)$ বিন্দুত্রয় একটি সমকোণী ত্রিভুজের কৌণিক বিন্দু।

16. A, B, C, D-এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(2, -2)$, $(8, 4)$, $(5, 7)$ এবং $(-1, 1)$. প্রমাণ কর যে, ABCD একটি আয়তক্ষেত্র।

17. প্রমাণ কর যে, $(3, 0)$, $(6, 4)$ এবং $(-1, 3)$ বিন্দুত্রয় সংযুক্ত করিলে একটি সমকোণী ত্রিভুজ উৎপন্ন হইবে।

18. A, B এবং C-এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(3, 1)$, $(1, 3)$ এবং $(8, 8)$। প্রমাণ কর যে, ABC একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ।

19. প্রমাণ কর যে, A, B, C এবং D-এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(-7, 2)$, $(-1, -4)$, $(5, 2)$ এবং $(-1, 8)$ হইলে, ABCD একটি বর্গক্ষেত্র হইবে।

20. A, B, C এবং D-এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(1, 1)$, $(2, 3)$, $(-2, 2)$ এবং $(-\frac{1}{14}, \frac{32}{14})$। প্রমাণ কর যে, D বিন্দু ABC ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র।

21. প্রমাণ কর যে, $(a \cos \theta_1, a \sin \theta_1)$, $(a \cos \theta_2, a \sin \theta_2)$, $(a \cos \theta_3, a \sin \theta_3)$ এবং $(a \cos \theta_4, a \sin \theta_4)$ বিন্দুচতুষ্টয় মূলবিন্দু হইতে সমদূরবর্তী, সুতরাং বিন্দুচতুষ্টয় একটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের শীর্ষবিন্দু।

22. P এবং Q-এর স্থানাঙ্ক $(-7, 3)$, $(14, -6)$। প্রমাণ কর যে, P, Q এবং O (মূলবিন্দু) সমরেখ।

[প্রমাণ কর যে, $OP + OQ = PQ$.]

23. প্রমাণ কর যে, $(12, 5)$, $(-12, 5)$, $(12, -5)$. $(-12, -5)$ বিন্দুচতুষ্টয় মূলবিন্দু হইতে সমদূরবর্তী। ইহা হইতে দেখাও যে, বিন্দুচতুষ্টয় সমবৃত্ত।

24. (x, y) বিন্দুটি $(3, 4)$ এবং $(1, -2)$ হইতে সমদূরবর্তী হইলে, প্রমাণ কর যে, $x + 3y = 5$.

25. A এবং B বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(1, 3)$, $(2, 7)$. P বিন্দু যদি $\overline{AB}$ সরল রেখাকে $3 : 4$ অনুপাতে (i) অন্তর্বিভক্ত, (ii) বহির্বিভক্ত করে, তবে P-এর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

26. A ও B বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(-3, -5)$ ও $(6, 10)$. প্রমাণ কর যে, $\overline{AB}$ মূলবিন্দু দ্বারা $1 : 2$ অনুপাতে বিভক্ত।

27. (x, y) বিন্দুটি $(8, 5)$ ও $(4, 9)$ বিন্দুদ্বয় হইতে সমদূরবর্তী হইলে, দেখাও যে, $x - y + 1 = 0$.

28. (x, y) বিন্দুটি $(3, 3)$ এবং $(-1, 7)$ বিন্দুদ্বয় হইতে সমদূরবর্তী হইলে, দেখাও যে, $x - y + 4 = 0$.

29. $(2, 9), (3, 2)$ এবং $(6, 1)$ বিন্দুত্রয় হইতে সমদূরবর্তী বিন্দুটির স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

30. $(-1, 6), (3, 2)$ এবং $(7, 6)$ বিন্দুত্রয় হইতে সমদূরবর্তী বিন্দুটির স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

31. কোন্ শর্ত সিদ্ধ হইলে, (x, y) বিন্দুটি $(3, 5)$ এবং $(7, 9)$ বিন্দুদ্বয় হইতে সমদূরবর্তী হইবে।

32. A এবং B-এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(1, -2)$ এবং $(-3, 4)$. P এবং Q, $\overline{AB}$-কে তিন সমান অংশে বিভক্ত করিলে, P এবং Q-এর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

33. A, B এবং C-এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(1, -1), (4, 3)$ এবং $(5, -4)$ হইলে, প্রমাণ কর যে, ABC ত্রিভুজ সমকোণী সমদ্বিবাহু হইবে।

34. প্রমাণ কর যে, $(2, 5), (5, 9), (9, 12)$ এবং $(6, 8)$ বিন্দুচতুষ্টয় একটি রম্বসের কৌণিক বিন্দু।

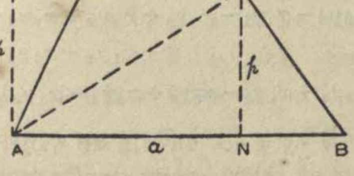
35. যদি A, B, C, P, Q এবং R এই ছয়টি বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(2, 3)$, $(3, -4), (8, -7), (4, -3), (6, -5)$ এবং $(3, 0)$ হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে, ABC এবং PQR ত্রিভুজদ্বয়ের একই ভরকেন্দ্র (centroid) হইবে।

36. প্রমাণ কর যে, কোন ত্রিভুজের দুই বাহুর মধ্যবিন্দুর সংযোজক সরল রেখা তৃতীয় বাহুর অর্ধাংশ হইবে।

37. প্রমাণ কর যে, কোন চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুগুলির মধ্যবিন্দুসমূহ যুক্ত করিয়া যে দুই সরল রেখা পাওয়া যায়, তাহারা পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

1·13. ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল: স্থানাঙ্কের সাহায্যে ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় প্রসঙ্গে প্রথমেই ট্রাপিজিয়মের ক্ষেত্রসংক্রান্ত নিম্নলিখিত জ্যামিতিক তথ্যটি অবশ্য-জ্ঞাতব্য।

ট্রাপিজিয়মের ক্ষেত্রফল (the area of a Trapezium)।



ধর, ABCD যেন একটি ট্রাপিজিয়ম; এবং উহার $\overline{AB}$ ও $\overline{CD}$ বাহুদ্বয় যেন সমান্তরাল।

AB-এর দৈর্ঘ্য যেন a ও CD-এর দৈর্ঘ্য যেন b. $\overline{\text{CD}}$-এর উপর $\overline{\text{AM}}$ এবং $\overline{\text{AB}}$-এর উপর $\overline{\text{CN}}$ লম্ব টানা হইল। $\therefore$ AMCN একটি আয়তক্ষেত্র।

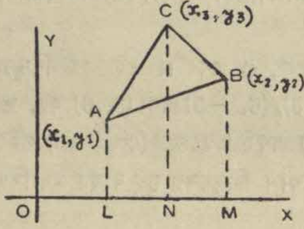
সুতরাং, AM = CN = p হইলে,

$$\text{ABCD-এর ক্ষেত্রফল} = \triangle\text{ABC} + \triangle\text{ACD} = \tfrac{1}{2}ap + \tfrac{1}{2}bp = \tfrac{1}{2}(a+b)p\ ;$$

অর্থাৎ ট্রাপিজিয়মের ক্ষেত্রফল = (সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের সমষ্টির অর্ধভাগ)
× (এই বাহুদ্বয়ের মধ্যের দূরত্ব)।

1·14. কোন ত্রিভুজের কৌণিক বিন্দুত্রয়ের স্থানাঙ্ক দেওয়া থাকিলে, উহার ক্ষেত্রফল-নির্ণয়।

[To find the area of a triangle, having given the co-ordinates of its angular points.]



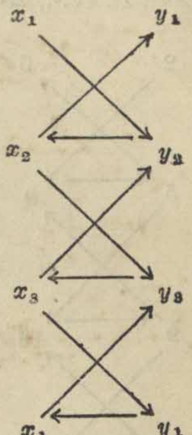
ABC ত্রিভুজের কৌণিক বিন্দুত্রয় A, B এবং C-এর স্থানাঙ্ক যেন যথাক্রমে (x_1, y_1), (x_2, y_2) এবং (x_3, y_3).

x-অক্ষ (OX)-এর উপর $\overline{\text{AL}}$, $\overline{\text{BM}}$ এবং $\overline{\text{CM}}$ লম্ব টানা হইল। তাহা হইলে, ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলকে $\triangle$ দ্বারা সূচিত করিলে,

$$\begin{aligned}\triangle &= \text{ট্রাপিজিয়ম ALNC} + \text{ট্রাপিজিয়ম BMNC} - \text{ট্রাপিজিয়ম ALMB}\\ &= \tfrac{1}{2}(\text{LA}+\text{NC})\ \text{LN} + \tfrac{1}{2}(\text{NC}+\text{MB})\ \text{NM} - \tfrac{1}{2}(\text{LA}+\text{MB})\ \text{LM}\\ &= \tfrac{1}{2}[(y_1+y_3)(x_3-x_1)+(y_3+y_2)(x_2-x_3)-(y_1+y_2)(x_2-x_1)]\\ &= \tfrac{1}{2}[x_3y_1+x_3y_3-x_1y_1-x_1y_3+x_2y_2+x_2y_3-x_3y_2-x_2y_3\\ &\qquad +x_1y_2+x_1y_1-x_2y_1-x_2y_2]\\ &= \tfrac{1}{2}(x_1y_2-x_2y_1+x_2y_3-x_3y_2+x_3y_1-x_1y_3).\end{aligned}$$

দ্রষ্টব্য ঃ এই সূত্রটি সহজে মনে রাখিবার জন্য পরপৃষ্ঠার চিত্রটি দ্রষ্টব্য। চিত্রে শীর্ষবিন্দু-তিনটির স্থানাঙ্ক পর পর লিখিয়া, পুনরায় প্রথমটির স্থানাঙ্ক নিচে লেখা হইয়াছে। তাহার পর বজ্রগুণন-প্রণালীর কোন্‌টিকে কোন্‌টি দ্বারা গুণ করিতে হইবে তাহা কোনাকুনি তীরচিহ্ন দ্বারা এবং কোন্ ক্রমে গুণ করিয়া যাইতে হইবে তাহা অনুভূমিক

তীরচিহ্ন দ্বারা নির্দেশ করা হইয়াছে, নিম্নগামী তীরচিহ্নের গুণফলগুলিকে ধনাত্মক এবং ঊর্ধ্বগামী তীরচিহ্নের গুণফলগুলিকে ঋণাত্মক ধরিতে হইবে। তাহার পর উহাদের সমষ্টিকে দুই দ্বারা ভাগ করিলে, ভাগফলই নির্ণেয় ক্ষেত্রফল হইবে।

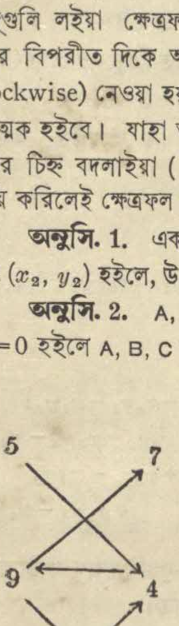


এই প্রসঙ্গে মনে রাখিতে হইবে যে (x_1, y_1), (x_2, y_2) এবং (x_3, y_3) বিন্দুগুলিকে এরূপ ক্রমে লইতে হইবে যে যদি ত্রিভুজটির পরিসীমা ধরিয়া কোন লোক ঘুরিয়া আসে, তাহা হইলে ত্রিভুজটি সর্বদা তাহার বাম দিকে থাকে, অর্থাৎ ঘড়ির কাঁটা যে দিকে ঘুরে, তাহার বিপরীত দিক্ ক্রমে (anticlockwise) ত্রিভুজের শীর্ষ-বিন্দুগুলি লইয়া ক্ষেত্রফল বাহির করিতে হইবে। যদি ইহার বিপরীত দিকে অর্থাৎ ঘড়ির কাঁটার গতির দিকে (clockwise) নেওয়া হয়, তাহা হইলে ক্ষেত্রফলের পরিমাণ ঋণাত্মক হইবে। যাহা অসম্ভব। সেক্ষেত্রে সূত্রটির সংখ্যা-গুলির চিহ্ন বদলাইয়া (অর্থাৎ '+' স্থলে '−' এবং '−' স্থলে '+') লিখিয়া ক্ষেত্রফল নির্ণয় করিলেই ক্ষেত্রফল পাওয়া যাইবে।

অনুসি. 1. একটি ত্রিভুজের কৌণিক বিন্দুত্রয়ের স্থানাঙ্ক (0, 0), (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) হইলে, উহার ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1)$.

অনুসি. 2. A, B, C বিন্দুত্রয় সমরেখ হইলে, $\triangle = 0$, এবং বিপরীতক্রমে $\triangle = 0$ হইলে A, B, C সমরেখ হইবে।

উদাহরণমালা



উদা. 1. কোন ত্রিভুজের শীর্ষ বিন্দুত্রয়ের স্থানাঙ্ক (5, 7), (9, 4) এবং (7, 10), উহার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}[5.4 - 9.7 + 9.10 - 7.4 + 7.7 - 5.10]$

$= \frac{1}{2}[20 - 63 + 90 - 28 + 49 - 50]$

$= \frac{1}{2}[159 - 141] = \frac{1}{2}.18 = 9.$

উদা. 2. প্রমাণ কর যে, (2, 6), (5, 9) এবং (9, 13) বিন্দুত্রয় সমরেখ (collinear).

তিনটি বিন্দু একই সরল রেখায় অবস্থিত হইলে, উহাদিগকে শীর্ষবিন্দু লইয়া অঙ্কিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল = 0.

প্রদত্ত বিন্দুত্রয় দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল

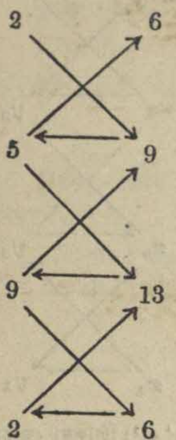
$= \frac{1}{2}[2.9 - 5.6 + 5.13 - 9.9 + 9.6 - 2.13]$

$= \frac{1}{2}[18 - 30 + 65 - 81 + 54 - 26]$

$= \frac{1}{2}[137 - 137] = 0.$

অতএব, প্রদত্ত বিন্দুত্রয় একই সরল রেখায় অবস্থিত।

উদা. 3. কোন ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুত্রয় $(5, 0), (0, 6)$ এবং (x, y); উহার ক্ষেত্রফল 12 হইলে, প্রমাণ কর যে, $6x+5y=6$.



ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{2}[30-0+0-6x+0-5y]$
$=12$ (প্রদত্ত শর্ত হইতে)

$\therefore \quad \frac{1}{2}[30-6x-5y]=12$;

অথবা, $30-6x-5y=24$;

অথবা, $-6x-5y=24-30$;

অথবা, $6x+5y=6$.

উদা. 4. (x, y), $(4, 6)$ এবং $(0, 4)$ বিন্দুত্রয় সমরেখ হইলে, প্রমাণ কর যে, $x-2y+8=0$.

প্রদত্ত বিন্দু-তিনটি দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল
$=\frac{1}{2}[6x-4y+16-0+0-4x]$;

যেহেতু বিন্দুত্রয় একই রেখায় অবস্থিত, অতএব ক্ষেত্রফল $=0$;

$\therefore \quad 2x-4y+16=0$; অথবা, $x-2y+8=0$.

উদা. 5. A, B, C এবং D-এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) এবং (x_4, y_4) হইলে, ABCD চতুর্ভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

ABCD-এর ক্ষেত্রফল $=\triangle ABD+\triangle DBC$

$$=\tfrac{1}{2}(x_1y_2-x_2y_1+x_2y_4-x_4y_2+x_4y_1-x_1y_4)$$
$$+\tfrac{1}{2}(x_4y_2-x_2y_4+x_2y_3-x_3y_2+x_3y_4-x_4y_3)$$
$$=\tfrac{1}{2}(x_1y_2-x_2y_1+x_2y_3-x_3y_2+x_3y_4-x_4y_3+x_4y_1-x_1y_4).$$

উদা. 6. প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজের বাহুসমূহের মধ্যবিন্দুগুলি যোগ করিলে যে ত্রিভুজ উৎপন্ন হয়, উহার ক্ষেত্রফল মূল ত্রিভুজের এক-চতুর্থাংশ মাত্র।

ABC একটি ত্রিভুজ এবং D, E এবং F যথাক্রমে যেন $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ এবং $\overline{AB}$-এর মধ্যবিন্দু।

D বিন্দুর মধ্য দিয়া $\overline{DY}$ যেন $\overline{BC}$-এর উপর লম্ব এবং DC ও DY যেন যথাক্রমে x-অক্ষ এবং y-অক্ষ। ধরা যাক, $BD=DC=a$.

$\therefore$ B এবং C-এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে হইবে $(-a, 0)$ এবং $(a, 0)$. A বিন্দুর স্থানাঙ্ক যেন (x, y);

$\therefore$ D, E এবং F-এর স্থানাঙ্ক হইবে যথাক্রমে (0, 0), $\left(\frac{x+a}{2}, \frac{y}{2}\right)$ এবং $\left(\frac{x-a}{2}, \frac{y}{2}\right)$.

$$\therefore \triangle ABC = \tfrac{1}{2}\{x \times 0 - (-a) \times y + (-a) \times 0 - 0 \times a + a \times y - x \times 0\}$$
$$= ay.$$

$$\triangle DEF = \frac{1}{2}\left\{0 \times \frac{y}{2} - 0 \times \frac{a+x}{2} + \frac{a+x}{2} \times \frac{y}{2} - \frac{x-a}{2} \times \frac{y}{2} + \frac{x-a}{2} \times 0 - 0 \times \frac{y}{2}\right\}$$

$$= \frac{ay}{4}.$$

$$\therefore \triangle DEF = \tfrac{1}{4} \times \triangle ABC.$$

প্রশ্নমালা 6

ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুত্রয়ের স্থানাঙ্ক দেওয়া আছে, উহার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর (Find the area of the triangle whose vertices are) :

1. (1, 3), (−7, 6) এবং (5, −1).

2. (0, 4), (3, 6) এবং (−8, −2).

3. (1, 1), (5, −1) এবং (2, 3).

4. (0, 2), (3, 5) এবং (−3, −1).

5. $(am_1{}^2, 2am_1)$, $(am_2{}^2, 2am_2)$ এবং $(am_3{}^2, 2am_3)$.

6. A, B, C, P, Q এবং R বিন্দু-ছয়টির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_1+h, y_1+k), (x_2+h, y_2+k) এবং (x_3+h, y_3+k) হইলে, প্রমাণ কর যে, $\triangle$ABC এবং $\triangle$PQR-এর ক্ষেত্রফল সমান।

A, B এবং C বিন্দুত্রয়ের স্থানাঙ্ক দেওয়া আছে। প্রমাণ কর যে, উহারা সমরেখ :

7. (−1, 3), (2, 9) এবং (−3, −1).

8. (1, 4), (3, −2) এবং (−3, 16).

9. $(3a, 0)$, $(0, 3b)$ এবং $(a, 2b)$.

10. $(a, b+c)$, $(b, c+a)$ এবং $(c, a+b)$.

11. যে ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুসমূহ (8, 2), (4, 6) এবং (x, y), উহার ক্ষেত্রফল 20 হইলে, প্রমাণ কর যে, $x+y=0$.

12. যে ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুসমূহ (x, y), (6, 9) এবং (8, 12), কোন্ শর্ত সিদ্ধ হইলে, উহার ক্ষেত্রফল 30 হইবে ?

13. কোন্ শর্ত সিদ্ধ হইলে, (x, y), $(6, 9)$ এবং $(8, 12)$ বিন্দুগুলি সমরেখ হইবে ?

14. A, B, C এবং P বিন্দু চতুষ্টয়ের স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(6, 3)$, $(-3, 5)$, $(4, -2)$ এবং (x, y) হইলে, প্রমাণ কর যে, $\frac{\triangle PBC}{\triangle ABC}=\frac{x+y-2}{7}$.

15. A, B, C, D বিন্দু চতুষ্টয়ের স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(6, 3)$, $(-3, 5)$, $(4, -2)$ এবং $(x, 3x)$ এবং $\frac{\triangle DBC}{\triangle ABC}=\frac{1}{2}$ হইলে, প্রমাণ কর যে, $x=\frac{11}{8}$.

1·15. বিন্দুর সঞ্চারপথ (Locus of a point) :

একটি বিন্দু যদি কোন নির্দিষ্ট নিয়ম বা শর্ত অনুসারে সঞ্চরমান হয়, তবে যে-পথে বিন্দুটি চলে, তাহাকে উহার **সঞ্চারপথ** (locus) বলে।

ঐ সঞ্চরমান বিন্দুর স্থানাঙ্ক যদি (x, y) হয়, তবে যে-শর্ত দ্বারা উহার গতিপথ নিয়ন্ত্রিত হয় সেই শর্তকে উহার স্থানাঙ্ক x ও y-এর একটি সম্পর্ক বা সমীকরণ দ্বারা সূচিত করা হয়। সেই কারণে ঐ শর্তসূচক সমীকরণটিকে সঞ্চারপথের সমীকরণ বলা হয়। বিপরীতক্রমে সঞ্চারপথটিকে বলা হয় উক্ত সমীকরণের লেখ।

বীজগণিতে এইরূপ সমীকরণের লেখ সঞ্চারপথের উৎকৃষ্ট উদাহরণ। কিন্তু x ও y-এর জোড়া জোড়া মান লইয়া যেমন লেখ বা সঞ্চারপথ চিত্রিত করিতে হয়, বিশ্লেষণমূলক জ্যামিতিতে তেমন কোন চিত্র অঙ্কনের প্রয়োজন নাই। কারণ এই জ্যামিতিতে সমীকরণের গঠন দেখিয়াই সঞ্চারপথটির আকৃতি-প্রকৃতি অতি সহজে নির্ণয় করা চলে। পরবর্তী উদাহরণে বিষয়টি স্পষ্টতর করা যাইতেছে।

উদাহরণমালা

উদা. 1. একটি বিন্দু যদি এরূপভাবে স্থান পরিবর্তন করে যে, সকল অবস্থানেই উহার ভুজ 5 একক দীর্ঘ, তাহা হইলে ঐ বিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর।

ধরা যাক, বিন্দুটির যে-কোনও অবস্থানে স্থানাঙ্ক (x, y), তাহা হইলে প্রদত্ত শর্তানুসারে সর্ব অবস্থানেই $x=5$; $\therefore$ এই সমীকরণটিই নির্ণেয় সমীকরণ।

উদা. 2. A এবং B দুইটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(2, 4)$ এবং $(3, 5)$. যদি একটি বিন্দু P এরূপভাবে স্থান পরিবর্তন করে যে, P-এর সকল অবস্থানেই APB কোণটি সমকোণ, তাহা হইলে P-এর সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর।

ধরা যাক, P বিন্দুটির যে-কোন অবস্থানে স্থানাঙ্ক (x, y), তাহা হইলে প্রদত্ত শর্তানুসারে APB একটি সমকোণী ত্রিভুজ।

$\therefore$ সর্ব অবস্থানেই, $AP^2+BP^2=AB^2$.

$\therefore\ (x-2)^2+(y-4)^2+(x-3)^2+(y-5)^2=(3-2)^2+(5-4)^2,$

বা, $2x^2+2y^2-10x-18y+52=0,$

বা, $x^2+y^2-5x-9y+26=0.$

$\therefore$ এই সমীকরণটিই নির্ণেয় সমীকরণ।

উদা. 3. একটি সচল বিন্দুর সকল অবস্থানেই যদি ইহার কোটি, ভুজের তিনগুণ হয়, তবে বিন্দুটির সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর।

ধরা যাক, সচল বিন্দুটির যে-কোন অবস্থানে স্থানাঙ্ক (x, y)।

$\therefore$ প্রদত্ত শর্তানুসারে, $y=3x$; $\therefore$ ইহাই নির্ণেয় সমীকরণ।

উদা. 4. y-অক্ষ হইতে কোন সচল বিন্দুর দূরত্ব সকল অবস্থানেই (2, 2) বিন্দু হইতে উহার দূরত্বের দ্বিগুণ হইলে, ঐ বিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সচল P বিন্দুটির স্থানাঙ্ক যেন (x, y) এবং প্রদত্ত বিন্দু (2, 2) যেন Q বিন্দু। প্রদত্ত শর্ত হইতে y-অক্ষ হইতে P বিন্দুর দূরত্ব x এবং Q (2, 2) বিন্দু হইতে P (x, y) বিন্দুর দূরত্ব PQ

$$=\sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2}.$$

$\therefore$ প্রদত্ত শর্ত হইতে $x=2\sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2}$;

অথবা, $x^2=4\{(x^2-4x+4)+(y^2-4y+4)\}$;

অথবা, $x^2=4x^2-16x+16+4y^2-16y+16$;

অথবা, $3x^2+4y^2-16x-16y+32=0$; ইহাই নির্ণেয় সমীকরণ।

উদা. 5. ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু A সচল এবং স্থির শীর্ষবিন্দুদ্বয় B ও C-এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (2, 4) এবং (−6, 8). A-এর সকল অবস্থানেই যদি ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল 30 হয়, তাহা হইলে A-এর সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সচল বিন্দু A-এর স্থানাঙ্ক যেন (x, y).

$\triangle$ABC-এর ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{2}\{x(4-8)+2(8-y)+(-6)(y-4)\}$

$=\frac{1}{2}\{-4x+16-2y-6y+24\}$

$=\frac{1}{2}\{-4x-8y+40\}=-2x-4y+20$;

$\therefore$ প্রদত্ত শর্তানুসারে $30=-2x-4y+20$;

অথবা, $2x+4y+10=0$; অথবা, $x+2y+5=0$;

ইহাই নির্ণেয় সমীকরণ।

টীকা 1. কোন নির্দিষ্ট সমীকরণকে একটি সচল বিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ বলিয়া অভিহিত করা যায়, যদি উক্ত সচল বিন্দুর যে-কোন অবস্থানের ভুজ-কোটির মানদ্বয়ই নির্দিষ্ট সমীকরণটিকে সিদ্ধ করে।

টীকা 2. কোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক যদি একটি সমীকরণকে সিদ্ধ করে, তাহা হইলে ঐ সমীকরণটি যে সঞ্চারপথের সমীকরণ, সেই সঞ্চারপথের উপর বিন্দুটি অবস্থিত বলা হয়। যেমন, $y=3x$ সমীকরণটিকে মূলবিন্দুর স্থানাঙ্ক (0, 0) সিদ্ধ করে। $\therefore$ (0, 0) বিন্দুটি, $y=3x$ যে সঞ্চারপথের সমীকরণ সেই সঞ্চারপথের উপর অবস্থিত।

প্রশ্নমালা 7

দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু A এবং B-এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(a, 0)$ এবং $(-a, 0)$, P বিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর, যখন (The co-ordinates of two fixed points A and B are $(a, 0)$ and $(-a, 0)$ respectively ; find the equation of the locus of any point P, when)

1. $PA^2+PB^2=2K^2$, (যেখানে K একটি ধ্রুবক সংখ্যা)।
2. $PA^2-PB^2=2K^2$, „ „ „ „ „ ।
3. $PA=K.PB$, „ „ „ „ „ ।
4. $PA+PB=K$, „ „ „ „ „ ।
5. $PB^2+PC^2=2PA^2$, [C-এর স্থানাঙ্ক $(c, 0)$].
6. $PA=PB$.

P বিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর, যদি (Find the equation of the locus of any point, P, if)

7. অক্ষদ্বয় হইতে P বিন্দুর দূরত্বের যোগফল = 49.
8. অক্ষদ্বয় হইতে P বিন্দুর দূরত্বের বর্গের সমষ্টি = 25.
9. y-অক্ষ হইতে P বিন্দুর দূরত্ব, (2, 2) বিন্দু হইতে ইহার দূরত্বের সমান।
10. (−1, 0) বিন্দু হইতে P-এর দূরত্ব, (0, 2) বিন্দু হইতে ইহার দূরত্বের তিনগুণ হয়।
11. দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু Q এবং R-এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (−4, 8) এবং (12, 16). P এরূপ একটি সচল বিন্দু যে P-এর সকল অবস্থানেই PQR ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল = 40. P-এর সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর।
12. x-অক্ষ হইতে কোন বিন্দুর দূরত্ব (1, 1) বিন্দু হইতে ইহার দূরত্বের দ্বিগুণ হইলে, বিন্দুটির সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর।
13. কোন ত্রিভুজের ভূমি $=2a$ এবং বাহুদ্বয়ের বর্গের অন্তর = K দেওয়া আছে ; শীর্ষবিন্দুটির সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর। [সংকেত : ভূমিকে X-অক্ষ ও উহার মধ্যবিন্দুকে মূলবিন্দু ধরিলে ভূমির প্রান্তবিন্দু-দুইটির স্থানাঙ্ক $(-a, 0)$ ও $(a, 0)$ ইত্যাদি।]

দ্বিতীয় অধ্যায়

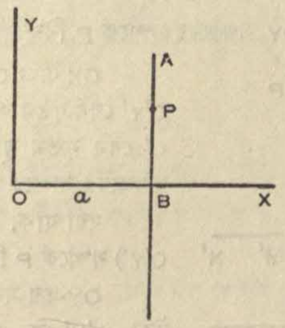
সরল রেখা (Straight Line)

2'1. কোন অক্ষের সমান্তরাল যে-কোন সরল রেখার সমীকরণ নির্ণয়।

[To find the equation to a straight line parallel to one of the co-ordinate axes.]

y-অক্ষের সমান্তরাল AB সরল রেখা, x-অক্ষকে যেন B বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। ধরা যাক, $OB = a$.

AB সরল রেখার উপর যে-কোন বিন্দু P-এর স্থানাঙ্ক (x, y) হইলে, P-এর ভুজ x সর্বদা $= a$, অর্থাৎ $x = a$.



অতএব, AB সরল রেখার সমীকরণ, $x = a$.

অনুরূপে, x-অক্ষের সমান্তরাল কোন সরল রেখার সমীকরণ হইবে $y = b$.

টীকা 1. y-অক্ষের সমান্তরাল সরল রেখার উপরিস্থিত প্রত্যেক বিন্দুই y-অক্ষ হইতে সমদূরবর্তী, এবং x-অক্ষের সমান্তরাল সরল রেখার উপরিস্থিত প্রত্যেক বিন্দুই x-অক্ষ হইতে সমদূরবর্তী।

টীকা 2. x-অক্ষের উপরিস্থিত প্রত্যেক বিন্দুর কোটি $= 0$.

$\therefore$ ইহার সমীকরণ, $y = 0$.

অনুরূপে, y-অক্ষের সমীকরণ, $x = 0$.

2·2. অক্ষদ্বয়ের পরিবর্তন (changes of axes).

কোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক বলিতে, x এবং y অক্ষদ্বয় হইতে ঐ বিন্দুর দূরত্ব বুঝায়। অতএব, বিন্দুটির অবস্থানের কোন পরিবর্তন না ঘটিলেও উহার অক্ষদ্বয়ের অবস্থানের পরিবর্তন ঘটিলেই ঐ বিন্দুর স্থানাঙ্কেরও পরিবর্তন হইবে। কেননা পরিবর্তিত অক্ষদ্বয় হয় বিন্দুটির নিকটবর্তী নতুবা অধিকতর দূরবর্তী হইবে।

এখন, অক্ষদ্বয়ের অবস্থান-পরিবর্তন ঘটিতে পারে তিন প্রকারে।

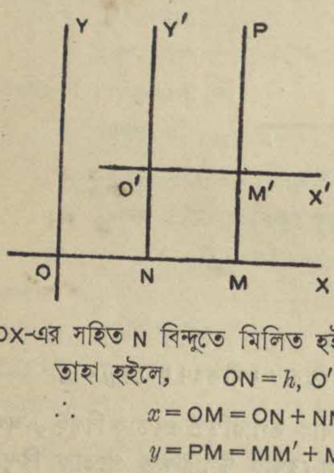
(1) প্রথমতঃ, অক্ষদ্বয়ের দিক্-পরিবর্তন না করিয়া, শুধু উহাদের অবস্থানের পরিবর্তন করা যায়। ইহাতে মূলবিন্দুর পরিবর্তন সুনিশ্চিত। অক্ষদ্বয়ের এইরূপ পরিবর্তনকে সমান্তরাল পরিবর্তন (parallel displacement) বলে।

(2) দ্বিতীয়তঃ, মূলবিন্দু স্থির রাখিয়া উহার অক্ষদ্বয়ের দিক্ পরিবর্তন করা যাইতে পারে।

(3) তৃতীয়তঃ, মূলবিন্দু এবং অক্ষদ্বয়ের দিক্ উভয়ই পরিবর্তিত হইতে পারে।

দ্বিতীয় ও তৃতীয় প্রকার পরিবর্তন পাঠ্যতালিকার বহির্ভূত। এখানে প্রথম প্রকার পরিবর্তন সম্বন্ধে আলোচনা করা হইতেছে।

ধরা যাক, OX এবং OY অক্ষদ্বয়ের সম্পর্কে P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y).



OX এবং OY-এর সমান্তরাল O′X′ এবং O′Y′ যেন নূতন অক্ষদ্বয় এবং উহাদের ছেদবিন্দু O′ যেন নূতন মূলবিন্দু; OX এবং OY মূল অক্ষদ্বয়ের সম্পর্কে O′-এর স্থানাঙ্ক যেন (h, k).

ধরা যাক, নূতন অক্ষদ্বয়ের (O′X′ এবং O′Y′) সম্পর্কে P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x', y').

OY-এর সমান্তরাল $\overline{\text{PM}}$ অঙ্কিত হইল, উহা O′X′-কে M′ বিন্দুতে ছেদ করিল। Y′O′-কে বর্ধিত করা হইল। উহা যেন OX-এর সহিত N বিন্দুতে মিলিত হইল।

তাহা হইলে, $\text{ON} = h,\ \text{O}'\text{N} = k,\ \text{OM} = x,\ \text{PM} = y$;

$\therefore\quad x = \text{OM} = \text{ON} + \text{NM} = \text{ON} + \text{O}'\text{M}' = h + x'$;

$y = \text{PM} = \text{MM}' + \text{M}'\text{P} = \text{O}'\text{N} + \text{PM}' = k + y'$.

$\therefore\ x = h + x',\ y = k + y'$-ই নির্ণেয় পরিবর্তনের সূত্র।

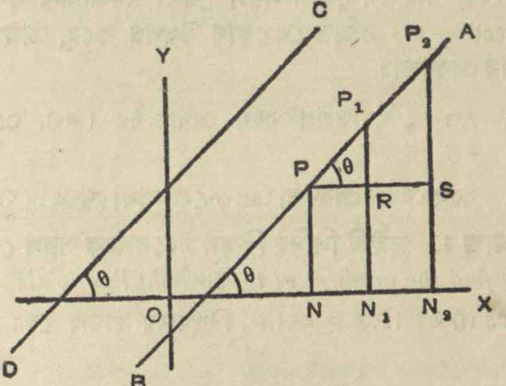
অতএব, দেখা যায় যে, বিন্দুটির আদি স্থানাঙ্ক (x, y)-এর স্থানে যথাক্রমে $(h + x')$ এবং $(k + y')$ বসাইলেই আদি মূলবিন্দুটি $(0, 0)$ পরিবর্তিত হইয়া (h, k) বিন্দুতে পরিবর্তিত হয়।

ইহা লম্ব এবং তির্যক্ উভয় প্রকার অক্ষদ্বয়ের ক্ষেত্রেই সত্য।

2·3. সরল রেখার প্রবণতা (Gradient of a straight line).

$\overrightarrow{OX}$ এবং $\overrightarrow{OY}$ যেন দুইটি পরস্পর-লম্ব অক্ষ। AB সরল রেখা OX-এর সহিত θ কোণ উৎপন্ন করিয়াছে।

AB সরল রেখার উপর P বিন্দুর তিনটি অবস্থান যেন P, P_1 এবং P_2 ; OX-এর উপর $\overline{PN}$, $\overline{P_1N_1}$ এবং $\overline{P_2N_2}$, এবং P হইতে $\overline{P_2N_2}$-এর উপর $\overline{PS}$ লম্ব আঁকা হইল। $\overline{PS}$ যেন $\overline{P_1N_1}$-কে R বিন্দুতে ছেদ করিল। PS এবং OX সমান্তরাল বলিয়া, $\angle P_1PR$ ($\angle P_2PS$) $= \theta$.



P বিন্দুটি P অবস্থান হইতে P_1 অবস্থানে গেলে, ইহার ভুজ $ON_1 - ON = NN_1 = PR$ পরিমাণ এবং কোটি $P_1N_1 - PN = P_1N_1 - RN_1 = P_1R$ পরিমাণ বৃদ্ধি পাইল।

অতএব, P বিন্দুটির ভুজের PR বৃদ্ধির জন্য কোটির বৃদ্ধি হইল P_1R.

$\therefore$ ভুজের এক একক বৃদ্ধির জন্য কোটির বৃদ্ধি হইল $\frac{P_1R}{PR}$.

এইভাবে কোন সরল রেখার কোন বিন্দুর ভুজের এক একক বৃদ্ধির জন্য কোটির যতটুকু বৃদ্ধি হয়, তাহাকে বলে ঐ সরল রেখার প্রবণতা (Gradient).

আবার দেখা যায় যে, P বিন্দুটি আরও অগ্রসর হইয়া P_2 অবস্থানে আসিলে P বিন্দুর ভুজ $ON_2 - ON = NN_2 = PS$ পরিমাণ বৃদ্ধি পায় এবং তজ্জন্য কোটি বৃদ্ধি পায় $P_2N_2 - PN = P_2N_2 - SN_2 = P_2S$ পরিমাণ।

$\therefore$ P বিন্দুর P_2 অবস্থানে ভুজের এক একক বৃদ্ধির জন্য কোটির বৃদ্ধি হয় $\frac{P_2S}{PS}$ পরিমাণ।

P_1PR এবং P_2PS সদৃশ ত্রিভুজদ্বয় হইতে দেখা যায় যে, $\frac{P_1R}{PR}=\frac{P_2S}{PS}$.

অতএব, ইহাই সিদ্ধান্ত হয় যে, একই সরল রেখার উপরিস্থিত যে-কোন বিন্দুর পক্ষে প্রবণতা একই (ধ্রুবক) হইবে।

যদি OX এবং OY অক্ষদ্বয়ের দৈর্ঘ্যের একক একই হয়, তাহা হইলে

$$\frac{P_1R}{PR}=\tan\theta.$$

অতএব দেখা যায় যে, **কোন সরল রেখা X-অক্ষের ধনাত্মক দিকের** (positive direction-এর) **সহিত যে কোণ উৎপন্ন করে, তাহার tangent-ই ঐ সরল রেখার প্রবণতা।**

টীকা 1. AB-এর সমান্তরাল সরল রেখাগুলির (যথা, CD-এর) প্রবণতা $=\tan\theta$.

টীকা 2. সরল রেখার **প্রবণতা tan θ-কে সাধারণতঃ m** দ্বারা বুঝানো হয়।

অনুসিদ্ধান্ত 1. দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দুর সংযোজক সরল রেখার প্রবণতা নির্ণয়। [*To find the gradient of the straight line joining two points.*]

[অনু. 2·3 (i)-এর চিত্রে P এবং P_1 বিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক যেন যথাক্রমে (x, y) এবং (x_1, y_1).

$\therefore$ নির্ণেয় প্রবণতা $=\frac{P_1R}{PR}=\frac{y_1-y}{x_1-x}$.

অনুসিদ্ধান্ত 2. তিনটি বিন্দুর সমরেখ হইবার শর্ত। [Collinearity of three points.]

ইতিপূর্বে প্রতিপন্ন হইয়াছে যে, বিন্দুত্রয় দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $=0$ হইলে, বিন্দুত্রয় সমরেখ। কিন্তু বিন্দু-তিনটির যে-কোন দুইটি দুইটি লইয়া দুইটি সরল রেখা আঁকিলে, তাহাদের প্রবণতা বাহির করিয়া যদি দেখা যায় যে, উভয় ক্ষেত্রে প্রবণতা একই, তাহা হইলে বিন্দুত্রয় সমরেখ।

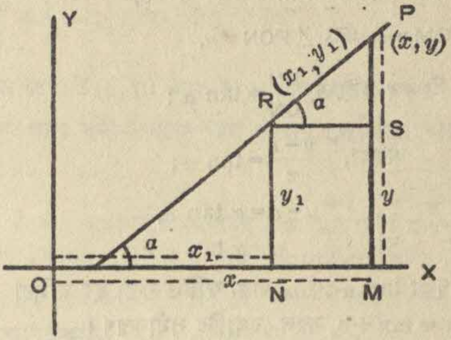
2·4. একটি নির্দিষ্ট বিন্দুগামী এবং x-অক্ষের সহিত এক নির্দিষ্ট কোণে নত সরল রেখার সমীকরণ নির্ণয়।

[*To find the equation to a straight line which passes through a given point and is inclined at a given angle to the x-axis.*]

প্রদত্ত সরল রেখা $R(x_1, y_1)$ বিন্দুগামী এবং x-অক্ষের সহিত যেন α কোণে নত।

ঐ সরল রেখার উপর P যেন এরূপ একটি বিন্দু, যাহার স্থানাঙ্ক (x, y).

P এবং R বিন্দু হইতে $\overrightarrow{OX}$-এর উপর $\overline{PM}$ ও $\overline{RN}$ এবং R হইতে $\overline{PM}$-এর উপর $\overline{RS}$ লম্ব টানা হইল।



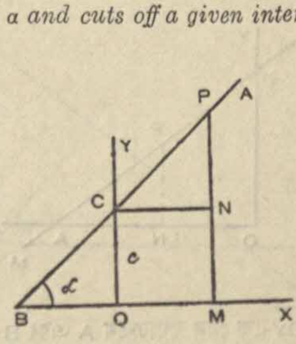
$\therefore$ $PS = PM - SM = y - y_1$;
$RS = NM = OM - ON = x - x_1$.

$\therefore$ $\tan \alpha = \frac{PS}{RS} = \frac{y - y_1}{x - x_1} = m$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ $y - y_1 = m(x - x_1)$.

2·5. যে সরল রেখা y-অক্ষ হইতে c অংশ ছেদ করে এবং x-অক্ষের সহিত α কোণ উৎপন্ন করে, তাহার সমীকরণ নির্ণয়।

[*To find the equation to the straight line which is inclined to the x-axis at a given angle α and cuts off a given intercept c from the y-axis.*]



$\overline{AB}$ সরল রেখা y-অক্ষকে যেন C বিন্দুতে ছেদ করে। $OC = c$, $\angle ABX = \alpha$ এবং $\overline{AB}$-এর উপরিস্থিত যে-কোন বিন্দু P-এর স্থানাঙ্ক যেন (x, y)। তাহা হইতে x এবং y-এর মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় করিতে হইবে।

$\overline{OX}$-এর উপর $\overline{PM}$ এবং $\overline{PM}$-এর উপর $\overline{CN}$ লম্ব টানা হইল।

তাহা হইলে $OM = x$, $PM = y$.

$\therefore \quad PN = PM - NM = PM - OC = y - c,$

এবং $CN = OM = x$ এবং $\angle PCN = a$.

$\therefore$ PCN ত্রিভুজ হইতে, $\dfrac{PN}{CN} = \tan a$;

$$\text{অথবা,} \quad \frac{y-c}{x} = \tan a;$$

$$\therefore \quad y - c = x \tan a,$$

$$\text{বা,} \quad y = x \tan a + c.$$

$\therefore$ সাধারণতঃ $\tan a$-কে m দ্বারা সূচিত করা হয় বলিয়া

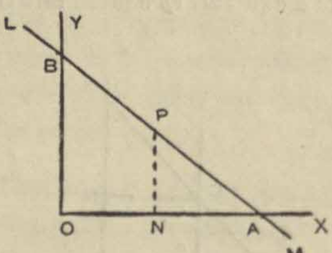
$\mathbf{y = mx + c}$, সরল রেখাটির সমীকরণ।

টীকা 1. উপরি উক্ত সরল রেখাটি $(0, c)$ বিন্দুগামী।

টীকা 2. যদি $c = 0$ হয়, অর্থাৎ সরল রেখাটি মূলবিন্দুগামী হয়, তবে উহার সমীকরণটি হইবে, $\mathbf{y = mx}$.

2·6. যে সরল রেখা x-অক্ষ এবং y-অক্ষ হইতে যথাক্রমে a এবং b অংশ কাটিয়া লয়, তাহার সমীকরণ নির্ণয়।

[*To find the equation to the straight line which cuts off intercepts a and b from x- and y- axes respectively.*]



$\overline{LM}$ রেখা, $\overrightarrow{OX}$ এবং $\overrightarrow{OY}$-কে যেন যথাক্রমে A এবং B বিন্দুতে এরূপে ছেদ করে, যেন $OA = a$ এবং $OB = b$.

এই সরল রেখার উপরিস্থিত যে-কোন বিন্দু P-এর স্থানাঙ্ক যেন (x, y). OX-এর উপর PN লম্ব টানা হইল। তাহা হইলে $ON = x$ এবং $PN = y$.

এখন APN এবং ABO সদৃশ ত্রিভুজদ্বয় হইতে

$$\frac{PN}{BO}=\frac{AN}{AO}=\frac{OA-ON}{OA}=1-\frac{ON}{OA}. \quad \therefore \quad \frac{y}{b}=1-\frac{x}{a},$$

অর্থাৎ, $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, সরল রেখাটির সমীকরণ।

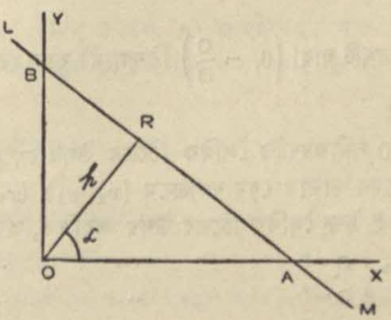
টীকা। সরল রেখাটি $(a, 0)$ এবং $(0, b)$ বিন্দুদ্বয়গামী।

এই অনুচ্ছেদে প্রাপ্ত সমীকরণকে সরল রেখার **ছেদিতাংশরূপে (Intercept form)** বলে।

এখানে সরল রেখার সমীকরণ নির্ণয়ের জন্য $\overrightarrow{OX}$ এবং $\overrightarrow{OY}$-এর ধনাত্মক অংশ হইতে ছেদিতাংশ লওয়া হইয়াছে। মনে রাখা দরকার যে, প্রদত্ত ছেদিতাংশ $\overline{XX'}$ বা YY′-এর একটি ঋণাত্মক বা উভয়ই ঋণাত্মক অংশ হইতে লওয়ার দরকার হইতে পারে। সেক্ষেত্রে আবশ্যকমত $-a$, $-b$ লইতে হইবে।

2·7. যদি মূলবিন্দু হইতে কোন সরল রেখার উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য p হয় এবং ঐ লম্ব, x-অক্ষরেখার ধনাত্মক দিকের সহিত α কোণ উৎপন্ন করে, তাহা হইলে তাহার সমীকরণ নির্ণয়।

[*To find the equation to the straight line in terms of the perpendicular p drawn to it from the origin and the angle α that the perpendicular makes with positive side of x-axis.*]



ধরা যাক, $\overleftrightarrow{LM}$ সরল রেখার উপর O হইতে অঙ্কিত লম্ব OR-এর দৈর্ঘ্য $=p$ এবং $\angle ROX=\alpha$.

যদি LM, অক্ষদ্বয়কে A এবং B বিন্দুতে ছেদ করে, তাহা হইলে,

$$\frac{OA}{OR} = \sec ROA, \text{ বা } \frac{OA}{p} = \sec a \; ; \quad \therefore \quad OA = p \sec a$$

এবং $\frac{OB}{OR} = \sec (90° - a) = \operatorname{cosec} a \; ; \quad \therefore \quad OB = p \operatorname{cosec} a.$

$\therefore$ সরল রেখার $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, এই সমীকরণটিতে x ও y অক্ষের উপর ছেদিতাংশ যথাক্রমে a ও b-এর স্থলে $p \sec a$ ও $p \operatorname{cosec} a$ বসাইলে দেখা যায়,

$$\frac{x}{p \sec a} + \frac{y}{p \operatorname{cosec} a} = 1,$$

$\therefore \quad x \cos a + y \sin a = p$, সরল রেখাটির সমীকরণ।

2·8. (x, y)-বিশিষ্ট সরল সমীকরণ মাত্রই সরল রেখা সূচিত করে।

x ও y-সম্বলিত সরল সমীকরণের সাধারণ রূপ $Ax + By + C = 0$, যেখানে A, B ও C ধ্রুবক সংখ্যা।

যেহেতু $Ax + By + C = 0$, বা $By = -Ax - C$, বা $y = \left(-\frac{A}{B}\right)x + \left(-\frac{C}{B}\right)$,

সেইহেতু, $-\frac{A}{B} = m$ এবং $-\frac{C}{B} = c$ বসাইয়া সমীকরণটিকে $y = mx + c$ আকারে প্রকাশ করা যায়।

আবার যেহেতু, m ও c যে-কোন দুই ধ্রুবক সংখ্যা (any two constants)-ই হউক না কেন, $y = mx + c$-এর লৈখিক চিত্র $(0, c)$ বিন্দুগামী একটি সরল রেখা সূচিত করে।

সেইহেতু, সমীকরণটি দ্বারা $\left(0, -\frac{C}{B}\right)$ বিন্দুগামী সরল রেখা সূচিত হইবে।

বিকল্প প্রমাণ :

$Ax + By + C = 0$ সমীকরণটির লৈখিক চিত্রের উপর P, Q, R যেন যে-কোন তিনটি বিন্দু এবং উহাদের স্থানাঙ্ক যেন যথাক্রমে (x_1, y_1), (x_2, y_2) এবং (x_3, y_3). যেহেতু ইহারা প্রত্যেকেই উক্ত লৈখিক চিত্রের উপর অবস্থিত, অতএব,

$$Ax_1 + By_1 + C = 0 \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$$

$$Ax_2 + By_2 + C = 0 \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (2)$$

$$Ax_3 + By_3 + C = 0 \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (3)$$

$\therefore$ (2) এবং (3) হইতে, $\frac{A}{y_2 - y_3} = \frac{B}{x_3 - x_2} = \frac{C}{x_2 y_3 - x_3 y_2} = K$ ধরিলে,

$$A = K(y_2 - y_3), \; B = K(x_3 - x_2), \; C = K(x_2 y_3 - x_3 y_2) \; ;$$

$\therefore$ (1) হইতে, $Kx_1(y_2-y_3)+Ky_1(x_3-x_2)+K(x_2y_3-x_3y_2)=0$;
বা, $x_1(y_2-y_3)+y_1(x_3-x_2)+(x_2y_3-x_3y_2)=0$;
বা, $(x_1y_2-x_2y_1)+(x_2y_3-x_3y_2)+(x_3y_1-x_1y_3)=0$;
বা, $\frac{1}{2}[x_1y_2-x_2y_1+x_2y_3-x_3y_2+x_3y_1-x_1y_3]=0$,
অর্থাৎ PQR ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল $=0$.

কিন্তু P, Q, R, লৈখিক চিত্রটির উপরিস্থিত যে-কোন তিনটি বিন্দু। অতএব, চিত্রটি একটি সরল রেখা হইবে, কেননা কোনও বক্র রেখার উপর তিনটি বিন্দু লইলে বিন্দুত্রয় দ্বারা অঙ্কিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের মান $=0$ হইতে পারে না।

2·9. $Ax+By+C=0$, সমীকরণটিকে

(i) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$,

এবং (ii) $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$ আকারে প্রকাশ করিতে হইবে।

(i) $Ax+By+C=0$;

$\therefore$ $Ax+By=-C$.

$\therefore$ $\frac{Ax}{-C}+\frac{By}{-C}=1$; (উভয় পক্ষকে $-C$ দ্বারা ভাগ করিয়া)

বা, $\frac{x}{-\frac{C}{A}}+\frac{y}{-\frac{C}{B}}=1$,

বা, $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, যেখানে $a=-\frac{C}{A}$ এবং $b=-\frac{C}{B}$.

টীকা। a এবং b সমান হইলে, $A=B$ হইবে। অতএব, একটি সরল রেখা অক্ষদ্বয় হইতে সমান অংশ ছেদ করিলে, উহার সমীকরণে x এবং y-এর সহগদ্বয়ের মান সমান হইবে।

(ii) $Ax+By+C=0$.

$\therefore$ $Ax+By=-C$.

উভয় পক্ষকে K দ্বারা গুণ করিয়া,

$KAx+KBy=-KC$ ... ... (1)

এখন ধরা যাক, $KA=\cos\alpha$ এবং $KB=\sin\alpha$, $-KC=p$;

$\therefore$ $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$.

আবার, $K^2A^2+K^2B^2=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$;

$\therefore$ $K^2=\frac{1}{A^2+B^2}$; $\therefore$ $K=\frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$;

$\therefore$ (i) হইতে, $\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}x+\frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}y=-\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$;

বা, $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p.$

[C ধনাত্মক বা ঋণাত্মক হইলে, $\sqrt{A^2+B^2}$ ঋণাত্মক বা ধনাত্মক চিহ্নসহ লইতে হয়, অর্থাৎ যেন ডান পক্ষ ধনাত্মক হয়।]

2·10. (x_1, y_1) বিন্দুগামী যে-কোন সরল রেখার সমীকরণ নির্ণয়।

[*To find the equation to the straight line which passes through a given point* (x_1, y_1).]

$y=mx+c$, যেন (x_1, y_1) বিন্দুগামী যে-কোন সরল রেখার সমীকরণ।

অতএব, x এবং y-এর মান যথাক্রমে x_1 এবং y_1 দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হইবে।

$\therefore\ y_1=mx_1+c;\quad \therefore\ c=y_1-mx_1.$

$\therefore\ y=mx+y_1-mx_1;$

বা, $\mathbf{y-y_1=m(x-x_1)}$, নির্ণেয় সমীকরণ।

টীকা। m অনির্ণীত বলিয়া, m-এর যে-কোন মান বসাইয়া (x_1, y_1) বিন্দুগামী যে-কোন সরলরেখার সমীকরণ পাওয়া যাইবে। সুতরাং বুঝা যায় যে, একটি বিন্দু দিয়া অসংখ্য সরল রেখা যাইতে পারে।

2·11. (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) বিন্দুগামী সরল রেখার সমীকরণ নির্ণয়।

[*To find the equation to the straight line passing through two given points* (x_1, y_1) *and* (x_2, y_2).]

$y=mx+c$ যেন, নির্ণেয় সমীকরণ।

এখন সরল রেখাটি (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) বিন্দুদ্বয়গামী;

$\therefore$ (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2)-এর প্রত্যেকটি যুগল মান দ্বারাই সমীকরণটি সিদ্ধ হইবে।

$\therefore\ y_1=mx_1+c, \quad \cdots\ (1)$

$y_2=mx_2+c; \quad \cdots\ (2)$

$\therefore$ (1) হইতে (2) বিয়োগ করিয়া, $y_1-y_2=m(x_1-x_2)$;

$\therefore\ m=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2};$

আবার, $c=y_1-mx_1=y_1-\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}x_1.$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ $y=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}x+y_1-\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}x_1$;

বা, $\mathbf{y-y_1=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}(x-x_1)}$;

অথবা, $\mathbf{\dfrac{y-y_1}{x-x_1}=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}}$.

টীকা। সরল রেখাটির 'm' বা প্রবণতা (gradient)

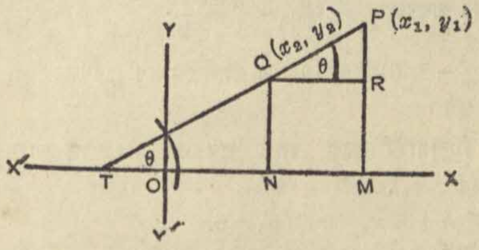
$$=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{\text{বিন্দুদ্বয়ের } y \text{ স্থানাঙ্কের অন্তর}}{\text{বিন্দুদ্বয়ের } x \text{ স্থানাঙ্কের অন্তর}}।$$

বিকল্প প্রমাণ :

P এবং Q-এর স্থানাঙ্ক যেন যথাক্রমে (x_1, y_1) ও (x_2, y_2) এবং বর্ধিত $\overrightarrow{PQ}$ যেন x-অক্ষের সহিত θ কোণ উৎপন্ন করে।

x-অক্ষের উপর $\overline{PM}$ ও $\overline{PN}$ এবং PM-এর উপর $\overline{QR}$ লম্ব অঙ্কিত হইল।

$\therefore$ $\angle PQR=\angle PTM=\theta$.



$\therefore$ সরল রেখাটির প্রবণতা বা

$$m=\tan\theta=\tan PTM=\tan PQR$$

$$=\frac{PR}{QR}=\frac{PM-RM}{NM}=\frac{PM-QN}{OM-ON}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}.$$

উদাহরণমালা

উদা. 1. অক্ষদ্বয় $(4, -3)$ বিন্দুগামী হইলে, $4x+3y-25=0$ সমীকরণটি যে সমীকরণে রূপান্তরিত হইবে, তাহা নির্ণয় কর।

x এর পরিবর্তে $(x'+4)$ এবং y-এর পরিবর্তে $(y'-3)$ লিখিলে পরিবর্তিত সমীকরণটি হয়,

$$4(x'+4)+3(y'-3)-25=0,$$

বা, $4x'+16+3y'-9-25=0$, বা, $4x'+3y'-18=0$.

উদা. 2. $x^2+4x-y^2+6y-5=0$ সমীকরণটি হইতে x এবং y অপসারিত করিতে হইলে, অক্ষদ্বয়ের দিক্ পরিবর্তন না করিয়া, মূলবিন্দু কোথায় স্থানান্তরিত করিতে হইবে, তাহা নির্ণয় কর।

$$x^2+4x-y^2+6y-5=(x^2+4x+4)-(y^2-6y+9)$$
$$=(x+2)^2-(y-3)^2.$$

অতএব, প্রদত্ত সমীকরণ হইতে x ও y যুক্ত পদ অপসারিত করিতে হইলে, $(x+2)$ এবং $(y-3)$-এর সহিত এরূপ সংখ্যা যোগ করিতে হইবে, যাহাতে যথাক্রমে x এবং y পাওয়া যায়।

$\therefore$ পরিবর্তিত মূলবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(-2, 3)$.

উদা. 3. $(3, 5)$ এবং $(-1, 3)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরল রেখার প্রবণতা নির্ণয় কর।

(x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) বিন্দুগামী সরল রেখার প্রবণতা $=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$. প্রদত্ত প্রশ্নে $y_1=5, y_2=3$ এবং $x_1=3, x_2=-1$.

$\therefore$ নির্ণেয় প্রবণতা $\dfrac{5-3}{3-(-1)}=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$.

উদা. 4. $(-2, 6)$ বিন্দুগামী যে সরল রেখার প্রবণতা (gradient) 3, তাহার সমীকরণটি নির্ণয় কর।

(x_1, y_1) বিন্দুগামী সরল রেখার প্রবণতা m হইলে, সরল রেখাটির সমীকরণ হয় $(y-y_1)=m(x-x_1)$.

প্রদত্ত প্রশ্নে $m=3, x_1=-2, y_1=6$.

অতএব, নির্ণেয় সমীকরণ $y-6=3\{x-(-2)\}$

অথবা, $y-6=3x+6$;

অথবা, $3x-y+12=0$.

উদা. 5. একটি সরল রেখা অক্ষদ্বয়ের সহিত একটি সমকোণী ত্রিভুজ উৎপন্ন করে। ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল 24 বর্গ সেমি. এবং অতিভুজের দৈর্ঘ্য 10 সেমি. হইলে ত্রিভুজটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

যে সরল রেখাটি x-অক্ষ এবং y-অক্ষ হইতে যথাক্রমে a এবং b কাটিয়া লয়, উহার সমীকরণ

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$$

$\therefore$ অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী সরল রেখাটির দৈর্ঘ্য

$$=\sqrt{a^2+b^2}=10 \text{ সেমি.} \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad (1)$$

ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল $=\frac{1}{2}.a.b=24$ বর্গ সেমি.

$\therefore\quad ab=48$ বর্গ সেমি. ... ... (2)

(1) এবং (2) হইতে,

$$a^2+b^2+2ab=10^2+96=196=14^2\,;$$
$$a^2+b^2-2ab=10^2-96=4=2^2.$$

অতএব, $(a+b)^2=14^2\,;\quad \therefore\ (a+b)=\pm 14$

$(a-b)^2=2^2\,;\quad \therefore\ (a-b)=\pm 2.$

$\therefore\quad a=\pm 8$ ও $b=\pm 6\,;$

এবং $\quad a=\pm 6$ ও $b=\pm 8.$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ $\dfrac{x}{\pm 8}\pm\dfrac{y}{\pm 6}=1$, বা, $6x+8y=\pm 48,$

এবং $\dfrac{x}{\pm 6}+\dfrac{y}{\pm 8}=1$, বা, $8x+6y=\pm 48.$

উদা. 6. যে সরল রেখা y-অক্ষের ঋণাত্মক দিক্ হইতে 3 একক কাটিয়া লয় এবং x-অক্ষের সহিত $120°$ কোণ উৎপন্ন করে, তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর। অর্থাৎ x-অক্ষের সহিত $120°$ কোণ উৎপন্নকারী এবং $(0,\,-3)$ বিন্দুগামী সরল রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

$y=mx+c$ এই সূত্রানুসারে,

$\because\quad m=\tan 120°=-\sqrt{3}$, এবং $c=-3,$

নির্ণেয় সমীকরণ $y=-\sqrt{3}x-3$, বা, $y+x\sqrt{3}+3=0.$

উদা. 7. $(3,\,-4)$ বিন্দুগামী যে সরল রেখা x-অক্ষ ও y-অক্ষ হইতে সমান অংশ (equal intercepts) কাটিয়া লয়, তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

মনে কর, নির্ণেয় সমীকরণ $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{-a}=1.$

অর্থাৎ $x-y=a.$

এখন সরল রেখাটি $(3,\,-4)$ বিন্দুগামী বলিয়া, $(3,\,-4)$ মানযুগল দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হইবে।

$\therefore\quad 3-(-4)=a$, বা, $a=7\,;$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ $x-y=7.$

উদা. 8. $(1,\,1)$ এবং $(3,\,-\frac{1}{2})$ বিন্দু-দুইটি দিয়া অঙ্কিত সরল রেখাটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

ধরা যাক, $y=mx+c$ নির্ণেয় সমীকরণ।

যেহেতু (1, 1) এবং $(3, -\frac{1}{2})$-এর প্রত্যেক মানযুগল দ্বারাই সমীকরণটি সিদ্ধ হইবে, অতএব,

$$1 = m + c \quad \text{এবং} \quad -\tfrac{1}{2} = 3m + c.$$

সুতরাং, $2m = -\frac{3}{2}$; কাজেই $m = -\frac{3}{4}$,

এবং $c = 1 + \frac{3}{4} = \frac{7}{4}$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ $y = -\frac{3}{4}x + \frac{7}{4}$; অথবা, $3x + 4y = 7$.

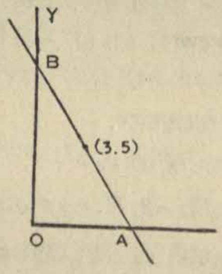
অথবা, 2·11-এর সূত্রানুযায়ী—

নির্ণেয় সমীকরণ $y - 1 = \dfrac{1-(-\frac{1}{2})}{1-3}(x-1)$,

অথবা, $y - 1 = -\frac{3}{4}(x-1)$,

অথবা, $4y + 3x = 7$.

উদা. 9. (3, 5) বিন্দুগামী একটি সরল রেখা অক্ষদ্বয়কে A এবং B বিন্দুতে ছেদ করে। (3, 5) বিন্দুটি AB-কে সমদ্বিখণ্ডিত করিলে, উহার সমীকরণ নির্ণয় কর।



ধরা যাক, OA $= a$, OB $= b$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$.

কিন্তু A-এর স্থানাঙ্ক $(a, 0)$ এবং B-এর স্থানাঙ্ক $(0, b)$;

$\therefore$ $\overline{AB}$-এর মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\dfrac{a+0}{2}, \dfrac{0+b}{2}\right)$.

অতএব, $\dfrac{a+0}{2} = 3$, অথবা, $a = 6$

এবং $\dfrac{0+b}{2} = 5$, অথবা, $b = 10$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ $\dfrac{x}{6} + \dfrac{y}{10} = 1$.

উদা. 10. $(-1, 9)$ এবং $(7, 13)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরল রেখার মধ্যবিন্দু এবং $(0, 2)$ বিন্দুগামী সরল রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

$(-1, 9)$ এবং $(7, 13)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরল রেখার মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{-1+7}{2}, \frac{9+13}{2}\right)$ অথবা $(3, 11)$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ $\frac{y-11}{11-2}=\frac{x-3}{3-0}$;

অথবা, $3y-33=9x-27$;

অথবা, $y=3x+2$.

প্রশ্নমালা 8

1. অক্ষদ্বয় সমীকরণের পার্শ্বে লিখিত বিন্দুগামী এবং মূল অক্ষদ্বয়ের সমান্তরাল হইলে, নিম্নলিখিত সমীকরণগুলি যে সমীকরণে রূপান্তরিত হয়, তাহা নির্ণয় কর:

[Transform the following equations by referring to parallel axes through the points indicated against each :]

(*a*) $2x+3y+7=0$; $(3, -2)$.

(*b*) $4x^2+y^2+4x-8y=0$; $(2, 0)$.

(*c*) $ax+by+c=0$; $\left(\frac{c}{a}, c\right)$.

(*d*) $x^2+8x+y^2-2y=15$; $(4, 1)$,

2. অক্ষদ্বয়কে কোন বিশেষ বিন্দু (h, k)-গামী করিয়া, প্রমাণ কর যে, নিম্নলিখিত সমীকরণটিকে মাত্র দ্বিঘাত-পদবিশিষ্ট সমীকরণে রূপান্তরিত করা যায়:

$$12x^2-10xy+2y^2+11x-5y+2=0.$$

3. নিম্নলিখিত বিন্দুদ্বয়গামী সরল রেখার প্রবণতা (gradient) নির্ণয় কর:

(i) $(4, 3)$ এবং $(3, 4)$. (ii) $(0, -6)$ এবং $(-5, 8)$.

(iii) $(-3, -9)$ এবং $(-7, 3)$.

4. যে সরল রেখা y-অক্ষের ধনাত্মক দিক্ হইতে 5 একক কাটিয়া লয় এবং x-অক্ষের সহিত 45° কোণ উৎপন্ন করে, তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

5. যে সরল রেখা y-অক্ষের ঋণাত্মক দিক্ হইতে 2 একক কাটিয়া লয় এবং x-অক্ষের সহিত 30° কোণ উৎপন্ন করে, তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

6. যে সরল রেখা অক্ষদ্বয় হইতে যথাক্রমে (i) 3 এবং 2 একক, (ii) -5 এবং 6 একক কাটিয়া লয়, তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

7. $(5, 6)$ বিন্দুগামী যে সরল রেখা অক্ষদ্বয় হইতে (i) ধনাত্মক সমান অংশ, (ii) বিপরীত চিহ্নযুক্ত সমান অংশ কাটিয়া লয়, তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

8. $(1, -2)$ বিন্দুগামী যে-সকল সরল রেখা অক্ষদ্বয় হইতে সমান অংশ কাটিয়া লয়, তাহাদের সমীকরণ নির্ণয় কর।

9. (x', y') বিন্দুগামী একটি সরল রেখা x ও y অক্ষদ্বয়কে যথাক্রমে A এবং B বিন্দুতে ছেদ করে। (x', y') বিন্দুটি $\overline{AB}$-কে সমদ্বিখণ্ডিত করিলে প্রমাণ কর যে, উহার সমীকরণ $\frac{x}{2x'} + \frac{y}{2y'} = 1$.

10. $(-4, 3)$ বিন্দুগামী একটি সরল রেখা x ও y অক্ষদ্বয়কে যথাক্রমে A এবং B বিন্দুতে ছেদ করে। যদি $(-4, 3)$ বিন্দুটি $\overline{AB}$-কে $5 : 3$ অনুপাতে বিভক্ত করে, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে, উহার সমীকরণ $20y - 9x = 96$.

11. একটি সরল রেখা অক্ষদ্বয়কে A ও B বিন্দুতে ছেদ করে। যদি AOB ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল 30 বর্গ একক এবং $\overline{AB}$-এর দৈর্ঘ্য 13 একক হয়, তবে সরল রেখাটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

12. প্রমাণ কর যে, $4x + 9y = 36$ এবং $\frac{x}{9} - \frac{y}{4} = 1$ সরল রেখাদ্বয় এবং y-অক্ষ একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ উৎপন্ন করে।

নিম্নলিখিত বিন্দুদ্বয়ের মধ্য দিয়া অঙ্কিত সরল রেখাসমূহের সমীকরণ নির্ণয় কর :—

13. $(0, 0), (5, 6)$.

14. $(0, 5), (7, 0)$.

15. $(6, -8), (-7, 5)$,

16. $(-4, 8), (-9, -13)$.

17. $(-11, 0), (7, -10)$.

18. $(at^2, 2at)\ (at_1^{\,2}, 2at_1)$.

19. $\left(at_1, \frac{a}{t_1}\right), \left(at_2, \frac{a}{t_2}\right)$.

20. $(a \cos\theta_1, a \sin\theta_1), (a \cos\theta_2, a \sin\theta_2)$.

21. $(a \cos\theta_1, b \sin\theta_1), (a \cos\theta_2, b \sin\theta_2)$.

22. ABC ত্রিভুজের কৌণিক বিন্দুত্রয়ের স্থানাঙ্ক

(i) $(1, 4), (2, -3)$ এবং $(-1, -2)$,

(ii) $(0, 1), (2, 0)$ এবং $(-1, -2)$ হইলে, উহার বাহুত্রয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর।

23. অক্ষদ্বয় হইতে যে সরল রেখা 2 এবং 1 একক কাটিয়া লয়, তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর। [C. U., 1944]

24. একটি গতিশীল সরল রেখা অক্ষদ্বয়কে এরূপভাবে ছেদ করে, যে অক্ষদ্বয়ের ছেদিতাংশদ্বয়ের অন্যোন্যকের সমষ্টি ধ্রুবক। প্রমাণ কর যে, সরল রেখাটি একটি নির্দিষ্ট বিন্দুগামী।

25. (1, 2) এবং (2, 1) বিন্দুগামী সরল রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। অক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী সরল রেখার অংশের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। [C. U. 1936]

26. $x \sin\theta + y\cos\theta = \frac{a}{2}\sin 2\theta$ এবং $x\cos\theta - y\sin\theta = a\cos 2\theta$ সরল রেখাদ্বয়ের উপর মূলবিন্দু হইতে লম্ব p, p_1 হইলে, প্রমাণ কর যে, $4p^2 + p_1^2 = a^2$. [C. U. 1958]

27. A, B, C, D বিন্দুচতুষ্টয়ের স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (a, b), (a', b'), $(-a, b)$ এবং $(a', -b')$ হইলে, $\overline{AB}$ ও $\overline{CD}$ সরল রেখার সমদ্বিখণ্ডক সরল রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

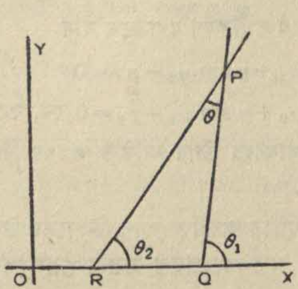
28. একটি আয়তক্ষেত্রের চারিটি বাহুর সমীকরণ $x = a$, $x = a'$, $y = b$, $y = b'$ হইলে, ইহার কর্ণদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর।

29. $3x + y = 12$ সরল রেখা অক্ষদ্বয়কে A এবং B বিন্দুতে ছেদ করে। C এবং D বিন্দুদ্বয় $\overline{AB}$-কে সমান তিন অংশে বিভক্ত করিলে, OC এবং OD-এর সমীকরণ নির্ণয় কর।

30. θ-এর বিভিন্ন মানের জন্য $x\cos\theta + y\sin\theta = 6$ সমীকরণটি দ্বারা কি বুঝায় তাহা ব্যাখ্যা কর।

2·12. দুইটি সরল রেখার অন্তর্বর্তী কোণ নির্ণয়।

[*To find the angle between two given straight lines.*]



$\overleftrightarrow{PQ}$ এবং $\overleftrightarrow{PR}$ সরল রেখা-দুইটি পরস্পরকে P বিন্দুতে, এবং x-অক্ষকে যথাক্রমে যেন Q এবং R বিন্দুতে ছেদ করে। ধরা যাক, $\angle PQX = \theta_1$, $\angle PRX = \theta_2$ এবং $\angle QPR = \theta$;

$\therefore$ $\overline{PQ}$ ও $\overrightarrow{PR}$-এর অন্তর্বর্তী কোণ $QPR = \theta_1 - \theta_2$.

(i) রেখাদ্বয়ের সমীকরণ যথাক্রমে যেন,

$$y = m_1 x + c_1 \text{ এবং } y = m_2 x + c_2 \qquad \cdots (1)$$

$\therefore \quad \tan\theta_1 = m_1$, এবং $\tan\theta_2 = m_2$;

$$\therefore \quad \tan\theta = (\theta_1 - \theta_2) = \frac{\tan\theta_1 - \tan\theta_2}{1 + \tan\theta_1 \tan\theta_2} = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}.$$

অতএব নির্ণেয় কোণ $\theta = \tan^{-1}\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$.

(ii) সরল রেখাদ্বয়ের সমীকরণ যদি যথাক্রমে $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ এবং $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ হয়, তবে,

এই সমীকরণদ্বয়কে নিম্নলিখিত আকারে প্রকাশ করা যায় :

$$y = -\frac{a_1}{b_1}x - \frac{c_1}{b_1},$$

$$\text{এবং } y = -\frac{a_2}{b_2}x - \frac{c_2}{b_2};$$

$\therefore$ (1)-এর সহিত তুলনা করিলে, $m_1 = -\frac{a_1}{b_1}, m_2 = -\frac{a_2}{b_2}$.

$$\therefore \quad \tan\theta = \frac{-\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2}}{1 + \frac{a_1}{b_1}.\frac{a_2}{b_2}} = \frac{b_1a_2 - a_1b_2}{a_1a_2 + b_1b_2}.$$

অতএব, নির্ণেয় কোণ, $\theta = \tan^{-1}\frac{b_1a_2 - a_1b_2}{a_1a_2 + b_1b_2}$.

(iii) সরল রেখাদ্বয়ের সমীকরণ যথাক্রমে যদি

$$x\cos\alpha_1 + y\sin\alpha_1 - p_1 = 0$$

এবং $\quad x\cos\alpha_2 + y\sin\alpha_2 - p_2 = 0$ হয়, তবে

মূলবিন্দু হইতে রেখাদ্বয়ের উপর অঙ্কিত লম্বদ্বয় x-অক্ষের সহিত যথাক্রমে α_1 এবং α_2 কোণ উৎপন্ন করে।

এখন, দুইটি সরল রেখার অন্তর্গত কোণ, উহাদের উপর অঙ্কিত লম্বদ্বয়ের অন্তর্গত কোণের সমান বা সম্পূরক, অতএব, **প্রদত্ত সরল রেখাদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ**

$$= \alpha_1 - \alpha_2 \text{ অথবা } 180° - (\alpha_1 - \alpha_2).$$

2·13. দুইটি সরল রেখার পরস্পর সমান্তরাল হওয়ার শর্ত।

[*Condition of parallelism of two straight lines.*]

(i) $y = m_1x + c_1$ এবং $y = m_2x + c_2$ সরল রেখা-দুইটি যেন সমান্তরাল ;

$\therefore$ উহাদের অন্তর্বর্তী কোণ $\theta = 0$; $\therefore \tan\theta = 0$;

অর্থাৎ, $\tan\theta = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} = 0$;

$\therefore\ m_1 - m_2 = 0$, অর্থাৎ $m_1 = m_2$.

(ii) সরল রেখাদ্বয়ের সমীকরণ

$a_1x + b_1y + c_1 = 0$ এবং $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ হইলে,

$$m_1 = -\frac{a_1}{b_1},\ m_2 = -\frac{a_2}{b_2}.$$

$\therefore$ সরল রেখাদ্বয় সমান্তরাল হইলে,

$$-\frac{a_1}{b_1} = -\frac{a_2}{b_2}, \qquad [\text{ যেহেতু } m_1 = m_2 \text{ }]$$

অর্থাৎ $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$.

বিকল্প প্রমাণ ঃ

[অনুচ্ছেদ 2·12-এর চিত্র দ্রষ্টব্য]

(i) সরল রেখাদ্বয় সমান্তরাল হইলে, $\theta_1 = \theta_2$ (একান্তর কোণ)।

অতএব, $\tan\theta_1 = \tan\theta_2$, অর্থাৎ $m_1 = m_2$.

(ii) সরল রেখাদ্বয় পরস্পর লম্ব হইলে, $\theta = 90°$.

অতএব, $\theta_1 = 90° + \theta_2$;

$$\therefore\ \tan\theta_1 = \tan(90° + \theta_2) = -\cot\theta_2 = -\frac{1}{\tan\theta_2}.$$

অর্থাৎ $m_1 = -\frac{1}{m_2}$. অতএব, $m_1 m_2 = -1$.

2·14. দুইটি সরল রেখার পরস্পর লম্ব হওয়ার শর্ত।

[*Condition of perpendicularity of two straight lines.*]

দুইটি সরল রেখা $y = m_1x + c_1$, $y = m_2x + c_2$ যেন পরস্পরের উপর লম্ব।

$\therefore$ সরল রেখা-দুইটি মধ্যবর্তী কোণ $\theta = 90°$,

$\therefore\ \cot\theta = \cot 90° = 0$;

$\therefore$ সূত্রানুসারে $\cot\theta = \frac{1 + m_1m_2}{m_1 - m_2}$ বলিয়া $\frac{1 + m_1m_2}{m_1 - m_2} = 0$;

$\therefore\ m_1 m_2 = -1$.

যদি $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ এবং $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ সরল রেখাদ্বয়ের সমীকরণ হয়, তাহা হইলে, $m_1 = -\frac{a_1}{b_1}$, $m_2 = -\frac{a_2}{b_2}$.

∴ উহারা পরস্পর লম্ব হইলে, $\left(-\frac{a_1}{b_1}\right)\left(-\frac{a_2}{b_2}\right) = -1$,

অর্থাৎ $\frac{a_1a_2}{b_1b_2} = -1$.

∴ $a_1a_2 + b_1b_2 = 0$.

টীকা 1. অনু. 2·13 হইতে ইহা স্পষ্টই প্রতীয়মান হয় যে, $y = mx + c_1$ এবং $y = mx + c_2$ পরস্পর সমান্তরাল এবং $ax + by + c_1 = 0$ এবং $ax + by + c_2 = 0$ পরস্পর সমান্তরাল।

টীকা 2. অনু. 2·14 হইতে ইহা স্পষ্টই প্রতীয়মান হয় যে,

$y = mx + c_1$ এবং $y = -\frac{1}{m}x + c_2$ পরস্পর লম্ব ;

এবং $ax + by + c_1 = 0$ এবং $bx - ay + c_2 = 0$ পরস্পর লম্ব।

উদাহরণমালা

উদা. 1. $(4, -5)$ বিন্দুগামী এবং $3x + 4y + 5 = 0$ সরল রেখার সমান্তরাল সরল রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

প্রথম পদ্ধতি :

$3x + 4y + 5 = 0$-এর সমান্তরাল যে-কোন সরল রেখার সমীকরণ

$3x + 4y + c = 0$ ... ... (a) [টীকা 1 দ্রষ্টব্য]

ইহা $(4, -5)$ বিন্দুগামী হইবে, যদি

$3 \times 4 + 4 \times (-5) + c = 0$,

অর্থাৎ যদি $c = 20 - 12 = 8$.

∴ নির্ণেয় সমীকরণ $3x + 4y + 8 = 0$.

[এই পদ্ধতিতে আমরা এরূপ একটি সরল রেখার সমীকরণ লই যাহা দ্বারা প্রদত্ত সরল রেখার সমান্তরাল যে-কোন সরল রেখা বুঝায়। c-এর বিভিন্ন মানের জন্য সমীকরণ (a) প্রদত্ত সরল রেখার বিভিন্ন সমান্তরাল সরল রেখা বুঝায়। এই সমান্তরাল রেখাসমূহের মধ্যে যে সরল রেখাটি প্রদত্ত বিন্দু $(4, -5)$ দিয়া যাইবে, উহার সমীকরণে $c = 8$.]

দ্বিতীয় পদ্ধতি :

প্রদত্ত সমীকরণটিকে নিম্নলিখিত আকারে লেখা যায় :

$y = -\frac{3}{4}x - \frac{5}{4}$ ... ... (1)

সমীকরণ (1)-এর প্রবণতা $= -\frac{3}{4}$.

যে সরল রেখা $(4, -5)$ বিন্দুগামী, তাহার সমীকরণ

$y + 5 = m(x - 4)$ ... ... (2)

সরল রেখা (2) সরল রেখা (1)-এর সমান্তরাল হইবে, যদি $m=-\frac{3}{4}$ হয়,

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ $y+5=-\frac{3}{4}(x-4)$,

বা, $4y+20=-3x+12$,

বা, $3x+4y+8=0$.

[এই পদ্ধতিতে প্রথমে যে সকল সরল রেখা প্রদত্ত বিন্দুগামী তাহাদের সাধারণ সমীকরণটি লওয়া হয়। তারপর, সেই সরল রেখাগুলির মধ্যে যেটি মাত্র প্রদত্ত সরল রেখার সমান্তরাল তাহাকে প্রবণতা ($m=-\frac{3}{4}$)-এর সাহায্যে নির্ণয় করা হয়।]

তৃতীয় পদ্ধতি :

প্রদত্ত সরল রেখার সমান্তরাল সরল রেখার সমীকরণ যেন

$y=mx+c$ ... ... (1)

যেহেতু সরল রেখা (1) (4, −5) বিন্দুগামী, অতএব,

$-5=4m+c$. ... ... (2)

যেহেতু সরল রেখা (1) $3x+4y+5=0$ সরল রেখার সহিত সমান্তরাল,

অতএব, $y=-\frac{3}{4}x-\frac{5}{4}$-এর সমান্তরাল।

$\therefore$ (1)-এর $m=-\frac{3}{4}$. ... ... (3)

অতএব (2) এবং (3) হইতে $c=-2$.

সুতরাং, সমীকরণ (1)-এ m এবং c-এর মান বসাইয়া,

$y=-\frac{3}{4}x-2$;

বা, $3x+4y+8=0$.

[এই পদ্ধতিতে আমরা নির্ণেয় সরল রেখার সমীকরণটি কল্পনা করিয়া লই এবং প্রদত্ত শর্তগুলি হইতে কল্পিত সমীকরণের ধ্রুবক-সংখ্যা (m ও c)-এর মান নির্ণয় করি।]

উদা. 2. (4, −5) বিন্দুগামী এবং $3x+4y+5=0$ সরল রেখার উপর লম্বভাবে অবস্থিত সরল রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

প্রথম পদ্ধতি :

প্রদত্ত সরল রেখার সমীকরণটি নিম্নলিখিত আকারে প্রকাশ করা যায় :

$y=-\frac{3}{4}x-\frac{5}{4}$. ... ... (1)

(4, −5) বিন্দুগামী যে-কোন সরল রেখার সমীকরণ,

$y-(-5)=m(x-4)$. [অনু. 2·10 দ্রষ্টব্য]

এই সরল রেখা এবং প্রদত্ত (1) সরল রেখা পরস্পর লম্ব হইলে,

$m\times(-\frac{3}{4})=-1$; [অনু. 2·14 দ্রষ্টব্য]

$\therefore$ $m=\frac{4}{3}$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ $y+5=\frac{4}{3}(x-4)$, অথবা, $4x-3y=31$.

দ্বিতীয় পদ্ধতি ঃ

$3x+4y+5=0$ সরল রেখার উপর লম্বভাবে অবস্থিত যে-কোন সরল রেখার সমীকরণ $4x-3y+c=0$. [টীকা 2 দ্রষ্টব্য]

ইহা $(4, -5)$ বিন্দুগামী হইলে, $4\times 4-3(-5)+c=0$;

$\therefore \quad c=-31$;

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ $4x-3y-31=0$, বা, $4x-3y=31$.

উদা. 3. A এবং B বিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (5, 3) এবং (7, 9) ; $\overline{AB}$ সরল রেখার লম্ব-সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

$\overline{AB}$ সরল রেখার সমীকরণ

$$y-9=\frac{9-3}{7-5}(x-7)=3(x-7).$$

অথবা, $y=3x-12$.

$\overline{AB}$-এর মধ্যবিন্দু M-এর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{5+7}{2}, \frac{3+9}{2}\right)$, বা, (6, 6).

(6, 6) বিন্দুগামী যে-কোন সরল রেখার সমীকরণ

$$y-6=m(x-6).$$

ইহা $\overline{AB}$-এর উপর লম্ব হইলে, $m\times 3=-1$;

$\therefore \quad m=-\frac{1}{3}$;

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ $y-6=-\frac{1}{3}(x-6)$,

বা, $3y+x=24$.

উদা. 4. (x_1, y_1) বিন্দুগামী এবং $xx_1+yy_1=a^2$ সরল রেখার উপর লম্বভাবে অবস্থিত সরল রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

প্রদত্ত সরল রেখার উপর লম্বভাবে অবস্থিত যে-কোন সরল রেখার সমীকরণ $xy_1-yx_1=c$.

ইহা (x_1, y_1) বিন্দুগামী হইলে $x_1y_1-y_1x_1=c$,

$\therefore \quad c=0$;

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ $xy_1-yx_1=0$.

প্রশ্নমালা 9

1. $x-y\sqrt{3}=5$ এবং $x\sqrt{3}+y=7$ সরল রেখাদ্বয়ের অন্তর্গত কোণের মান নির্ণয় কর।

2. $y=3x+7$ এবং $3y-x=8$ সরল রেখাদ্বয়ের অন্তর্গত কোণের মান θ হইলে $\tan\theta$-এর মান নির্ণয় কর।

3. প্রমাণ কর যে, (2, −1), (0, 2), (2, 3) এবং (4, 0) বিন্দুচতুষ্টয় একটি সামান্তরিকের কৌণিক বিন্দু। ইহার কর্ণদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর এবং কর্ণদ্বয়ের অন্তর্গত কোণের পরিমাণ নির্ণয় কর।

4. (2, 3) বিন্দুগামী এবং $4x-3y=10$ সরল রেখার উপর লম্বভাবে অবস্থিত সরল রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

5. (x_1, y_1) বিন্দুগামী এবং $ax+by+c=0$ সরল রেখার সমান্তরাল সরল রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

6. (2, −3) বিন্দুগামী এবং (5, 7) ও (−6, 3) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরল রেখার উপর লম্বভাবে অবস্থিত সরল রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

7. $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=1$ সরল রেখা যদি x-অক্ষকে A বিন্দুতে ছেদ করে, তবে A বিন্দুগামী এবং এই সরল রেখার উপর লম্বভাবে অবস্থিত সরল রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

8. A এবং B বিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(2a, 2b)$ এবং $(2c, 2d)$. AB সরল রেখার লম্ব-সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

9. (x', y') বিন্দুগামী এবং $\frac{xx'}{a^2}+\frac{yy'}{b^2}=1$ সরল রেখার উপর লম্বভাবে অবস্থিত সরল রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

10. A এবং B বিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (−3, 7) এবং (5, −4); C বিন্দু $\overline{AB}$-কে 4 : 7 অনুপাতে বিভক্ত করিলে C বিন্দুগামী এবং AB-এর উপর লম্বভাবে অবস্থিত সরল রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

2·15. তিনটি বিন্দুর সমরেখ হওয়ার শর্ত।

[*Condition of collinearity of three points.*]

তিনটি বিন্দু A, B, C সমরেখ হইবে, যদি ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল = 0 হয়, অথবা A এবং B বিন্দুগামী সরল রেখা যদি C বিন্দুর মধ্য দিয়া যায় অর্থাৎ $\overline{AB}$ সরল রেখার সমীকরণটির C বিন্দুর স্থানাঙ্ক দ্বারা সিদ্ধ হয়।

2·16. দুইটি সরল রেখার ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয়।

[*To find the co-ordinates of the point of intersection of two given straight lines.*]

দুইটি সরল রেখা $a_1x+b_1y+c_1=0$ এবং $a_2x+b_2y+c_2=0$ যেন (h, k) বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। $\therefore$ প্রত্যেক সরল রেখাই (h, k) বিন্দুগামী।

$\therefore\ a_1h+b_1k+c_1=0$ এবং $a_2h+b_2k+c_2=0.$

∴ বজ্রগুণন-প্রক্রিয়া দ্বারা,

$$\frac{h}{b_1c_2 - b_2c_1} = \frac{k}{c_1a_2 - c_2a_1} = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1};$$

∴ ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, \frac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1}\right)$.

টীকা। অনু. 2·16 হইতে স্পষ্ট প্রতীয়মান হয় যে, দুইটি সরল রেখার সমীকরণদ্বয় সমাধান করিয়া x এবং y-এর যে মান পাওয়া যাইবে, তাহাই সরল রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক।

2·17. তিনটি সরল রেখার একবিন্দুগামী হওয়ার শর্ত।

[*To find the condition of concurrence of three straight lines.*]

সরল রেখাত্রয়ের সমীকরণ যেন,

$a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ... ... (1)

$a_2x + b_2y + c_2 = 0$ ... ... (2)

$a_3x + b_3y + c_3 = 0$ ... ... (3)

(1) এবং (2)-এর ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক যদি (3)-কে সিদ্ধ করে, তাহা হইলেই সরল রেখাত্রয় একবিন্দুগামী হইবে।

উদাহরণমালা

উদা. 1. প্রমাণ কর যে, (5, 1), (1, −1) এবং (11, 4) বিন্দুত্রয় সমরেখ।

মনে কর, বিন্দুত্রয় যথাক্রমে A, B এবং C.

$\overline{AB}$ সরল রেখার সমীকরণ $y - 1 = \frac{1-(-1)}{5-1}(x-5)$;

অথবা, $2(y-1) = (n-5)$;

অথবা, $x - 2y = 3$. ... ... (1)

এখন x-এর মান 11 এবং y-এর মান 4 বসাইলে, (1) সমীকরণটির বাম পক্ষ $= 11 - 8 = 3 =$ ডান পক্ষ ; ∴ C-এর স্থানাঙ্ক (1)-কে সিদ্ধ করে অর্থাৎ C বিন্দু $\overline{AB}$-এর উপর অবস্থিত, অর্থাৎ A, B, C বিন্দুত্রয় সমরেখ।

উদা. 2. প্রমাণ কর যে, $2x - 3y = 7$, $3x - 4y = 13$ এবং $8x - 11y = 33$ সরল রেখাত্রয় একবিন্দুগামী।

প্রথম ও দ্বিতীয় সমীকরণ সমাধান করিয়া দেখা যায়, $x = 11$, $y = 5$.

অর্থাৎ উহাদের ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক (11. 5). এখন তৃতীয় সমীকরণে $x = 11$, $y = 5$ বসাইলে, বাম পক্ষ $= 88 - 55 = 33 =$ ডান পক্ষ। ∴ (11, 5) বিন্দুর স্থানাঙ্ক তৃতীয় সরল রেখার সমীকরণকে সিদ্ধ করে, অর্থাৎ তৃতীয় সরল রেখাটি (11, 5) বিন্দুগামী, অর্থাৎ সরল রেখাত্রয় একবিন্দুগামী।

উদা. 3. m-এর মান কত হইলে, $y=3x-1$, $2y=x+3$ এবং $3y=mx+4$ সরল রেখাত্রয় একবিন্দুগামী হইবে ?

$y=3x-1$ এবং $2y=x+3$ সমীকরণদ্বয়ের সমাধান করিয়া ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক (1, 2) পাওয়া যায়। যেহেতু তৃতীয় সমীকরণ-নির্দিষ্ট সরল রেখাটি এবং প্রথম সরল রেখা-দুইটি একবিন্দুগামী ; অতএব, প্রথম দুইটির ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক (1, 2) তৃতীয়টিকে সিদ্ধ করিবে।

$$\therefore \quad 6=m+4\,; \quad \therefore \quad m=2.$$

উদা. 4. যে সরল রেখা $3x-4y+1=0$ এবং $5x+y-1=0$ সরল রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী এবং অক্ষদ্বয় হইতে সমান অংশ ছেদ করে, উহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

[C. U. 1947]

$3x-4y+1=0$ এবং $5x+y-1=0$ এই সরল রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী যে-কোন সরল রেখার সমীকরণ

$$3x-4y+1+l(5x+y-1)=0, \qquad [\text{ যেখানে } l \text{ একটি ধ্রুবক সংখ্যা }]$$

বা, $(5l+3)x+(l-4)y-(l-1)=3 \quad \cdots \qquad \cdots \qquad (a)$

বা, $\dfrac{(5l+3)x}{(l-1)}+\dfrac{(l-4)y}{(l-1)}=1.$

ইহাকে intercept form-এ পরিবর্তিত করিলে

$$\frac{x}{\frac{l-1}{5l+3}}=\frac{y}{\frac{l-1}{l-4}}=1 \text{ পাওয়া যায়।}$$

যেহেতু সরল রেখা (a) অক্ষদ্বয় হইতে সমান অংশ ছেদ করে,

$$\therefore \quad \frac{l-1}{5l+3}=\frac{l-1}{l-4}; \quad \therefore \quad l=1, \text{ বা, } -\frac{7}{4}.$$

$l=1$ লইলে (a) সমীকরণটি মূলবিন্দুগামী সরল রেখার সমীকরণ হয় এবং এই সরল রেখাটি অক্ষদ্বয়কে ছেদ করিতে পারে না। সুতরাং, $l=1$ হইতে পারে না। অতএব, $l=-\frac{7}{4}$ ধরিয়াই নির্ণেয় সমীকরণটি

$$(5\times -\tfrac{7}{4}+3)x+(-\tfrac{7}{4}-4)y-(-\tfrac{7}{4}-1)=0,$$

অথবা, $-\frac{23}{4}x-\frac{23}{4}y+\frac{11}{4}=0$; বা, $23x+23y-11=0.$

2·18. দুইটি সরল রেখার ছেদবিন্দুগামী যে-কোন সরল রেখার সমীকরণ নির্ণয়।

[*To find the equation to the straight line passing through the point of intersection of two given straight lines.*]

দুইটি সরল রেখার সমীকরণ যেন $a_1x+b_1y+c_1=0$ এবং $a_2x+b_2y+c_2=0$. ইহাদের ছেদবিন্দুগামী যে-কোন সরল রেখার সমীকরণ নির্ণয় করিতে হইবে।

রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক যদি (x_1, y_1), তবে সমীকরণ-দুইটির সমাধান করিয়া x_1 ও y_1-এর মান পাওয়া যাইবে।

সুতরাং, (x_1, y_1) বিন্দুগামী যে-কোন সরল রেখার সমীকরণ $y-y_1 = m(x-x_1)$, যেখানে m যে-কোন ধ্রুবক-সংখ্যা।

প্রশ্নমালা 10

1. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ এবং $\frac{x}{b}+\frac{y}{a}=1$, সরল রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

2. $\frac{x}{4}+\frac{y}{5}=1$ এবং $\frac{x}{5}+\frac{y}{4}=1$, সরল রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

3. প্রমাণ কর যে, $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, $\frac{x}{b}+\frac{y}{a}=1$ এবং $x-y=0$ সরল রেখাত্রয় একবিন্দুগামী।

4. প্রমাণ কর যে, $3x+4y+6=0$, $6x+5y+9=0$ এবং $3x+3y+5=0$ সরল রেখাত্রয় এক বিন্দুগামী।

5. a-এর মান কত হইলে, $3x+y-2=0$, $ax+2y-3=0$ এবং $2x-y-3=0$ সরল রেখাত্রয় এক বিন্দুগামী হইবে?

6. প্রমাণ কর যে, $(3a, 0)$ $(0, 3b)$ এবং $(a, 2b)$ বিন্দুত্রয় সমরেখ।

[ইঙ্গিত: প্রথম বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখা $\frac{x}{3a}+\frac{y}{3b}=1$, $(a, 2b)$ বিন্দুগামী।]

7. প্রমাণ কর যে, $(a, 0)$, $(0, b)$, $(1, 1)$ সমরেখ হইলে, $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$.

8. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ সরল রেখা, $2x-y=1$ এবং $3x-4y+6=0$ সরল রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী এবং $4x+3y-6=0$ সরল রেখার সমান্তরাল। a এবং b-এর মান নির্ণয় কর। [C. U. 1948]

2·19. অত্যাবশ্যক প্রতিজ্ঞা।

$a_1x+b_1y+c_1=0$ এবং $a_2x+b_2y+c_2=0$ সরল রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী যে-কোন সরল রেখার সমীকরণ $a_1x+b_1y+c_1+l(a_2x+b_2y+c_2)=0$, যেখানে l যে-কোন একটি ধ্রুবক সংখ্যা।

$$a_1x+b_1y+c_1=0 \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$$

এবং $$a_2x+b_2y+c_2=0 \quad \cdots \quad \cdots \quad (2)$$

সরল রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু যেন (h, k);

$\therefore\quad a_1h+b_1k+c_1=0$ এবং $a_2h+b_2k+c_2=0.$

$\therefore\quad a_1h+b_1k+c_1+l(a_2h+b_2k+c_2)=0.\qquad\cdots\qquad(3)$

(3) হইতে স্পষ্টই প্রতীয়মান হয় যে,

$(a_1x+b_1y+c_1)+l(a_2x+b_2y+c_2)=0$, (h, k) বিন্দুগামী। এই সমীকরণটিকে $(a_1+la_2)x+(b_1+lb_2)y+c_1+lc_2=0$,

বা, $\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\mathrm{C}=0$ আকারে প্রকাশ করা যায়, যেখানে

$\mathrm{A}=a_1+la_2$, $\mathrm{B}=b_1+lb_2$, এবং $\mathrm{C}=c_1+lc_2$.

$\therefore$ ইহা একটি সরল রেখার সমীকরণ।

$\therefore$ (1) এবং (2)-এর ছেদবিন্দুগামী যে-কোন সরল রেখার সমীকরণ

$$a_1x+b_1y+c_1+l(a_2x+b_2y+c_2)=0.$$

উদা. 1. (3, 2) বিন্দুগামী এবং $3x+5y-8=0$ এবং $x-3y+2=0$ সরল রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী সরল রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমীকরণদ্বয় সমাধান করিয়া প্রদত্ত সরল রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক (1, 1) পাওয়া যায়।

$\therefore$ (3, 2) এবং (1, 1) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরল রেখার সমীকরণই নির্ণেয় সমীকরণ।

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ $y-2=\dfrac{2-1}{3-1}(x-3)$,

অথবা, $2y-4=x-3$, অথবা, $x-2y+1=0$.

বিকল্প পদ্ধতি :

প্রদত্ত সরল রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী যে-কোন সরল রেখার সমীকরণ $3x+5y-8+k(x-3y+2)=0$, যেখানে k একটি ধ্রুবক সংখ্যা।

ইহা (3, 2) বিন্দুগামী হইলে,

$$3\times3+5\times2-8+k(3-3\times2+2)=0,$$

অথবা, $11+k\times(-1)=0$; $\therefore\ k=11$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ $3x+5y-8+11(x-3y+2)=0$,

অথবা, $14x-28y+14=0$, অথবা, $x-2y+1=0$.

উদা. 2. $2x-3y+4=0$ এবং $3x+4y-5=0$, সরল রেখাদ্বয়ের ছেদ-বিন্দুগামী এবং $6x-7y+8=0$ সরল রেখার উপর লম্বভাবে অবস্থিত সরল রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

প্রদত্ত প্রথম ও দ্বিতীয় সরল রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী যে-কোন সরল রেখার সমীকরণ

$2x-3y+4+k(3x+4y-5)=0$, যেখানে k একটি ধ্রুবক সংখ্যা

অর্থাৎ $(2+3k)x+y(-3+4k)+4-5k=0$.

ইহা প্রদত্ত তৃতীয় সরল রেখার উপর লম্ব হইবে, যদি

$(2+3k)\times 6+(-3+4k)\times(-7)=0$, [অনু. 2·14 দ্রষ্টব্য]

অর্থাৎ $k=\frac{33}{10}$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ $2x-3y+4+\frac{33}{10}(3x+4y-5)=0$,

অথবা, $10(2x-3y+4)+33(3x+4y-5)=0$,

অথবা, $119x+102y-125=0$.

প্রশ্নমালা 11

1. $(3, 2)$ বিন্দুগামী এবং $2x+3y-1=0$ ও $3x-4y-6=0$ সরল রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী সরল রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

2. (a, b) বিন্দুগামী এবং $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1=0$ ও $\frac{x}{b}+\frac{y}{a}-1=0$ সরল রেখা-দ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী সরল রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

3. $x-2y-a=0$ এবং $x+3y-2a=0$-এর ছেদবিন্দুগামী এবং $3x+4y=0$-এর সমান্তরাল সরল রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

4. $x+2y+3=0$ এবং $3x+4y+7=0$ সরল রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী এবং $y-x=8$ সরল রেখার উপর লম্বভাবে স্থিত সরল রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

5. $2x-3y-10=0$ এবং $x+2y-6=0$ সরল রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী এবং $16x-10y-33=0$ এবং $12x+14y+29=0$ সরল রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী সরল রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

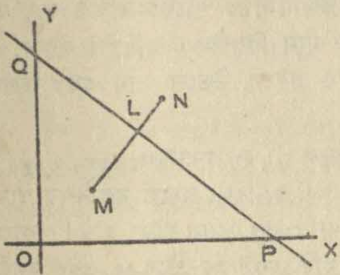
6. প্রমাণ কর যে, $ax+by+c=0$, $a'x+b'y+c'=0$, $(a+a')x+(b+b')y+(c+c')=0$, এবং $(a-a')x+(b-b')y+(c-c')=0$ সরল রেখা-চতুষ্টয় এক-বিন্দুগামী।

2·20. কোন সরল রেখার সম্পর্কে কোন বিন্দুর অবস্থান।

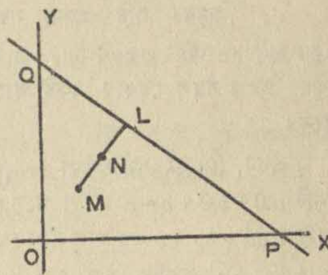
[*Position of a point in relation to a line.*]

একটি সরল রেখার সমীকরণ যেন $ax+by+c=0$, এবং ইহা যেন অক্ষদ্বয়কে যথাক্রমে P এবং Q বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। এখন, $\overleftrightarrow{PQ}$ রেখার সম্পর্কে যেন M বিন্দুর

অবস্থান নির্ণয় করিতে হইবে। M বিন্দু ছাড়া অপর একটি বিন্দু N লওয়া হইল। M এবং N-এর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) এবং উহারা যেন $\overleftrightarrow{PQ}$-এর বিপরীত পাশে অবস্থিত [চিত্র (ক)]।



চিত্র (ক)



চিত্র (খ)

$\overline{MN}$ যুক্ত করিলে উহা যেন $\overleftrightarrow{PQ}$ সরল রেখাকে L বিন্দুতে ছেদ করে এবং L বিন্দু $\overline{MN}$ রেখাকে যেন $m : n$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে, অর্থাৎ $\frac{ML}{LN} = \frac{m}{n}$.

$\therefore$ L বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{mx_2 + nx_1}{m+n}, \frac{my_2 + ny_1}{m+n}\right)$.

যেহেতু L বিন্দু $\overleftrightarrow{PQ}$ সরল রেখার উপর অবস্থিত, সেইহেতু

$$a \cdot \frac{mx_2 + nx_1}{m+n} + b \cdot \frac{my_2 + ny_1}{m+n} + c = 0 ;$$

অথবা, $\frac{ax_1 + by_1 + c}{ax_2 + by_2 + c} = -\frac{m}{n}$ ... ... (1)

আবার, চিত্র (খ)-এ M এবং N বিন্দুদ্বয় $\overleftrightarrow{PQ}$ রেখার একই পাশে অবস্থিত। $\overline{MN}$ যোগ করিয়া $\overrightarrow{PQ}$ অভিমুখে বর্ধিত করিলে, যেন উহা $\overleftrightarrow{PQ}$-কে L বিন্দুতে ছেদ করে এবং L বিন্দু $\overrightarrow{MN}$ সরল রেখাকে $\frac{m}{n}$ অনুপাতে বহির্বিভক্ত করে ; অর্থাৎ ML : LN = $m : n$.

$\therefore$ L বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\frac{mx_2 - nx_1}{m-n}, \frac{my_2 - ny_1}{m-n}$.

L বিন্দু $\overleftrightarrow{PQ}$ সরল রেখার উপর অবস্থিত বলিয়া,

$$a \cdot \frac{mx_2 - nx_1}{m-n} + b \cdot \frac{my_2 - ny_1}{m-n} + c = 0 ;$$

অথবা, $\frac{ax_1 + by_1 + c}{ax_2 + by_2 + c} = +\frac{m}{n}$ ... ... (2)

যেহেতু $\frac{m}{n}$ একটি ধনাত্মক সংখ্যা, অতএব

$\frac{ax_1+by_1+c}{ax_2+by_2+c}$ অনুপাতটির মান (1)-এ ঋণাত্মক এবং (2)-এ ধনাত্মক।

$\therefore$ বিন্দুদ্বয় যদি প্রদত্ত সরল রেখাটির বিভিন্ন পার্শ্বে অবস্থিত হয়, তবে ax_1+by_1+c এবং ax_2+by_2+c রাশিদ্বয়ের মান বিপরীত চিহ্নবিশিষ্ট হইবে, এবং বিন্দুদ্বয় প্রদত্ত সরল রেখার একই পাশে অবস্থিত হইলে, উভয়ের মান একই চিহ্নযুক্ত হইবে।

এখন, (2)-নং সমীকরণে (x_2, y_2)-এর স্থলে (0, 0) বসাইলে, ax_2+by_2+c মানটি $a.0+b.0+c=c$ হইয়া পড়ে। ইহার অর্থ, N-বিন্দুর বদলে মূলবিন্দুর স্থানাঙ্ক বসাইলে $ax+by+c$-এর মান উহার ধ্রুবক সংখ্যা C-এর সমান হইয়া যায়। কাজেই ax_1+by_1+c মানটির চিহ্ন এবং c-এর চিহ্ন যদি একই হয় তবে M এবং মূলবিন্দু $\overleftrightarrow{PQ}$-রেখার একই পাশে অবস্থিত হইবে। c ও ax_1+by_1+c এই দুইটি মানের চিহ্ন বিপরীত হইলে, $\overleftrightarrow{PQ}$-এর যে-পাশে মূলবিন্দু অবস্থিত তাহার বিপরীত পাশে M বিন্দু অবস্থিত হইবে। $\overleftrightarrow{PQ}$-রেখার সম্পর্কে এইভাবে M-বিন্দুর অবস্থান নির্ণয় করা যাইবে।

বিশেষ দ্রষ্টব্য ঃ সরল রেখা-বিশেষের যে-পাশে মূলবিন্দুটি অবস্থিত হয়, সেই পাশটিকেই সাধারণতঃ ধনাত্মক বলিয়া গণ্য করা হয়। কাজেই ধ্রুবক সংখ্যাটির মান যাহাতে ধনাত্মক হয়, সেইভাবে ঐ রেখার সমীকরণটিকে পরিবর্তিত করিতে হয়; উদাহরণস্বরূপ সমীকরণটি যদি $ax+by+c=0$ হয় তবে উহার ধ্রুবক সংখ্যা c ধনাত্মক হইতে পারে। না হইলে c ঋণাত্মক কিন্তু $(-c)$ ধনাত্মক এবং সেক্ষেত্রে $ax+by+c=0$-কে $-ax-by-c=0$ রূপে লেখা যায় যাহাতে মূলবিন্দুর স্থানাঙ্ক (0, 0) বসাইলে $-ax-by-c$-এর মান $=(-c)$ ধনাত্মক হয়। এইভাবে $ax+by+c$ অথবা $-ax-by-c$-এর যেটিতে c বা $(-c)$ ধনাত্মক, সেইটিতে বিন্দুবিশেষের স্থানাঙ্ক বসাইলে যদি ধনাত্মক মান পাওয়া যায় তবে ঐ বিন্দুটি অবশ্যই রেখাটির যে-পাশে মূলবিন্দু সেই ধনাত্মক পাশেই অবস্থিত হইবে। আর যদি সেই মান ঋণাত্মক হয় তবে বিন্দুটি রেখাটির ঋণাত্মক পাশে অর্থাৎ মূলবিন্দুর বিপরীত পাশে অবস্থিত হইবে।

উদাহরণমালা

উদা. 1. দেখাও যে মূলবিন্দু এবং (1, 3) বিন্দু $3x-2y+1=0$ রেখাটির বিপরীত পাশে অবস্থিত। (1, 3) বিন্দু ঐ রেখার ধনাত্মক বা ঋণাত্মক, কোন্ পাশে অবস্থিত?

মূলবিন্দুর স্থানাঙ্ক বসাইয়া $3x-2y+1$-এর মান হইবে

$$3.0-2.0+1=1 \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$$

এবং (1, 3) মান বসাইলে $3x-2y+1$-এর মান হইবে

$$3.1-2.3+1=3-6+1=-2 \quad \cdots \quad \cdots \quad (2)$$

1 এবং -2 বিপরীত চিহ্নবিশিষ্ট বলিয়া মূলবিন্দু এবং (1, 3) বিন্দু $3x-2y+1=0$-এর দুইপাশে অবস্থিত।

(2)-এর মান ঋণাত্মক বলিয়া (1, 3) বিন্দুটি $3x-2y+1=0$-এর ঋণাত্মক পাশে অবস্থিত হইবে।

উদা. 2. $x-2y+3=0$ এবং $x-3y+1=0$, এই দুইটি সমীকরণ-সূচিত রেখার কোন্‌টি ধনাত্মক বা ঋণাত্মক, কোন্ পাশে (1, 1) বিন্দুটি অবস্থিত ?

(1, 1) বিন্দু স্থানাঙ্ক বসাইলে $x-2y+3$-এর মান হয়

$$1-2.1+3=2 \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$$

এবং (1, 1) স্থানাঙ্ক বসাইলে $x-3y+1$-এর মান হয়

$$1-3.1+1=-1 \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (2)$$

∴ (1)-এর মান 2 ধনাত্মক বলিয়া (1, 1) বিন্দুটি $x-2y+3=0$-এর ধনাত্মক দিকে অবস্থিত এবং (2)-এর মান -1 ঋণাত্মক বলিয়া (1, 1) বিন্দুটি $x-3y+1=0$-এর ঋণাত্মক দিকে অবস্থিত।

উদা. 3. দেখাও যে, (3, 2) বিন্দুটি $5x-7y-2=0$-এর ধনাত্মক পাশে অবস্থিত।

$5x-7y-2=0$ সমীকরণটির ধ্রুবক সংখ্যা -2 ঋণাত্মক। ঐ ধ্রুবক সংখ্যাটি ধনাত্মক করিয়া সমীকরণটিকে $-5x+7y+2=0$ আকারে লেখা যায়।

এখন (3, 2) স্থানাঙ্ক বসাইলে $-5x+7y+2$-এর মান হয়

$$-5\times3+7.2+2=-15+14+2=1.$$

∴ (3, 2) বিন্দুটি $5x-7y-2=0$-এর ধনাত্মক পাশে অবস্থিত।

প্রশ্নমালা 12

1. (0, 0) এবং (5, 7) বিন্দু-দুইটির কোন্‌টি $4x-5y+7=0$-এর কোন্ পাশে অবস্থিত ?

2. একটি রেখার যে-পাশে মূলবিন্দু থাকে তাহাকে ধনাত্মক ধরিয়া (3, -5) বিন্দুটি $7x-5y+1=0$-এর কোন্ পাশে অবস্থিত তাহা নির্ণয় কর।

3. দেখাও যে (2, -3) ও (-2, 3) বিন্দু-দুইটি $5x-7y+9=0$-এর দুইপাশে অবস্থিত।

4. দেখাও যে, (2, 4) বিন্দুটি $5x-3y-2=0$-এর ধনাত্মক দিকে এবং $2y-5x+1=0$-এর ঋণাত্মক দিকে অবস্থিত।

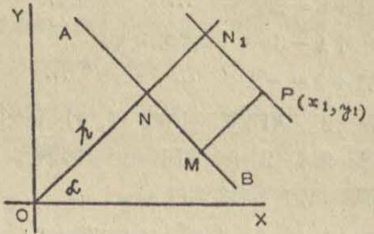
5. নিম্নলিখিত বিন্দুগুলির কোন্‌টি $x-2y-3=0$-এর কোন্ পাশে অবস্থিত তাহা নির্ণয় কর :

(i) (5, 2) ; (ii) (7, 1) ; (iii) (4, 1).

2·21. কোন নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে কোন নির্দিষ্ট সরল রেখার উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয়।

[*To find the length of the perpendicular drawn from a given point on a given straight line.*]

(i) ধরা যাক, $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$, একটি সরল রেখা $\overleftrightarrow{AB}$-এর সমীকরণ, এবং (x_1, y_1) একটি নির্দিষ্ট বিন্দু P-এর স্থানাঙ্ক।



$\overleftrightarrow{AB}$-এর উপর $\overline{ON}$ এবং $\overline{PM}$ লম্ব অঙ্কিত হইল। P-এর মধ্য দিয়া $\overleftrightarrow{AB}$-এর সমান্তরাল একটি সরল রেখা টানা হইল। উহা যেন ($\overline{ON}$-কে বা) বর্ধিত $\overrightarrow{ON}$-কে N_1 বিন্দুতে ছেদ করে। ধরা যাক, $ON_1=p_1$.

$\therefore$ $\overrightarrow{PN_1}$-এর সমীকরণ $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p_1$,

কিন্তু এই রেখা P বিন্দুগামী।

$\therefore \quad x_1\cos\alpha+y_1\sin\alpha=p_1.$

$\therefore \quad PM=N_1N=ON_1-ON=p_1-p=x_1\cos\alpha+y_1\sin\alpha-p.$

(ii) সরল রেখাটির সমীকরণ যেন $ax+by+c=0$.

ইহাকে (i)-এর আকারে প্রকাশ করিলে সমীকরণটি নিম্নোক্ত রূপ হইবে :

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}y+\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}=0. \quad \text{[অনু. 2·9 দ্রষ্টব্য]}$$

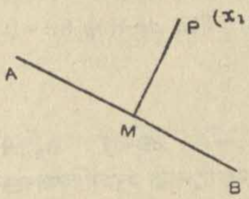
$\therefore$ নির্ণেয় লম্বের দৈর্ঘ্য $=\dfrac{ax_1+by_1+c}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

বিকল্প পদ্ধতি :

ধরা যাক, $ax+by+c=0 \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$

একটি নির্দিষ্ট সরল রেখার সমীকরণ ; এবং P একটি নির্দিষ্ট বিন্দু (x_1, y_1).

$\overleftrightarrow{AB}$-এর উপর $\overline{PM}$ লম্ব টানা হইল। ধরা যাক, M-এর স্থানাঙ্ক (x_2, y_2), এবং $\overleftrightarrow{AB}$-এর উপর যে-কোন লম্ব-রেখার সমীকরণ $bx - ay + k = 0$;



ইহা (x_1, y_1) বিন্দুগামী হইলে $bx_1 - ay_1 + k = 0$, অর্থাৎ, $k = ay_1 - bx_1$.

$\therefore$ $\overleftrightarrow{PM}$-এর সমীকরণ $bx - ay + ay_1 - bx_1 = 0$;

অথবা, $b(x - x_1) - a(y - y_1) = 0$ ... ... (2)

এখন, (2), (x_2, y_2) বিন্দুগামী

$\therefore$ $b(x_2 - x_1) - a(y_2 - y_1) = 0$ ... ... (3)

পুনশ্চ, (1), (x_2, y_2) বিন্দুগামী ;

$\therefore$ $ax_2 + by_2 + c = 0$,

অথবা, $ax_2 + by_2 = -c$,

অথবা, $a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) = -ax_1 - by_1 - c.$ (4)

(3) এবং (4)-এর বর্গ করিয়া উহাদের যোগফল লইলে,

$$(a^2 + b^2)(x_2 - x_1)^2 + (a^2 + b^2)(y_2 - y_1)^2 = (ax_1 + by_1 + c)^2 ;$$

অথবা, $(a^2 + b^2)\{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2\} = (ax_1 + by_1 + c)^2$;

অথবা, $(a^2 + b^2)PM^2 = (ax_1 + by_1 + c)^2$;

$$\therefore \quad PM = \frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

টীকা 1. N_1 বিন্দু যদি O এবং N-এর মধ্যে অবস্থিত হইত, অর্থাৎ P বিন্দু যদি O এবং $\overleftrightarrow{AB}$-এর মধ্যে অবস্থিত হইত, তবে $PM = p - p' = -(p' - p)$.

অতএব, লম্বের দৈর্ঘ্য $\pm(p' - p)$, অথবা, $\pm \dfrac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

মূলবিন্দু হইতে কোন সরল রেখার উপর অঙ্কিত লম্ব ধনাত্মক হইবে ধরিয়া লইলে, নিম্ন-পদ্ধতিতে লম্বের দৈর্ঘ্য ধনাত্মক বা ঋণাত্মক বলিয়া গণ্য হয় :

সরল রেখার সমীকরণকে এরূপ আকারে প্রকাশ করিতে হইবে, যেন ধ্রুবক পদটি (অর্থাৎ x, y চল-বিহীন পদটি) ধনাত্মক হয়। তাহা হইলে মূলবিন্দুটি সরল রেখার যেদিকে অবস্থিত সেইদিকে নির্দিষ্ট বিন্দু থাকিলে লম্বের দৈর্ঘ্য ধনাত্মক নতুবা ঋণাত্মক।

টীকা 2. মূলবিন্দু (0, 0) হইতে $ax+by+c=0$ সরল রেখার উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য $=\dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

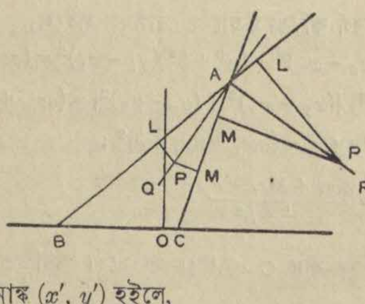
2·22. $a_1x+b_1y+c_1=0$ এবং $a_2x+b_2y+c_2=0$ সরল রেখাদ্বয়ের অন্তর্গত কোণের সমদ্বিখণ্ডকদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় করিতে হইবে।

[*To find the equations to the straight lines bisecting the angle between two straight lines $a_1x+b_1y+c_1=0$ and $a_2x+b_2y+c_2=0$.*]

ধরা যাক, সরল রেখাদ্বয় $\overrightarrow{AB}$ এবং $\overrightarrow{AC}$; এবং উহাদের কোণদ্বয়ের সমদ্বিখণ্ডক $\overrightarrow{AQ}$ এবং $\overrightarrow{AR}$.

P এই সমদ্বিখণ্ডকদ্বয়ের যে-কোনটির উপর একটি বিন্দু। P হইতে $\overrightarrow{AB}$ এবং $\overrightarrow{AC}$-এর উপর $\overline{PL}$ এবং $\overline{PM}$ লম্ব টানা হইল। এখন $\triangle PAL$ এবং $\triangle PAM$ সর্বসম বলিয়া $\overline{PL}$ ও $\overline{PM}$-এর দৈর্ঘ্য সমান।

প্রদত্ত সমীকরণদ্বয়কে এমনভাবে লেখা হইল যে, c_1 এবং c_2 ধনাত্মক হয়।



∴ P-এর স্থানাঙ্ক (x', y') হইলে,

$$PL=\frac{a_1x'+b_1y'+c_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}} \text{ এবং } PM=\frac{a_2x'-b_2y'+c_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}.$$

এখন $\overrightarrow{AQ}$ বা বর্ধিত $\overrightarrow{QA}$-এর উপর অবস্থিত হইলে P এবং O (মূলবিন্দু) সরল রেখাদ্বয়ের একই পার্শ্বে অথবা বিভিন্ন পার্শ্বে অবস্থিত হইবে।

অতএব, $\overline{PL}$ এবং $\overline{PM}$ উভয়ই ধনাত্মক অথবা উভয়ই ঋণাত্মক হইবে।

[অনু. 2·21-এর টীকা দ্রষ্টব্য]

$$\therefore \quad \frac{a_1x'+b_1y'+c_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}=\frac{a_2x'+b_2y'+c_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}.$$

$\therefore$ P বিন্দুটি $\frac{a_1x+b_1y+c_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}=\frac{a_2x+b_2y+c_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$, সরল রেখার উপর অবস্থিত হইবে।

অতএব, $\overrightarrow{AQ}$-এর সমীকরণ $\frac{a_1x+b_1y+c_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}=\frac{a_2x+b_2y+c_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$.

পুনশ্চ, P বিন্দু $\overrightarrow{AR}$-এর উপর অবস্থিত হইলে, P এবং O, $\overrightarrow{AB}$-এর একই পার্শ্বে, কিন্তু $\overrightarrow{AC}$-এর বিভিন্ন পার্শ্বে অবস্থিত হইবে।

$\therefore$ $\overline{PL}$ ধনাত্মক এবং $\overline{PM}$ ঋণাত্মক, অর্থাৎ $\overline{PL}$ এবং $\overline{PM}$ বিপরীত চিহ্নবিশিষ্ট।

অতএব, এক্ষেত্রে $\frac{a_1x'+b_1y'+c_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}=-\frac{a_2x'+b_2y'+c_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$.

$\therefore$ $\overrightarrow{AR}$-এর সমীকরণ $\frac{a_1x+b_1y+c_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}=-\frac{a_2x+b_2y+c_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$,

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ $\frac{a_1x+b_1y+c_1}{\sqrt{a_1^2+b_2^2}}=\pm\frac{a_2x+b_2y+c_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$.

উদাহরণমালা

উদা. 1. $3x-4y+7=0$ এবং $12x-5y-8=0$ সরল রেখাদ্বয়ের অন্তর্গত কোণের সমদ্বিখণ্ডকদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমীকরণদ্বয় নিম্নলিখিত আকারে প্রকাশ করা হইল :

$$3x-4y+7=0 \text{ এবং } -12x+5y+8=0.$$

$\therefore$ মূলবিন্দু যে কোণের মধ্যে আছে, সেই কোণের সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ

$$\frac{3x-4y+7}{\sqrt{3^2+4^2}}=+\frac{-12x+5y+8}{\sqrt{12^2+5^2}},$$

অথবা, $13(3x-4y+7)=5(-12x+5y+8)$,

অথবা, $99x-77y+51=0$.

অপর সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ,

$$\frac{3x-4y+7}{\sqrt{3^2+4^2}}=-\frac{-12x+5y+8}{\sqrt{12^2+5^2}},$$

অথবা, $13(3x-4y+7)=-5(-12x+5y+8)$,

অথবা, $21x+27y-131=0$.

উদা. 2. $y=mx+c_1$ এবং $y=mx+c_2$ সমান্তরাল সরল রেখাদ্বয়ের মধ্যের দূরত্ব নির্ণয় কর।

(x_1, y_1) যেন দ্বিতীয় সরল রেখাটির উপর যে-কোন একটি বিন্দু।

$\therefore \quad y_1=mx_1+c_2.$

$\therefore \quad y_1-mx_1=c_2, \qquad \cdots \qquad \cdots \quad (1)$

(x_1, y_1) হইতে প্রথম সরল রেখাটির, যাহার সমীকরণ $mx-y+c_1=0$, উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য $=\dfrac{mx_1-y_1+c_1}{\sqrt{1+m^2}}=\dfrac{c_1-c_2}{\sqrt{1+m^2}}$ [(1) হইতে]

এবং ইহাই সরল রেখাদ্বয়ের মধ্যের দূরত্ব।

উদা. 3. $y=mx+c$ এবং $y=mx+d$ সমান্তরাল সরল রেখাদ্বয়ের মধ্যের দূরত্ব নির্ণয় কর।

প্রদত্ত রেখাদ্বয়ের যে-কোনটির যে-কোন বিন্দু হইতে অপরটির উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্যই নির্ণেয় দূরত্ব।

প্রথম সরল রেখাটির যে-কোন বিন্দু $(0, c)$ [প্রথম সরল রেখা এবং y-অক্ষের ছেদবিন্দু]।

দ্বিতীয় সরল রেখার সমীকরণ, $y-mx-d=0$;

$\therefore$ লম্বের দৈর্ঘ্য $=\dfrac{c \sim d}{\sqrt{1-m^2}}$. ইহাই নির্ণেয় দূরত্ব।

প্রশ্নমালা 13

1. (*a*) (4, 5) বিন্দু হইতে $3x+4y=10$ সরল রেখাটির উপর,

(*b*) $(-3, -4)$ বিন্দু হইতে $\dfrac{x}{3}-\dfrac{y}{4}=1$ সরল রেখাটির উপর, অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

2. x-অক্ষের উপর যে দুই বিন্দু হইতে $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ সরল রেখার উপর অঙ্কিত লম্বদ্বয়ের প্রত্যেকের মান a হইবে, তাহাদের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

3. প্রমাণ কর যে, $2x+11y=5$ সরল রেখার উপর অবস্থিত যে-কোন বিন্দু হইতে $24x+7y=20$ এবং $4x-3y=2$ সরল রেখাদ্বয়ের উপর অঙ্কিত লম্বদ্বয়ের দৈর্ঘ্য সমান।

4. প্রমাণ কর যে, $7x-9y+10=0$ সরল রেখার যে-কোন বিন্দু হইতে $3x+4y=5$ এবং $12x+5y=7$ সরল রেখাদ্বয়ের উপর লম্ব অঙ্কন করিলে, লম্বদ্বয় পরস্পর সমান। [C. U., B. Sc., 1952]

5. $12x+5y-4=0$ এবং $3x+4y+7=0$ সরল রেখাদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ-দ্বয়ের সমদ্বিখণ্ডকদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর।

6. কোন ত্রিভুজের কৌণিক বিন্দুগুলির স্থানাঙ্ক $(-2, 1)$, $(1, 4)$ এবং $(3, -1)$ হইলে, উহার শীর্ষবিন্দুত্রয় হইতে বিপরীত বাহুর উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

7. $3x+4y=6$ এবং $3x+4y=-5$ সমান্তরাল সরল রেখাদ্বয়ের মধ্যের দূরত্ব নির্ণয় কর।

8. (i) M $(-2, 7)$ বিন্দুটি $2x-3y-7=0$ সরল রেখার কোন্ পার্শ্বে অবস্থিত, তাহা নির্ণয় কর।

(ii) P $(6, -3)$ বিন্দুটি $4x+5y-5=0$ সরল রেখার কোন্ পার্শ্বে অবস্থিত, তাহা নির্ণয় কর।

9. A এবং B বিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(a \cos \alpha, b \sin \alpha)$ এবং $(a \cos \beta, a \sin \beta)$ হইলে, প্রমাণ কর যে, মূলবিন্দু হইতে $\overline{AB}$ সরল রেখার উপর অঙ্কিত লম্ব $\overline{AB}$-কে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

10. কোন চলমান বিন্দু P হইতে $x+y-5=0$ এবং $3x-2y+7=0$ সরল রেখাদ্বয়ের উপর অঙ্কিত লম্বদ্বয়ের দৈর্ঘ্যের সমষ্টি সর্বদাই 10 হইলে, প্রমাণ কর যে, P বিন্দুর সঞ্চারপথ একটি সরল রেখা হইবে। [C. U., B. Sc., 1950]

প্রশ্নমালা 14 (বিবিধ)

1. $2x-3y+5=0$ এবং $7x+4y-3=0$ সরলরেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

2. $(3, 4)$ বিন্দুগামী এবং $4x-3y+1=0$ সরল রেখার উপর লম্বভাবে অবস্থিত সরল রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

3. মূলবিন্দুগামী এবং $2x+3y=1$ এবং $x-y=2$ সরল রেখাদ্বয়ের ছেদ-বিন্দুগামী সরল রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

4. $25x+41y-8=0$ এবং $5x+7y+9=0$ সরল রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী এবং $2x+3y+7=0$ সরল রেখার সহিত সমান্তরালভাবে অবস্থিত সরল রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

5. প্রমাণ কর যে, $y=2$, $y-\sqrt{3}x=5$ এবং $y+\sqrt{3}x=4$ সরল রেখাত্রয় একটি সমবাহু ত্রিভুজের তিনটি বাহু।

6. $(2a, 2b)$ এবং $(2c, 2d)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরল রেখার লম্ব-সমদ্বিখণ্ডকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

7. মূলবিন্দু হইতে $\frac{7}{\sqrt{2}}$ দূরে অবস্থিত এবং $y-2x+2=0$ ও $y-3x+5=0$ সরল রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী সরল রেখাসমূহের সমীকরণ নির্ণয় কর।

8. (3, 5) বিন্দুগামী এবং $4x-3y+1=0$ সরল রেখার সমান্তরাল সরল রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

9. প্রমাণ কর যে, $y=m_1x+c_1$, $y=m_2x+c_2$ এবং $x=0$ সরল রেখাত্রয় দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $\frac{1}{2}\cdot\frac{(c_1-c_2)^2}{m_2-m_1}$. [C. U., 1955]

10. প্রমাণ কর যে, যদি $a+b=0$ না হয়, তাহা হইলে $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, $\frac{x}{b}+\frac{y}{a}=1$ সরল রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু একটি বর্গক্ষেত্রের কৌণিক বিন্দু হইবে, যাহার সন্নিহিত বাহুদ্বয় অক্ষদ্বয় বরাবর থাকিবে।

11. প্রমাণ কর যে, $\sqrt{3}x+y=0$, $\sqrt{3}y+x=0$, $\sqrt{3}x+y=1$ এবং $\sqrt{3}y+x=1$ সরল রেখাচতুষ্টয় দ্বারা গঠিত সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় পরস্পর লম্ব।
[C. U., 1953]

12. যে শর্ত সিদ্ধ হইলে, (3, −2) বিন্দু হইতে $lx+my+n=0$ সরল রেখার উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য সর্বদা 5 হইবে, তাহা প্রকাশ কর।

13. কোন ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র (1, 4) এবং ইহার দুইটি শীর্ষবিন্দু (4, −3) এবং (−9, 7); ত্রিভুজটির অপর শীর্ষবিন্দুটির স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

তৃতীয় অধ্যায়

বৃত্তের সমীকরণ

(Equations of Circles)

3·1. কোন সমতলের উপর চলমান কোন বিন্দুর দূরত্ব ঐ সমতলে অবস্থিত কোন নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে সর্বদা একই হইলে, চলমান বিন্দুটির সঞ্চারপথকে **বৃত্ত** (circle) বলে।

নির্দিষ্ট বিন্দুটিকে এই বৃত্তের কেন্দ্র (centre) এবং এই কেন্দ্র হইতে চলমান বিন্দুর ধ্রুবক দূরত্বকে ঐ বৃত্তের ব্যাসার্ধ (radius) বলে।

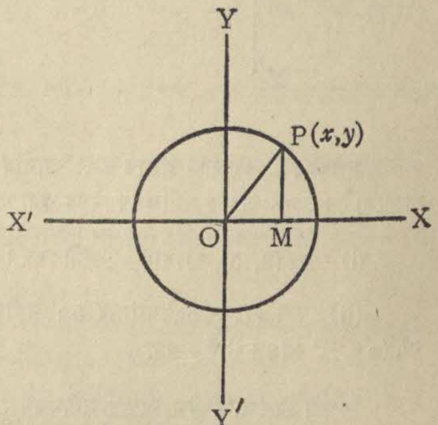
3·2. মূলবিন্দুতে কেন্দ্র এবং a ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ।

[*The equation of a circle whose radius is a and whose centre is at the origion.*]

O মূলবিন্দু এবং $\overleftrightarrow{XOX'}$, $\overleftrightarrow{YOY'}$ দুইটি আয়ত অক্ষ। বৃত্তের কেন্দ্র মূলবিন্দু O-তে অবস্থিত এবং উহার ব্যাসার্ধ a.

বৃত্তের উপর যে-কোন একটি বিন্দু P-এর স্থানাঙ্ক যেন (x, y).

$\overline{OP}$ যুক্ত হইল এবং P হইতে x-অক্ষের উপর $\overline{PM}$ লম্ব টানা হইল। তাহা হইলে, $OM = x$ এবং $PM = y$.



এখন, OPM সমকোণী ত্রিভুজে, $OM^2 + PM^2 = OP^2$;

বা, $\mathbf{x^2 + y^2 = a^2}$;

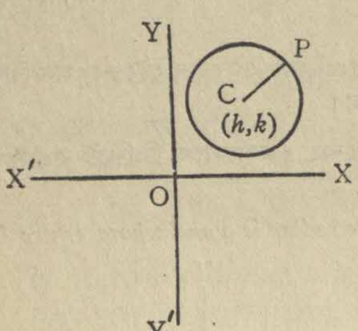
ইহাই মূলবিন্দুতে কেন্দ্র এবং a ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ।

দ্রষ্টব্য : এক্ষেত্রে লক্ষণীয় যে, সমীকরণে x^2 এবং y^2-এর সহগ একই, এবং উহাতে xy-সংবলিত কোন পদ নাই।

3·3. (h, k) স্থানাঙ্কযুক্ত বিন্দুতে কেন্দ্র এবং a ব্যাসার্ধ-বিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ।

[*The equation of a circle whose radius is a and the co-ordinates of whose centre are (h, k).*]

বৃত্তের ব্যাসার্ধ a এবং উহার কেন্দ্র যেন C বিন্দুতে অবস্থিত। $\overleftrightarrow{XOX'}$ এবং $\overleftrightarrow{YOY'}$ আয়ত অক্ষদ্বয় অনুসারে C বিন্দুর স্থানাঙ্ক (h, k).



বৃত্তের উপর যে-কোন বিন্দু P-এর স্থানাঙ্ক যেন (x, y). $\overline{CP}$-কে যোগ করা হইল।

এখন, $CP = a$;

$\therefore \quad CP^2 = a^2$.

আবার,

$CP^2 = (x-h)^2 + (y-k)^2$.

$\therefore \quad (x-h)^2 + (y-k)^2 = a^2$;

ইহাই a ব্যাসার্ধ এবং (h, k) বিন্দুতে কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ।

দ্রষ্টব্য : কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক এবং ব্যাসার্ধ দেওয়া থাকিলে, উপরিউক্ত সমীকরণ-সাহায্যে যে-কোন বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় করা যায়। যেমন,

(i) কেন্দ্র (3, 5), ব্যাসার্ধ 4 ; সমীকরণ : $(x-3)^2 + (y-5)^2 = 4^2$, অর্থাৎ 16.

(ii) কেন্দ্র (7, −3), ব্যাসার্ধ 5 ; সমীকরণ : $(x-7)^2 + \{y-(-3)\}^2 = 5^2$, বা, $(x-7)^2 + (y+3)^2 = 25$.

বিপরীতক্রমে, কোন বৃত্তের সমীকরণ দেওয়া থাকিলে অনায়াসেই বৃত্তটির কেন্দ্র এবং ব্যাসার্ধ নিরূপণ করা যায়। যেমন,

সমীকরণ : $(x-h)^2 + (y-k)^2 = a^2$; কেন্দ্র (h, k), ব্যাসার্ধ a (দক্ষিণপক্ষস্থ রাশির বর্গমূল)।

সমীকরণ : $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 25$; কেন্দ্র (3, 4), ব্যাসার্ধ $\sqrt{25}$, অর্থাৎ, 5.

সমীকরণ : $(x+2)^2 + (x-6)^2 = 64$; কেন্দ্র (−2, 6), ব্যাসার্ধ 8.

3·4. $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ আকারের দ্বিঘাত-সমীকরণ সর্বদাই $(-g, -f)$ কেন্দ্র এবং $\sqrt{g^2+f^2-c}$ ব্যাসার্ধ-বিশিষ্ট বৃত্ত সূচিত করে।

[*Any quadratic equation of the form* $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ *always represents a circle, the co-ordinates of whose centre are* $(-g, -f)$ *and whose radius is* $\sqrt{g^2+f^2-c}$.]

$$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0,$$

বা, $x^2+y^2+2gx+2fy+g^2+f^2=g^2+f^2-c,$

(c-কে পক্ষান্তর করিয়া এবং উভয় পক্ষে g^2 এবং f^2 যোগ করিয়া)

বা, $(x^2+2gx+g^2)+(y^2+2fy+f^2)=g^2+f^2-c,$

বা, $(x+g)^2+(y+f)^2=(\sqrt{g^2+f^2-c})^2,$

বা, $\{x-(-g)\}^2+\{y-(-f)\}^2=(\sqrt{g^2+f^2-c})^2$.

3·3 অনুচ্ছেদের সমীকরণের সহিত মিলাইলে দেখা যায়, ইহা একটি বৃত্তের সমীকরণ এবং এই বৃত্তের কেন্দ্র $(-g, -f)$ এবং ব্যাসার্ধ $\sqrt{g^2+f^2-c}$.

অনুসিদ্ধান্ত। g ও f-এর মান সর্বদা অপরিবর্তিত কিন্তু c-এর মান পরিবর্তনশীল হইলে $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ $(-g, -f)$ কেন্দ্রবিশিষ্ট একাধিক এককেন্দ্রীয় বৃত্ত সূচিত করিবে।

দ্রষ্টব্য : (i) $g^2+f^2>c$ হইলে, ব্যাসার্ধ ধনাত্মক এবং সেইজন্য বৃত্তটি বাস্তব (real) হইবে ;

(ii) $g^2+f^2<c$ হইলে, ব্যাসার্ধ ঋণাত্মক এবং সেইজন্য বৃত্তটিও কাল্পনিক (imaginary) হইবে ;

(iii) আবার, $g^2+f^2=c$ হইলে, ব্যাসার্ধ শূন্য (0) হইবে এবং তখন বৃত্তটি একটি বিন্দুতে পরিণত হইবে।

3·5. সাধারণ দ্বিঘাত-সমীকরণ $ax^2+by^2+2hxy+2gx+2fy+c=0$-এর বৃত্ত সূচিত করিবার শর্ত।

[*The condition that the general quadratic equation of the second degree* $ax^2+by^2+2hxy+2gx+2fy+c=0$ *may represent a circle.*]

$ax^2+by^2+2hxy+2gx+2fy+c=0$; উভয় পক্ষকে a দ্বারা ভাগ করিয়া,

$$x^2+\frac{b}{a}y^2+\frac{2h}{a}xy+\frac{2g}{a}x+\frac{2f}{a}y+\frac{c}{a}=0. \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$$

(1)-দ্বারা কোন বৃত্ত সূচিত হইলে, এই বৃত্তের কেন্দ্র $(-g', -f')$ এবং ব্যাসার্ধ $\sqrt{g'^2+f'^2-c'}$, এইরূপ ধরিলে সাধারণত্বের কোন ব্যতিক্রম হয় না। কিন্তু এইরূপ বৃত্তের সমীকরণ $x^2+y^2+2g'x+2f'y+c'=0$; $\cdots$ $\cdots$ (2)

অতএব, (1) এবং (2) সমীকরণ-দুইটি একই সমীকরণ।

সমীকরণ-দুইটির x^2-এর সহগ-দুইটি সমান বলিয়া,

$$x^2 + \frac{b}{a}y^2 + \frac{2h}{a}xy + \frac{2g}{a}x + \frac{2f}{a}y + \frac{c}{a} \equiv x^2 + y^2 + 2g'x + 2f'y + c' ;$$

$$\therefore \quad \frac{b}{a} = 1, \ \frac{2h}{a} = 0, \ \frac{g}{a} = g', \ \frac{f}{a} = f', \ \frac{c}{a} = c' ;$$

শেষের তিনটি হইতে নির্দিষ্ট কিছুই জানা যায় না।

$$\therefore \quad \frac{b}{a} = 1 \text{ এবং } \frac{2h}{a} = 0, \text{ বা, } \mathbf{a = b} \text{ এবং } \mathbf{h = 0}.$$

এই দুইটিই নির্ণেয় শর্ত।

অতএব, সাধারণ দ্বিঘাত-সমীকরণ

$ax^2 + by^2 + 2hxy + 2gx + 2fy + c = 0$ দ্বারা বৃত্ত সূচিত হইবার শর্ত হইতেছে,

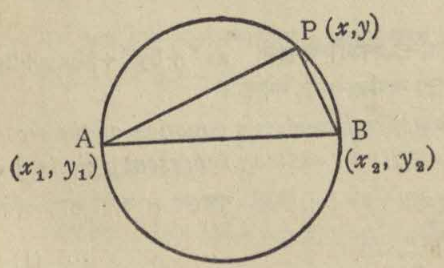
$$\mathbf{a = b} \text{ এবং } \mathbf{h = 0},$$

অর্থাৎ, সমীকরণটিতে x^2 ও y^2-সংবলিত পদদ্বয়ের সহগ সমান এবং xy-সংবলিত পদের অভাব, এই দুইটিই প্রয়োজনীয় ও যথেষ্ট শর্ত।

3·6. (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরল রেখা যে বৃত্তের একটি ব্যাস, তাহার সমীকরণ।

[The equation of the circle having the join of (x_1, y_1) and (x_2, y_2) as a diameter.]

(x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) বিন্দুদ্বয় যথাক্রমে A এবং B দ্বারা সূচিত হইল। বৃত্তের উপর যে-কোন বিন্দু P-এর স্থানাঙ্ক যেন (x, y). $\overline{AP}$ ও $\overline{BP}$ যুক্ত হইল।



$\overline{AB}$ ব্যাস বলিয়া, APB অর্ধবৃত্তস্থ কোণ, এবং সেই কারণে উহা এক সমকোণের সমান। কাজেই $\overline{AP}$ ও $\overline{BP}$ পরস্পর লম্ব; অতএব, $\overline{AP}$ ও $\overline{BP}$ সরল রেখা-দ্বয়ের প্রবণতা-দুইটির গুণফল অবশ্যই -1 হইবে।

এখন, $\overline{AP}$-এর প্রবণতা $= \dfrac{y - y_1}{x - x_1}$;

এবং BP-এর প্রবণতা $=\dfrac{y-y_2}{x-x_2}$;

$\therefore \quad \dfrac{y-y_1}{x-x_1} \cdot \dfrac{y-y_2}{x-x_2} = -1,$

বা, $\quad (y-y_1)(y-y_2) = -(x-x_1)(x-x_2),$

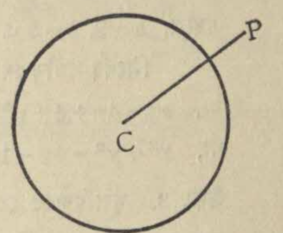
বা, $\quad (y-y_1)(y-y_2) + (x-x_1)(x-x_2) = 0,$

বৃত্তটির নির্ণেয় সমীকরণ।

3·7. বৃত্তের বহিঃস্থ, উপরস্থ এবং অন্তঃস্থ বিন্দু।

[Points lying outside, on or inside a circle.]

ধরা যাক, বিন্দুটি P, বৃত্তটির কেন্দ্র C এবং ব্যাসার্ধ a ; তাহা হইলে,



$CP > a$ হইলে, P বিন্দুটি বৃত্তটির বহিঃস্থ হইবে ;

$CP = a$ হইলে, P বিন্দুটি বৃত্তটির উপরস্থ হইবে ;

$CP < a$ হইলে, P বিন্দুটি বৃত্তটির অন্তঃস্থ হইবে।

$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ বৃত্তটির সমীকরণ হইলে, কেন্দ্র C বিন্দুর স্থানাঙ্ক হইবে $(-g, -f)$ এবং বৃত্তটির ব্যাস a হইবে $\sqrt{g^2+f^2-c}$.

অতএব, P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x_1, y_1) হইলে,

P বিন্দুটি বৃত্তটির বহিঃস্থ, উপরস্থ অথবা অন্তঃস্থ হইবে,

যদি $CP \gtreqless a$ হয়,

অর্থাৎ, যদি $\sqrt{(x_1+g)^2+(y_1+f)^2} \gtreqless \sqrt{g^2+f^2-c}$ হয়,

অর্থাৎ, যদি $(x_1+g)^2+(y_1+f)^2 \gtreqless (g^2+f^2-c)$ হয়,

অর্থাৎ, যদি $x_1{}^2+y_1{}^2+2gx_1+2fy_1+c \gtreqless 0$ হয়। ... (1)

(1)-এর সাহায্যে, কোন বিন্দু কোন বৃত্তের বহিঃস্থ, উপরস্থ অথবা অন্তঃস্থ কিনা অতি সহজেই নির্ণয় করা যায়। লক্ষণীয় যে, প্রদত্ত বৃত্তের সমীকরণে x এবং y-এর জায়গায় যথাক্রমে P-এর স্থানাঙ্কের ভুজ ও কোটি বসাইয়া (1)-এর বাম পক্ষের রাশিমালা পাওয়া গিয়াছে।

1·8. বিবিধ প্রশ্নের সমাধান।

উদা. 1. মূলবিন্দুতে কেন্দ্র এবং 5 ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

মূলবিন্দুতে কেন্দ্র এবং a ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ হইতেছে $x^2+y^2=a^2$; এস্থলে $a=5$ বলিয়া,

নির্ণেয় সমীকরণ হইল $x^2+y^2=5^2$,

বা, $\mathbf{x^2+y^2=25.}$

উদা. 2. (2, 5) স্থানাঙ্কযুক্ত বিন্দুতে কেন্দ্র এবং 4 ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

(h, k) বিন্দুতে কেন্দ্র এবং a ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ হইল

$$(x-h)^2+(y-k)^2=a^2.$$

এস্থলে, $h=2$, $k=5$ এবং $a=4$ বলিয়া,

নির্ণেয় সমীকরণ হইল $(x-2)^2+(y-5)^2=4^2$,

বা, $x^2-4x+4+y^2-10y+25=16$,

বা, $\mathbf{x^2+y^2-4x-10y+13=0.}$

উদা. 3. মূলবিন্দুতে কেন্দ্র এবং (3, 5) বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

কেন্দ্র মূলবিন্দুতে অবস্থিত বলিয়া, বৃত্তটির সমীকরণ

$$x^2+y^2=a^2 \qquad \cdots \qquad \cdots \quad (1)$$

ধরা যায়।

এখন, বৃত্তটি (3, 5) বিন্দুগামী বলিয়া,

$3^2+5^2=a^2$, বা, $a^2=34$.

(1) হইতে, নির্ণেয় সমীকরণ হইল $\mathbf{x^2+y^2=34.}$

উদা. 4. $(-3, 2)$ স্থানাঙ্কযুক্ত বিন্দুতে কেন্দ্র এবং $(2, -4)$ বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

কেন্দ্র $(-3, 2)$ বিন্দুতে অবস্থিত বলিয়া বৃত্তটির সমীকরণ

$$(x+3)^2+(y-2)^2=a^2 \qquad \cdots \qquad \cdots \quad (1)$$

ধরা যায়।

এখন, বৃত্তটি $(2, -4)$ বিন্দুগামী বলিয়া,

$(2+3)^2+(-4-2)^2=a^2$, বা, $a^2=5^2+(-6)^2=61$.

$\therefore$ (1) হইতে, নির্ণেয় সমীকরণ হইল $(x+3)^2+(y-2)^2=61$,

বা, $x^2+6x+9+y^2-4y+4=61$,

বা, $\mathbf{x^2+y^2+6x-4y-48=0.}$

উদা. 5. $x^2+y^2-6x+10y-15=0$ সমীকরণটি দ্বারা সূচিত বৃত্তের ব্যাসার্ধ এবং কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

$x^2+y^2-6x+10y-15=0,$

বা, $(x^2-6x+9)+(y^2+10y+25)=25+9+15,$

(-15 কে পক্ষান্তর করিয়া, এবং উভয় পক্ষে $9+25$ যোগ করিয়া)

বা, $(x-3)^2+(y+5)^2=49=7^2$;

∴ বৃত্তটির ব্যাসার্ধ 7 এবং কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(3, -5)$.

উদা. 6. $(2, 3)$ স্থানাঙ্কযুক্ত বিন্দুতে কেন্দ্র এবং $3x-2y-1=0$ এবং $4x+y-27=0$ সরল রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

[C. U., 1947]

ধরা যাক, বৃত্তটির সমীকরণ $(x-2)^2+(y-3)^2=a^2$. ··· (1)

সরল রেখা-দুইটির ছেদবিন্দু পাইতে হইলে, উহাদের সমীকরণ-দুইটিকে সহ-সমীকরণরূপে সমাধান করিতে হইবে।

এখন, $3x-2y-1=0,$

এবং $4x+y-27=0$;

$$\therefore \quad \frac{x}{-2\times(-27)-1\times(-1)}=\frac{y}{-1\times4-(-27)\times3}$$
$$=\frac{1}{3\times1-4\times(-2)},$$

বা, $\frac{x}{55}=\frac{y}{77}=\frac{1}{11}$;

∴ $x=\frac{55}{11}=5,\ y=\frac{77}{11}=7$;

∴ সরল রেখা-দুইটির ছেদবিন্দু $(5, 7)$.

এখন, বৃত্তটি ছেদবিন্দু $(5, 7)$-গামী বলিয়া, (1) হইতে,

$(5-2)^2+(7-3)^2=a^2$, বা, $a^2=3^2+4^2=25.$

∴ (1) হইতে নির্ণেয় সমীকরণ হইল $(x-2)^2+(y-3)^2=25,$

বা, $x^2-4x+4+y^2-6y+9=25,$

বা, $\mathbf{x^2+y^2-4x-6y-12=0.}$

উদা. 7. $(3, -2)$ এবং $(-1, 6)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরল রেখা যে বৃত্তের ব্যাস তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

(3, −2) এবং (−1, 6) বিন্দু-দুইটিকে যথাক্রমে A ও B দ্বারা সূচিত করা হইল। এখন, বৃত্তস্থ যে-কোন বিন্দু P-এর স্থানাঙ্ক (x, y) হইলে,

$$\overline{AP}\text{-এর প্রবণতা (gradient)} = \frac{y+2}{x-3},$$

$$\text{এবং } \overline{BP}\text{-এর প্রবণতা} = \frac{y-6}{x+1}.$$

$\overline{AP}$ ও $\overline{BP}$ সরল রেখাদ্বয় পরস্পর লম্ব বলিয়া,

$$\frac{y+2}{x-3}\cdot\frac{y-6}{x+1} = -1, \text{ বা, } (y+2)(y-6)+(x-3)(x+1)=0,$$

বা, $y^2-4y-12+x^2-2x-3=0,$

বা, $\mathbf{x^2+y^2-2x-4y-15=0}$; ইহাই নির্ণেয় সমীকরণ।

উদা. 8. (3, −4), (4, −1) এবং (2, −2) বিন্দুত্রয়গামী বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

ধরা যাক্, বৃত্তটির সমীকরণ $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0.$ ... (1)

বৃত্তটি প্রদত্ত বিন্দুত্রয়গামী বলিয়া উহাদের স্থানাঙ্ক দ্বারা বৃত্তটির সমীকরণ সিদ্ধ হইবে।

∴ $3^2+(-4)^2+2.3g+2.(-4)f+c=0,$

বা, $25+6g-8f+c=0$ ... ... (2)

$4^2+(-1)^2+2.4g+2.(-1)f+c=0,$

বা, $17+8g-2f+c=0$ ... ... (3)

এবং $2^2+(-2)^2+2.2g+2.(-2)f+c=0,$

বা, $8+4g-4f+c=0.$ ... ... (4)

(2), (3) ও (4) সমীকরণ-তিনটি সমাধান করিলে পাওয়া যায়,

$$g=-\tfrac{7}{2}, f=\tfrac{5}{2} \text{ এবং } c=16.$$

∴ (1) হইতে নির্ণেয় সমীকরণ হইল

$$x^2+y^2+2.(-\tfrac{7}{2})x+2.\tfrac{5}{2}y+16=0,$$

বা, $\mathbf{x^2+y^2-7x+5y+16=0.}$

উদা. 9. প্রমাণ কর যে, (0, 0), (1, 2), (1, −1) এবং (2, −1) বিন্দুচতুষ্টয় একই বৃত্তের পরিধির উপর অবস্থিত। সেই বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

প্রথম বিন্দুত্রয়গামী বৃত্তটির সমীকরণ যেন

$$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0. \qquad \cdots (1)$$

বৃত্তটি প্রথম বিন্দুত্রয়গামী বলিয়া উহাদের স্থানাঙ্ক দ্বারা বৃত্তটির সমীকরণ সিদ্ধ হইবে। অতএব,

$c=0$ ... ... (2)

$5+2g+4f+c=0$ ... ... (3)

$2+2g-2f+c=0$ ... ... (4)

(2) হইতে (3) এবং (4)-এ $c=0$ বসাইয়া,

$5+2g+4f=0$ ... ... (5)

$\underline{2+2g-2f=0}$ ... ... (6)

বিয়োগ করিয়া, $3+6f=0$, বা, $f=-\frac{1}{2}$;

f-এর মান (6)-এ বসাইয়া, $2+2g+1=0$, বা, $g=-\frac{3}{2}$.

অতএব, (2), (3) এবং (4) সমাধান করিয়া, $f=-\frac{1}{2}$, $g=-\frac{3}{2}$, $c=-0$ পাওয়া গেল।

$\therefore$ (1) হইতে প্রথম বিন্দুত্রয়গামী বৃত্তের সমীকরণ হইল

$$x^2+y^2-3x-y=0.$$

এখন, এই সমীকরণের বাম পক্ষে x এবং y-এর পরিবর্তে যথাক্রমে চতুর্থ বিন্দুটির স্থানাঙ্ক $(2, -1)$-এর ভুজ ও কোটি বসাইলে দেখা যায়

বাম পক্ষ $=2^2+(-1)^2-3.2-(-1)$

$=4+1-6+1=0=$ দক্ষিণ পক্ষ ;

অতএব, দেখা গেল, $(2, -1)$ বিন্দুটির স্থানাঙ্ক দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হয়। সুতরাং $(2, -1)$ বিন্দুটি ঐ বৃত্তের উপর অবস্থিত।

$\therefore$ প্রমাণিত হইল যে, প্রদত্ত বিন্দু-চারিটি একই বৃত্তস্থ এবং সেই বৃত্তের সমীকরণ

$$\mathbf{x^2+y^2-3x-y=0.}$$

উদা. 10. (4, 3) এবং $(-2, 5)$ বিন্দুদ্বয়গামী যে বৃত্তের কেন্দ্র $2x-3y=0$ সরল রেখার উপর অবস্থিত, তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর। [C. U. 1950]

বৃত্তটির সমীকরণ যেন $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ ... (1)

(4, 3) এবং $(-2, 5)$ বিন্দুদ্বয় বৃত্তটির উপর অবস্থিত বলিয়া,

$25+8g+6f+c=0$ ... ... (2)

এবং $29-4g+10f+c=0$ ... ... (3)

আবার, (1)-এর দ্বারা সূচিত বৃত্তটির কেন্দ্র $(-g, -f)$. ইহা $2x-3y=0$ সরল রেখাটির উপর অবস্থিত বলিয়া,

$$-2g+3f=0. \quad \cdots \quad \cdots \quad (4)$$

(2), (3) এবং (4)-এর সমীকরণগুলি সমাধান করিলে,

$g=\frac{3}{7}, f=\frac{2}{7}$ এবং $c=-\frac{211}{7}$ পাওয়া যায়।

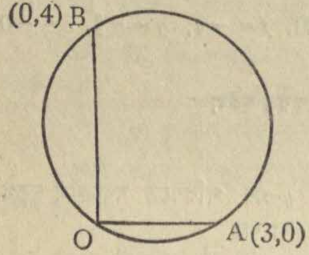
g, f এবং c-এর এইসকল মান (1)-এ বসাইয়া নির্ণেয় সমীকরণটি হইল

$$x^2+y^2+\tfrac{6}{7}x+\tfrac{4}{7}y-\tfrac{211}{7}=0,$$

বা, $\mathbf{7x^2+7y^2+6x+4y-211=0.}$

উদা. 11. মূলবিন্দুগামী যে বৃত্ত অক্ষদ্বয়ের ধনাত্মক দিক্ হইতে যথাক্রমে 3 এবং 4 অংশ ছেদ করে, তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

[Rajputana, Gwalior & Ajmeer, 1943]



বৃত্তটি x-অক্ষ এবং y-অক্ষকে যথাক্রমে মূলবিন্দু ভিন্ন A ও B বিন্দুতে যেন ছেদ করিয়াছে। বৃত্তটি দ্বারা x ও y-অক্ষ হইতে ছেদিতাংশ যথাক্রমে 3 ও 4 বলিয়া, A বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(3, 0)$ এবং B বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(0, 4)$ হইবে। অতএব, বৃত্তটি $(0, 0)$, $(3, 0)$ এবং $(0, 4)$ বিন্দুত্রয়গামী।

এখন, বৃত্তটির সমীকরণ যেন

$$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0 \quad \cdots \quad (1)$$

বৃত্তটি $(0, 0)$, $(3, 0)$ এবং $(0, 4)$ বিন্দুত্রয়গামী বলিয়া,

$$c=0 \quad \cdots \quad \cdots \quad (2)$$

$$9+6g+c=0 \quad \cdots \quad \cdots \quad (3)$$

$$16+8f+c=0 \quad \cdots \quad \cdots \quad (4)$$

(2), (3) ও (4) সমীকরণগুলি সমাধান করিয়া, $g=-\frac{3}{2}, f=-2, c=0.$

$\therefore$ (1) হইতে, নির্ণেয় সমীকরণটি হইল $\mathbf{x^2+y^2-3x-4y=0.}$

বিকল্প পদ্ধতি ঃ বৃত্তটির সমীকরণ যেন

$$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0 \quad \cdots \quad (1)$$

বৃত্তটি মূলবিন্দুগামী বলিয়া, $c=0$.

$\therefore$ (1) সমীকরণটি দাঁড়াইল $x^2+y^2+2gx+2fy=0. \quad \cdots \quad (2)$

এখন, বৃত্তটি যে দুই বিন্দুতে x-অক্ষকে ছেদ করে তাহাদের ভুজ বৃত্তটির সমীকরণ, অর্থাৎ সমীকরণ (2)-এ $y=0$ বসাইয়া পাওয়া যায়; অতএব, তাহাদের ভুজদ্বয় $x^2+2gx=0$, বা, $x(x+2g)=0$ সমীকরণের বীজ।

অতএব, তাহারা $x=0$ এবং $x=-2g$.

অতএব, বৃত্তটি দ্বারা x-অক্ষের ছেদিতাংশ $= -2g - 0 = -2g$.

$\therefore \quad -2g = 3$, বা, $g = -\frac{3}{2}$.

আবার, বৃত্তটি y অক্ষকে যে দুই বিন্দুতে ছেদ করে তাহাদের কোটি সমীকরণ (2)-এ $x = 0$ বসাইয়া দেখা যায়, 0 এবং $-2f$.

$\therefore \quad -2f - 0 = 4$, বা, $f = -2$.

সমীকরণ (2)-এ g এবং f-এর মান বসাইলে নির্ণেয় সমীকরণটি হইল

$$\mathbf{x^2 + y^2 - 3x - 4y = 0.}$$

উদা. 12. (3, −2) বিন্দুগামী এবং $x^2 + y^2 - 5x + 3y - 4 = 0$ দ্বারা সূচিত বৃত্তটির সহিত এককেন্দ্রীয় বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ দ্বারা সূচিত বৃত্তটির কেন্দ্র $(-g, -f)$; এই বৃত্তটির সহিত এককেন্দ্রীয় বৃত্তসমূহের কেন্দ্রও $(-g, -f)$ বলিয়া, এইসকল এককেন্দ্রীয় বৃত্তের g ও f প্রদত্ত বৃত্তটির g ও f-এর সমান হইবে; কিন্তু এককেন্দ্রীয় বৃত্তসমূহের ব্যাসার্ধ প্রদত্ত বৃত্তটির ব্যাসার্ধ $\sqrt{g^2 + f^2 - c}$ হইতে ভিন্ন এবং g ও f প্রদত্ত এবং এককেন্দ্রীয় সকল বৃত্তের ক্ষেত্রে একই বলিয়া c, অর্থাৎ, x ও y বর্জিত রাশিটি, অর্থাৎ, ধ্রুবক রাশিটি প্রদত্ত বৃত্ত এবং এককেন্দ্রীয় বৃত্তসমূহের সমীকরণে ভিন্ন হইবে। তাহা হইলে প্রদত্ত বৃত্তটির সহিত এককেন্দ্রীয় যে-কোন বৃত্তের সমীকরণ

$x^2 + y^2 - 5x + 3y + c = 0 \quad \cdots \quad (1)$, মনে করা যায়।

এখন, এই বৃত্তটি (3, −2) বিন্দুগামী বলিয়া,

$3^2 + (-2)^2 - 5.3 + 3(-2) + c = 0$, বা, $c = 8$.

$\therefore$ (1)-এ c-এর মান বসাইয়া নির্ণেয় সমীকরণ হইল

$$\mathbf{x^2 + y^2 - 5x + 3y + 8 = 0.}$$

উদা. 13. প্রমাণ কর যে, $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 + 6x - 2y = 1$, $x^2 + y^2 - 12x + 4y = 1$ সমীকরণ দ্বারা সূচিত বৃত্তত্রয়ের কেন্দ্র একই সরল রেখায় অবস্থিত; ঐ সরল রেখাটির সমীকরণ নির্ণয় কর। [C. U., B. A. & B. Sc., 1920]

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ দ্বারা সূচিত বৃত্তটির কেন্দ্র $(-g, -f)$;

$\therefore$ প্রদত্ত বৃত্ত-তিনটির কেন্দ্র (0, 0), (−3, 1), (6, −2).

এখন, প্রথম বিন্দুদ্বয়গামী সরল রেখার সমীকরণ

$$\frac{y-0}{0-1} = \frac{x-0}{0-(-3)}, \text{ বা, } x + 3y = 0; \quad \cdots \quad (1)$$

এবং তৃতীয় কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক (6, −2) দ্বারা (1) সমীকরণটি সিদ্ধ হয়।

$\therefore$ প্রদত্ত বৃত্তসমূহের কেন্দ্রত্রয় একই সরল রেখায় অবস্থিত এবং সেই সরল রেখার সমীকরণ $\mathbf{x + 3y = 0}$.

প্রশ্নমালা 15

1. মূলবিন্দুতে কেন্দ্র এবং 8 ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

2. বৃত্তের সমীকরণ কর, যাহার কেন্দ্রবিন্দুর স্থানাঙ্ক
 (i) $(-2, 0)$ এবং ব্যাসার্ধ 4 ;
 (ii) $(4, 5)$ এবং ব্যাসার্ধ 5 ;
 (iii) $(-4, -5)$ এবং ব্যাসার্ধ 7 ;
 (iv) (a, b) এবং ব্যাসার্ধ $a-b$;
 (v) $(3, -4)$ এবং ব্যাসার্ধ $\sqrt{5}$.

3. বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর, যাহার কেন্দ্রবিন্দুর স্থানাঙ্ক
 (i) $(0, 0)$ এবং যাহা $(-2, 1)$ বিন্দুগামী ;
 (ii) $(2, 3)$ এবং যাহা $(5, 7)$ বিন্দুগামী ; [C. U., 1957]
 (iii) $(-2, 5)$ এবং যাহা $(-5, 4)$ বিন্দুগামী ;
 (iv) $(-3, -2)$ এবং যাহা $(2, -3)$ বিন্দুগামী।

4. মূলবিন্দুগামী এবং (a) x-অক্ষের উপর মূলবিন্দু হইতে 5 দূরে ; (b) $(-g, -f)$ স্থানাঙ্কযুক্ত বিন্দুতে কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

5. $(1, 1)$ বিন্দুগামী এবং y-অক্ষের উপর মূলবিন্দু হইতে 7 দূরে অবস্থিত কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

6. নিম্নলিখিত সমীকরণসমূহ যে বৃত্ত সূচিত করে, তাহার কেন্দ্রবিন্দুর স্থানাঙ্ক এবং ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর :
 (i) $x^2+y^2=16$; (ii) $x^2+y^2=3$;
 (iii) $x^2+y^2-10x+16=0$;
 (iv) $x^2+y^2+8y-20=0$;
 (v) $x^2+y^2-10x-12y+12=0$;
 (vi) $x^2+y^2-6x+14y+33=0$; [C. U., B. A. & B. Sc., 1951]
 (vii) $9(x^2+y^2)+12x-6y-4=0$;
 (viii) $a(x^2+y^2)+2bx+2cy=0$.

7. নিম্নলিখিত বিন্দুত্রয়গামী বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর :
 (i) $(0, 0)$, $(0, 5)$ এবং $(-2, -1)$; [Mysore, 1946]
 (ii) $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(0, 3)$;
 (iii) $(2, -1)$, $(2, 3)$, $(4, -1)$.

8. প্রমাণ কর যে, $(3, 2)$, $(1, 4)$, $(3, 4)$, $(1, 2)$ বিন্দুচতুষ্টয় একই বৃত্তস্থ ; এই বিন্দুচতুষ্টয়গামী বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

9. $x^2+y^2-2x+2y-7=0$, $x^2+y^2+8x-2y+8=0$ এবং $x^2+y^2-12x+18y+17=0$ সমীকরণত্রয় দ্বারা সূচিত বৃত্তত্রয়ের কেন্দ্রবিন্দুগুলিকে সংযুক্ত করিলে যে ত্রিভুজটি উৎপন্ন হয়, তাহার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

10. $x^2+y^2-2x+2y-7=0$, $x^2+y^2-6x-2y-6=0$ এবং $x^2+y^2-8x-4y-5=0$ সমীকরণ দ্বারা সূচিত বৃত্তের কেন্দ্র এবং ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর। পরীক্ষা করিয়া দেখ যে, কেন্দ্রত্রয় একই সরল রেখায় অবস্থিত; ঐ সরল রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। [C. U., 1950]

11. প্রমাণ কর যে, $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2-2x-6y=6$ এবং $x^2+y^2-4x-12y=9$ দ্বারা সূচিত বৃত্তত্রয়ের ব্যাসার্ধগুলি এক সমান্তর-শ্রেণীভুক্ত।

[C. U., B. A. & B. Sc., 1917]

12. $(1,-2)$ স্থানাঙ্কযুক্ত বিন্দুতে কেন্দ্র এবং $3x+y=14$ এবং $2x+5y=18$ সমীকরণ দ্বারা সূচিত সরল রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

[C. U., 1945]

13. $5x-4y=20$ সমীকরণ দ্বারা সূচিত সরল রেখা যে-বিন্দুদ্বয়ে অক্ষদ্বয়কে ছেদ করে, সেই বিন্দুদ্বয় এবং মূলবিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

14. মূলবিন্দুতে কেন্দ্রবিশিষ্ট যে বৃত্ত

(a) y-অক্ষের উপর $\frac{x}{5}-\frac{y}{6}=1$ সরল রেখার সহিত

[C. U., 1940]

(b) x-অক্ষের উপর $\frac{x}{3}+\frac{y}{5}=1$ সরল রেখার সহিত মিলিত হয়, তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

15. $(2, 1)$, $(1, 2)$ বিন্দুদ্বয়গামী যে বৃত্তটির কেন্দ্র $3x+4y-7=0$ সরল রেখার উপর অবস্থিত তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

16. $(a, 0)$, (m, n) বিন্দুদ্বয়গামী যে বৃত্তের কেন্দ্র y-অক্ষের উপর অবস্থিত তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

17. যে বিন্দুতে $2x+5y=5$ সরল রেখা y-অক্ষের সহিত মিলিত হয়, সেই বিন্দুগামী, এবং যাহার কেন্দ্র $3x+4y+1=0$, $2x-3y-5=0$ সরল রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুতে অবস্থিত সেই বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

18. $(-2, 6)$, এবং $(6,-8)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরল রেখা যে বৃত্তের একটি ব্যাস, তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

19. $(0, 1)$, $(-2, 0)$ এবং $(1, 0)$ বিন্দুত্রয় যে ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু, তাহার বাহুগুলির সমীকরণ নির্ণয় কর। প্রথম পাদে অবস্থিত ঐ ত্রিভুজের বাহু যে বৃত্তের একটি ব্যাস, তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর। [C. U., 1950 (Suppl.)]

20. (*a*) মূলবিন্দুগামী যে বৃত্ত x ও y অক্ষদ্বয়ের ধনাত্মক দিক্ হইতে যথাক্রমে 5 ও 3 ছেদ করে, তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

(*b*) (*a*)-তে বর্ণিত বৃত্তে $(4, -5)$ বিন্দুটির অবস্থান নির্ণয় কর।

21. $x+y=6$, $2x+y=4$ এবং $x+2y=5$ সরল রেখা দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের পরিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। [Agra, 1945]

22. মূলবিন্দু হইতে 4 দূরে x-অক্ষের উপর অবস্থিত বিন্দুদ্বয়গামী যে বৃত্তের ব্যাসার্ধ 5, তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

23. (*a*) $(3, -4)$ বিন্দুগামী এবং $x^2+y^2-6x+8y+9=0$ বৃত্তের সহিত এককেন্দ্রীয় বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

(*b*) a-তে বর্ণিত এককেন্দ্রীয় বৃত্তে $(5, 2)$ বিন্দুটির অবস্থান নির্ণয় কর।

24. (*a*) $9(x^2+y^2)+12x-6y-4=0$ বৃত্তের সহিত এককেন্দ্রীয় $\frac{1}{3}$ ব্যাসার্ধ-বিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

(*b*) a-তে বর্ণিত এককেন্দ্রীয় বৃত্তে $(-1, \frac{1}{3})$ বিন্দুটির অবস্থান নির্ণয় কর।

25. ABCD, a একক দীর্ঘ বাহুবিশিষ্ট একটি বর্গক্ষেত্র ; AB ও AD-কে অক্ষ ধরিয়া প্রমাণ কর যে, $x^2+y^2=a(x+y)$ ABCD-এর পরিবৃত্তের সমীকরণ।

[C. U., 1951]

26. $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ দ্বারা সূচিত বৃত্তে অন্তর্লিখিত সমবাহু ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [C. U., B. A. & B. Sc., 1918]

[সংকেত : ABC সমবাহু ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয়ের ছেদবিন্দু O বৃত্তটির কেন্দ্র। একটি মধ্যমা $\overline{AD}$-এর $\frac{2}{3}$ অংশ $=$ ব্যাসার্ধ $=\sqrt{g^2+f^2-c}$; $\therefore AD=\frac{3}{2}\sqrt{g^2+f^2-c}$;

$BC=AD \operatorname{cosec} 60^\circ=\frac{2}{\sqrt{3}}\times\frac{3}{2}\sqrt{g^2+f^2-c}=\sqrt{3}\sqrt{(g^2+f^2-c)}$;

$\triangle ABC=\frac{1}{2}BC.AD=\frac{3\sqrt{3}}{4}(g^2+f^2-c)$.]

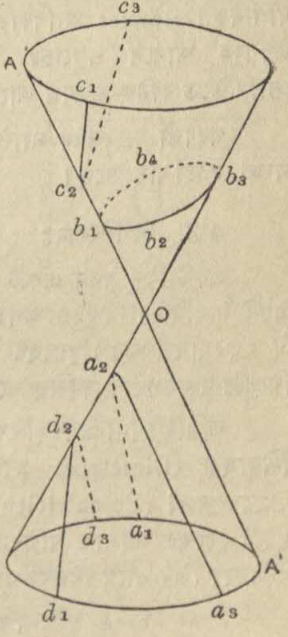
চতুর্থ অধ্যায়

শঙ্কুচ্ছেদ বা কনিক বিভাগের ধারণা
(Idea of Conic Sections)

4·1. অধিবৃত্ত, উপবৃত্ত ও পরাবৃত্ত (Parabola, Ellipse and Hyperbola) ।

সাধারণ-শীর্ষবিশিষ্ট একটি লম্ববৃত্তাকার যুগ্মশঙ্কুকে বিভিন্ন সমতলে ছেদ করিলে বিভিন্ন আকৃতির চিত্র পাওয়া যায়।

(i) এইরূপ একটি শঙ্কুচ্ছেদের সমতলটি যখন উহার সংশ্লিষ্ট শঙ্কুটির একটিমাত্র উৎপাদক রেখার, ধরা যাক, $\overline{OA}$-এর সমান্তরাল হয় তখন ঐ শঙ্কুচ্ছেদের বক্র সীমারেখাটিকে একটি **অধিবৃত্ত** (Parabola) বলে। উদাহরণস্বরূপ, ডান পাশের চিত্রে $a_1a_2a_3$ রেখা-বেষ্টিত শঙ্কুচ্ছেদটির সমতল শঙ্কুটির একটি উৎপাদক রেখা $\overline{OA'}$-এর সমান্তরাল। সেই জন্য $a_1a_2a_3$ বক্র রেখাটি একটি অধিবৃত্ত।



(ii) দ্বিতীয়তঃ, একটি শঙ্কুচ্ছেদের সমতল যখন সংশ্লিষ্ট শঙ্কুটির অক্ষকে তির্যক্‌ভাবে ছেদ করে, তখন উহার বক্র ও বদ্ধ সীমারেখাটিকে **উপবৃত্ত** (Ellipse) বলে। উদাহরণস্বরূপ, ডান পাশের চিত্রে, $b_1b_2b_3b_4$ রেখা-বেষ্টিত সামতলিক শঙ্কুচ্ছেদটি শঙ্কুর অক্ষটিকে তির্যক্‌ভাবে ছেদ করিয়াছে। সেই কারণে ঐ শঙ্কুচ্ছেদের বক্র ও বদ্ধ সীমারেখা $b_1b_2b_3b_4$ একটি উপবৃত্ত।

(iii) তৃতীয়তঃ, একটি যুগ্মশঙ্কু যখন উহার অক্ষের সমান্তরাল দুইটি সামতলিক শঙ্কুচ্ছেদে বিভক্ত হয়, তখন ঐ শঙ্কুচ্ছেদ-দুইটি পরস্পর-বিচ্ছিন্ন দুইটি প্রতিসম বক্র রেখায় বেষ্টিত হয়। এই প্রতিসম বক্র রেখাদ্বয়কে একটি **পরাবৃত্ত** (Hyperbola) বলে। উদাহরণস্বরূপ উপরের চিত্রে, $c_1c_2c_3$ এবং $d_1d_2d_3$ বেষ্টিত শঙ্কুচ্ছেদ-দুইটির সমতল ঐ শঙ্কুর অক্ষটির সমান্তরাল। এই কারণে $c_1c_2c_3$ এবং $d_1d_2d_3$ বক্র রেখাদ্বয় একটি পরাবৃত্তের চিত্র।

উল্লিখিত তিনটি ছাড়া, বৃত্ত, যুগ্মরেখা, এমনকি বিন্দুকে পর্যন্ত শঙ্কুচ্ছেদ হইতে উৎপন্ন বলিয়া ধরা যায়। কারণ, শঙ্কুর ভূমির সমান্তরাল সামতলিক ছেদমাত্র-ই একটি

বৃত্তরেখায় বেষ্টিত, শঙ্কুর শীর্ষগামী উল্লম্ব সমতলমাত্রই যুগ্মরেখায় শঙ্কুটিকে ছেদ করে এবং ঐ শঙ্কুর শীর্ষবিন্দুগামী অনুভূমিক সমতলটি একটিমাত্র বিন্দু অর্থাৎ শীর্ষবিন্দুতে শঙ্কুটিকে ছেদ করে।

শঙ্কুচ্ছেদের জ্যামিতিক আলোচনা কিন্তু অধিবৃত্ত, উপবৃত্ত ও পরাবৃত্তের মধ্যেই সীমাবদ্ধ। কারণ ইহারাই মাত্র **নাভি-নিয়ামক সূত্র** অভিহিত একটি নিয়ম মানিয়া চলে।

খ্রীষ্টপূর্ব 300 শতকে Perga-নিবাসী Apollonius সর্বপ্রথম শঙ্কুচ্ছেদসমূহের নামকরণ করেন। ইহার প্রায় পাঁচ-ছয়শত বৎসর পরে, 300 খ্রীষ্টাব্দের কাছাকাছি কোন এক সময়ে, Alexendria-নিবাসী Pappus অধিবৃত্ত, উপবৃত্ত ও পরাবৃত্ত, এক কথায় **কনিকের নাভি-নিয়ামক** সূত্রটি আবিষ্কার করেন। সর্বশেষে, বিখ্যাত দার্শনিক Descartes আবিষ্কার করেন যে, দ্বিমাত্রিক সাধারণ সমীকরণের জ্যামিতিক রূপসমূহ আসলে শঙ্কুচ্ছেদ বা কনিকের লেখচিত্র। এইখানেই বিশ্লেষণমূলক জ্যামিতিতে কনিক-সংক্রান্ত আলোচনার সূত্রপাত।

পরবর্তী অনুচ্ছেদে নাভি-নিয়ামক সূত্র ও তাহার আলোকে কনিকের নূতন সংজ্ঞা দেওয়া যাইতেছে।

4·2. কনিক :

একটি বিন্দু যখন একটি সমতলে এমনভাবে সঞ্চরমান হয় যে, ঐ সমতলস্থিত একটি স্থিরনির্দিষ্ট বিন্দু ও অপর একটি স্থিরনির্দিষ্ট সরল রেখা হইতে উহার (অর্থাৎ ঐ সঞ্চরমান বিন্দুর) দূরত্বের অনুপাত সর্বদা অপরিবর্তিত থাকে, তখন ঐ চলমান বিন্দুটির সঞ্চারপথকে **কনিক** বলে।

উল্লিখিত নির্দিষ্ট বিন্দুটিকে কনিকের **নাভি** (Focus), ঐ নির্দিষ্ট সরল রেখাকে **নিয়ামক** (Directrix) এবং দূরত্বদ্বয়ের ধ্রুবক অনুপাতকে বলা হয় কনিকের **উৎকেন্দ্রতা** (Eccentricity)। উৎকেন্দ্রতা সাধারণতঃ e দ্বারা সূচিত হয়; ইহা দুইটি দূরত্বের অনুপাত বলিয়া সর্বদাই ধনাত্মক। e-এর এই তিনপ্রকার মান অনুসারে কনিককে তিন ভাগে বিভক্ত করা হয়। যথা :

$e=1$ হইলে, কনিকের নাম দেওয়া হয় অধিবৃত্ত (Parabola),

$e<1$ হইলে, কনিকের নাম দেওয়া হয় উপবৃত্ত (Ellipse),

এবং $e>1$ হইলে, কনিকের নাম দেওয়া হয় পরাবৃত্ত (Hyperbola).

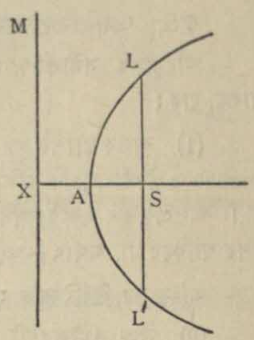
দেখা যাইতেছে, অধিবৃত্তে নির্দিষ্ট বিন্দু এবং নির্দিষ্ট সরল রেখা হইতে চলমান বিন্দুটির দূরত্বদ্বয়ের অনুপাত $e=1$; অতএব, এই দূরত্বদ্বয় সর্বদাই সমান, অর্থাৎ চলমান বিন্দুটি নির্দিষ্ট বিন্দু এবং নির্দিষ্ট সরল রেখা হইতে সতত সমদূরবর্তী থাকে; সুতরাং, অধিবৃত্তের নিম্নলিখিত সংজ্ঞাও পাওয়া যায়।

4·3. অধিবৃত্ত :

কোন সমতলের উপর অবস্থিত একটি স্থিরনির্দিষ্ট বিন্দু এবং একটি স্থিরনির্দিষ্ট সরল রেখা হইতে সর্বদা সমদূরবর্তী থাকিয়া একটি বিন্দু যখন ঐ সমতলের উপর সঞ্চরমান হয় তখন ঐ বিন্দুর সঞ্চারপথকে **অধিবৃত্ত** (Parabola) বলে।

নির্দিষ্ট বিন্দুটিকে ঐ অধিবৃত্তের **নাভি** (Focus) এবং নির্দিষ্ট সরল রেখাকে উহার **নিয়ামক** (Directrix) বলে।

নাভিবিন্দুগামী সরল রেখা নিয়ামকের উপর লম্ব হইলে, তাহাকে অধিবৃত্তের **অক্ষ** (Axis) এবং অক্ষের সহিত অধিবৃত্তের ছেদবিন্দুকে ঐ অধিবৃত্তের **শীর্ষবিন্দু** (Vertex) বলা হয়।

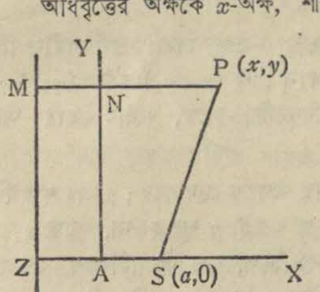


নাভিবিন্দুগামী জ্যা অক্ষের লম্ব হইলে, জ্যা-টিকে **নাভিলম্ব** (Latus rectum) বলা হয়।

পার্শ্ববর্তী চিত্রে LAL′ অধিবৃত্ত, S ঐ অধিবৃত্তের নাভি, MX নিয়ামক, (বর্ধিত) XS অক্ষ, A শীর্ষবিন্দু এবং $\overline{LSL'}$ নাভিলম্ব।

4·4. অধিবৃত্তের সমীকরণ :

অধিবৃত্তের অক্ষকে x-অক্ষ, শীর্ষবিন্দুকে মূলবিন্দু এবং মূলবিন্দু দিয়া অঙ্কিত অক্ষের লম্বরেখাকে y-অক্ষ ধরা হইল।



A অধিবৃত্তের শীর্ষবিন্দু, S নাভি, এবং $\overleftrightarrow{ZM}$ নিয়ামক। $\overline{SA}$ যোগ করিয়া বর্ধিত করা হইল; বর্ধিত SA নিয়ামককে Z বিন্দুতে ছেদ করিল। $\overline{SZ}$ নিয়ামকের উপর লম্ব। A-কে মূলবিন্দু, বর্ধিত $\overleftrightarrow{ZS}$-কে x-অক্ষ এবং A বিন্দু দিয়া অক্ষের উপর লম্ব $\overrightarrow{AY}$ সরল রেখা টানা হইল। ইহা y-অক্ষ হইবে। এখন, A অধিবৃত্তের শীর্ষবিন্দু বলিয়া, ধরা যাক, $ZA = AS = a$. অধিবৃত্তের উপর যে-কোন বিন্দু P-এর স্থানাঙ্ক যেন (x, y). $\overline{SP}$ যোগ করা হইল এবং P হইতে নিয়ামকের উপর অঙ্কিত হইল $\overline{PM}$ লম্ব; ইহা y-অক্ষকে N বিন্দুতে ছেদ করিল।

স্পষ্টই S বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(a, 0)$ এবং

$$PM = PN + NM = PN + AZ = x + a.$$

P অধিবৃত্তস্থ বিন্দু বলিয়া, SP = PM ;

$\therefore \quad SP^2 = PM^2 = (x+a)^2,$

বা, $(x-a)^2 + y^2 = (x+a)^2,$

বা, $y^2 = (x+a)^2 - (x-a)^2 = 4ax.$

$\therefore$ অধিবৃত্তের শীর্ষবিন্দুকে মূলবিন্দু, অধিবৃত্তের অক্ষকে x-অক্ষ এবং শীর্ষবিন্দু দিয়া অঙ্কিত অক্ষের লম্বরেখাকে y-অক্ষ ধরিয়া অধিবৃত্তের সমীকরণ হইল

$$\mathbf{y^2 = 4ax.}$$

4·5. অধিবৃত্তের আকার :

অধিবৃত্তের সমীকরণ হইতে উহার আকার-নির্ণায়ক নিম্নলিখিত তথ্যগুলি পাওয়া যায় :

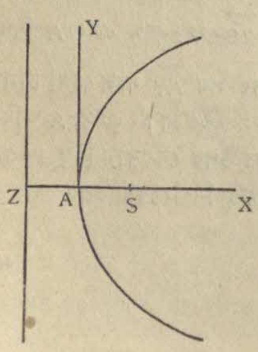
(1) বাস্তব রাশির বর্গ কখনই ঋণাত্মক হইতে পারে না ; অতএব, y^2, অর্থাৎ $4ax$ এবং a দৈর্ঘ্য-জ্ঞাপক বলিয়া সর্বদাই ধনাত্মক, সেজন্য x কখনই ঋণাত্মক হইতে পারে না। অতএব, ঋণাত্মক ভুজবিশিষ্ট কোন বিন্দুই উক্ত সমীকরণ দ্বারা সূচিত অধিবৃত্তের উপর থাকিবে না, অর্থাৎ y-অক্ষের বামপার্শ্বে অধিবৃত্তটির কোন অংশই থাকিবে না।

অধিবৃত্তের শীর্ষবিন্দুকে মূলবিন্দু ধরিয়া সমীকরণ নির্ণয় করা হইয়াছে বলিয়া,

(2) উক্ত সমীকরণটি দ্বারা সূচিত অধিবৃত্তটি মূলবিন্দুগামী ; সমীকরণটি (0, 0) দ্বারা সিদ্ধ হয় বলিয়াও এই সিদ্ধান্ত করা যায়।

(3) x-এর যে-কোন ধনাত্মক মানের জন্যই y-এর সমান কিন্তু বিপরীত চিহ্ন-বিশিষ্ট দুইটি মান থাকিবে, অর্থাৎ অধিবৃত্তস্থ কোন বিন্দু (x_1, y_1) হইলে $(x_1, -y_1)$ বিন্দুটি অবশ্যই অধিবৃত্তস্থ হইবে। অতএব, অধিবৃত্তটি x-অক্ষে, অর্থাৎ উহার অক্ষে প্রতিসম (symmetrical)।

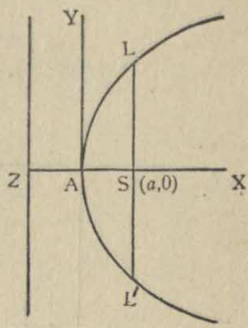
(4) অধিবৃত্তটি একমাত্র শীর্ষবিন্দুতেই উহার অক্ষকে ছেদ করে ; x-এর শূন্য ভিন্ন আর কোন মানের জন্যই y শূন্য হয় না, পরন্তু x ডান দিকে যতই বাড়িয়া চলে, yও ঐ সমীকরণ অনুযায়ী ততই বাড়িয়া চলিবে ; অতএব, অধিবৃত্তটি বদ্ধ রেখা (closed curve) নহে, x-এর ক্রমবর্ধমান মানের সহিত y-এর চিহ্ন-বর্জিত মানযুগ্মও ক্রমবর্ধমান।



এইসকল তথ্য হইতে এই সিদ্ধান্তে উপনীত হওয়া যায় যে, অধিবৃত্তটি পার্শ্বস্থ চিত্রের ন্যায় মূলবিন্দুগামী, নিজ অক্ষে প্রতিসম এবং y-অক্ষের ডানদিকে অসীম পর্যন্ত বিস্তৃত একটি সন্তত রেখা (continuous curve)।

4·6. অধিবৃত্তের নাভিলম্ব।

নাভি S বিন্দুগামী এবং অক্ষের লম্ব $\overline{LSL'}$ জ্যা-নাভিলম্ব (Latus rectum)।



এখন, A বিন্দু $(0, 0)$, S বিন্দু $(a, 0)$ এবং L ও L′ বিন্দুদ্বয়ের ভুজ $= AS = a$. L ও L′ বিন্দুদ্বয়ের কোটি $y^2 = 4ax$ সমীকরণে x-এর স্থলে a বসাইয়া পাওয়া যায়। ঐ সমীকরণে $x = a$ বসাইলে, $y^2 = 4a^2$;

$$\therefore \quad y = \pm 2a.$$

সুতরাং, L বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(a, 2a)$ এবং L′ বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(a, -2a)$.

$$\therefore \quad LL' = \sqrt{(a-a)^2 + (2a+2a)^2} = 4a.$$

অতএব, দেখা গেল অধিবৃত্তটির নাভিলম্ব

(i) উহার শীর্ষবিন্দু হইতে উহার নাভির দূরত্বের চারিগুণ ;

এবং (ii) অধিবৃত্তটির সমীকরণের x অর্থাৎ একঘাত চলরাশিটির চিহ্ন-বর্জিত সহগের সমান।

4·7. অধিবৃত্ত ও তাহার সমীকরণ-বিষয়ক কয়েকটি জ্ঞাতব্য তথ্য।

(1) অধিবৃত্তের সমীকরণ $\mathbf{y^2 = 4ax}$ হইলে,

(i) উহার শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক **(0, 0)** ;

(ii) x-অক্ষ উহার অক্ষ ; স্পষ্টই সমীকরণে চলরাশিটির দ্বিঘাতকে শূন্যের সহিত সমিত করিয়া অধিবৃত্তটির অক্ষের সমীকরণ পাওয়া যায় ; এস্থলে, দ্বিঘাত চলরাশি y^2-কে শূন্যের সহিত সমিত করিয়া, $\mathbf{y^2 = 0}$ বা $\mathbf{y = 0}$ অধিবৃত্তটির অক্ষের সমীকরণ ;

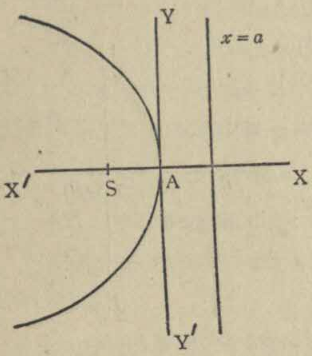
(iii) অধিবৃত্তটির নাভিলম্ব হইবে **4a** ; স্পষ্টই সমীকরণের একঘাত চলরাশির সহগের সাংখ্যমান, অর্থাৎ চিহ্ন-বর্জিত উক্ত সহগ অধিবৃত্তের নাভিলম্ব ;

(iv) পরে দেখা যাইবে, y-অক্ষ অধিবৃত্তটির শীর্ষবিন্দুতে স্পর্শক ; স্পষ্টই, সমীকরণের একঘাত চলরাশি x-কে শূন্যের সহিত সমিত করিয়া এই স্পর্শকের সমীকরণ পাওয়া যায় ; $x = 0$ শীর্ষবিন্দুতে অধিবৃত্তটির স্পর্শক ;

(v) নাভির স্থানাঙ্ক $(a, 0)$, অর্থাৎ $\frac{1}{4}$ (সমীকরণের একঘাত রাশির সহগ) এবং 0 ;

(vi) নিয়ামকের সমীকরণ $x = -a$, অর্থাৎ $x = -(\frac{1}{4}$ সমীকরণের একঘাত রাশির সহগ) ;

(vii) অধিবৃত্তটির অবতলতা (concavity) বা বক্রতা x-অক্ষের ধনাত্মক দিক্-মুখী ; দেখা যাইবে, a ধনাত্মক হইলে, অবতলতা ধনাত্মক দিক্-মুখী এবং a ঋণাত্মক হইলে, অবতলতা ঋণাত্মক দিক্-মুখী হয়।



(2) অধিবৃত্তের সমীকরণ $y^2 = -4ax$ হইলে, পার্শ্ববর্তী চিত্রের ন্যায় ইহার অবস্থান ও আকার হইবে, এবং

(i) ইহার শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক হইবে $(0, 0)$;

(ii) $y=0$, অর্থাৎ x-অক্ষ হইবে ইহার অক্ষ ;

(iii) $4a$ হইবে নাভিলম্ব ;

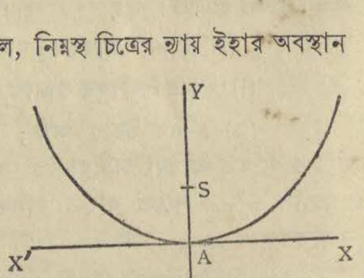
(iv) $x=0$, অর্থাৎ y-অক্ষ উহার শীর্ষবিন্দুতে স্পর্শক হইবে ;

(v) নাভির স্থানাঙ্ক হইবে $(-a, 0)$;

(vi) নিয়ামকের সমীকরণ হইবে $x = -(-a) = a$;

(vii) অধিবৃত্তটির অবতলতা, a ঋণাত্মক বলিয়া x-অক্ষের ঋণাত্মক দিক্-মুখী হইবে।

(3) অধিবৃত্তের সমীকরণ $x^2 = 4ay$ হইলে, নিম্নস্থ চিত্রের ন্যায় ইহার অবস্থান ও আকার হইবে, এবং



(i) ইহার শীর্ষবিন্দু হইবে $(0, 0)$;

(ii) $x=0$, অর্থাৎ y অক্ষ হইবে ইহার অক্ষ ;

(iii) $4a$ হইবে নাভিলম্ব ;

(iv) $y=0$, অর্থাৎ x-অক্ষ হইবে শীর্ষ-বিন্দুতে স্পর্শক ;

(v) নাভির স্থানাঙ্ক হইবে $(0, a)$;

(vi) নিয়ামকের সমীকরণ হইবে $y = -a$;

(vii) অধিবৃত্তটির অবতলতা y-অক্ষের ধনাত্মক দিক্-মুখী হইবে।

(4) অধিবৃত্তের সমীকরণ $x^2 = -4ay$ হইলে, পরপৃষ্ঠার চিত্রের ন্যায় ইহার অবস্থান ও আকার হইবে, এবং

(i) ইহার শীর্ষবিন্দু হইবে $(0, 0)$;

(ii) $x=0$, অর্থাৎ y-অক্ষ হইবে ইহার অক্ষ ;

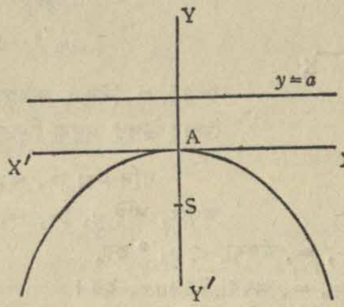
(iii) $4a$ হইবে নাভিলম্ব ;

(iv) $y=0$, অর্থাৎ x-অক্ষ হইবে শীর্ষবিন্দুতে স্পর্শক ;

(v) নাভির স্থানাঙ্ক হইবে $(0, a)$;

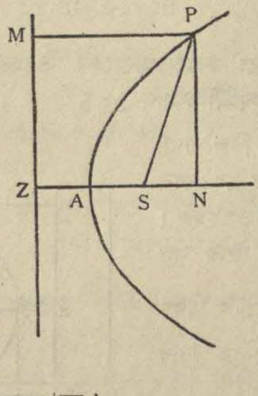
(vi) নিয়ামকের সমীকরণ হইবে $y=-(-a)=a$;

(vii) অধিবৃত্তটির অবতলতা y-অক্ষের ঋণাত্মক দিক্-মুখী হইবে।



4·8. নাভি হইতে অধিবৃত্তস্থ কোন বিন্দুর দূরত্ব।

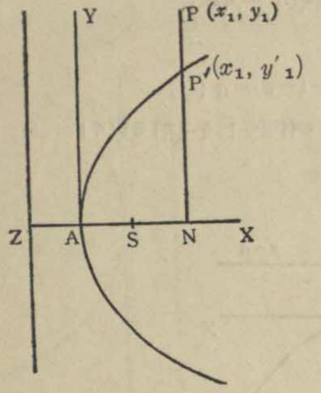
অধিবৃত্তের সমীকরণ $y^2=4ax$ হইলে, A হইবে মূলবিন্দু ; তখন অধিবৃত্তস্থ কোন বিন্দু P (x, y)-এর নাভি দূরত্ব (focal distance) = SP = PM = ZN = ZA + AN = a + x.



4·9. বিন্দুর অবস্থান।

অধিবৃত্তের সমীকরণ $y^2=4ax$ হইলে, শীর্ষবিন্দু A হইবে মূলবিন্দু, এবং অধিবৃত্তের অক্ষ হইবে x-অক্ষ। কোন বিন্দু P-এর স্থানাঙ্ক (x_1, y_1) এবং P বিন্দু

হইতে x-অক্ষের উপর লম্ব যেন $\overline{PN}$; PN, অথবা, (P অধিবৃত্তের ভিতরে অবস্থিত হইলে) বর্ধিত $\overrightarrow{NP}$ অধিবৃত্তটিকে P′ বিন্দুতে ছেদ করিল। এখন, $AN = x_1$, $PN = y_1$; P′ বিন্দুর ভুজ $= AN = x_1$; এবং মনে কর, P′ বিন্দুর কোটি $= y_1'$. P′ (x_1, y'_1) বিন্দুটি অধিবৃত্তের উপর অবস্থিত বলিয়া,



$$y_1'^2 = 4ax_1. \quad \cdots \ (1)$$

স্পষ্টই, P বিন্দুর অবস্থান অধিবৃত্তের বাহিরে, উহার উপর অথবা ভিতরে হইবে,

যদি PN $>$, $=$, অথবা, $<$ P′N হয়,

অর্থাৎ, যদি $y_1 >, =,$ অথবা, $< y'_1$ হয়,

অর্থাৎ, যদি $y_1{}^2 >, =,$ অথবা, $< y_1'^2$ হয়,

অর্থাৎ, যদি $y_1{}^2 >, =,$ অথবা, $< 4ax_1$ হয়। [(1) হইতে]

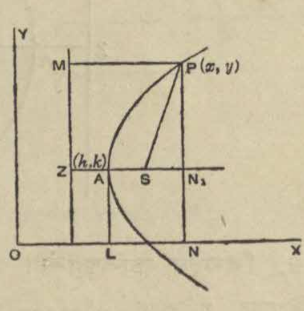
উদাহরণ। (2, 4) বিন্দুটি $y^2 = 4x$ অধিবৃত্তের বাহিরে অবস্থিত; কারণ $4^2 > 4.\ 2$;

(4, 4) বিন্দুটি $y^2 = 4x$ অধিবৃত্তের উপর অবস্থিত; কারণ $4^2 = 4.\ 4$;

(4, 2) বিন্দুটি $y_2 = 4x$ অধিবৃত্তের ভিতরে অবস্থিত; কারণ $2^2 < 4.\ 4$.

4·10. x-অক্ষের সমান্তরাল অক্ষ ও (h, k) শীর্ষবিন্দু-বিশিষ্ট অধিবৃত্তের সমীকরণ :

শীর্ষবিন্দু (h, k) যেন A বিন্দু দ্বারা, নাভি S দ্বারা এবং অধিবৃত্তস্থ যে-কোন বিন্দু (x, y) P দ্বারা সূচিত হইল। P হইতে অঙ্কিত x-অক্ষের উপর লম্ব $\overline{PN}$ বর্ধিত $\overrightarrow{AS}$-কে N_1 বিন্দুতে ছেদ করিল। $\overline{PM}$ নিয়ামক $\overleftrightarrow{ZM}$-এর উপর এবং $\overline{AL}$, x-অক্ষের উপর লম্ব।



এখন, $\overline{AS}$, $\overline{AN_1}$ ও $\overline{PN_1}$-এর মান যথাক্রমে a, x_1 ও y_1 দ্বারা সূচিত করিলে,

$$x_1 = AN_1 = LN = ON - OL = x - h \quad \cdots \ (1)$$

এবং $y_1 = PN_1 = PN - NN_1 = y - AL = y - k$ ··· (2)

আবার, $SP = PM = ZN_1 = ZA + AN_1 = AS + x_1 = a + x_1$ ··· (3)

এবং $SN_1 = AN_1 - AS = x_1 - a$ ··· (4)

যেহেতু $SP^2 = SN_1^2 + PN_1^2$, সেইহেতু, (3), (4) ও (2) হইতে

$$(a + x_1)^2 = (x_1 - a)^2 + y_1^2 \text{ ;}$$

বা, $y_1^2 = (x_1 + a)^2 - (x_1 - a)^2 = 4ax_1$;

বা, $(y - k)^2 = 4a(x - h)$ [(1) ও (2) হইতে]

কিন্তু স্পষ্টতঃ, $\overrightarrow{AS}$-এর সমীকরণ $y = k$

অতএব x-অক্ষের সমান্তরাল অক্ষ $y = k$ এবং (h, k) শীর্ষবিন্দুবিশিষ্ট অধিবৃত্তের সমীকরণ, $(y - k)^2 = 4a(x - h)$.

দ্রষ্টব্য : এখানে অধিবৃত্তটির অবতলতা x-অক্ষের ধনাত্মকমুখী। স্পষ্টতঃ, ঋণাত্মকমুখী হইলে উহার সমীকরণ হইবে, $(y - k)^2 = -4a(x - h)$.

অনুরূপে প্রমাণ করা যায় y-অক্ষের সমান্তরাল অক্ষ ও (h, k)-শীর্ষবিশিষ্ট অধিবৃত্তের সমীকরণ, $(x - h)^2 = 4a(y - k)$;

বা, $(x - h)^2 = -4a(y - k)$.

অনুসিদ্ধান্ত 1. x-অক্ষের সমান্তরাল অক্ষ এবং নাভি মূলবিন্দু হইলে অধিবৃত্তের শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক হইবে $-a, 0$। সেক্ষেত্রে অধিবৃত্তটির সমীকরণ হইবে, $(y - 0)^2 = 4a\{x - (-a)\}$

বা, $\mathbf{y^2 = 4a\,(x + a)}$; উহার অবতলতা হইবে ধনাত্মকমুখী এবং নিয়ামকের সমীকরণ হইবে $x = -2a$ বা $\mathbf{x + 2a = 0}$; অবতলতা ঋণাত্মকমুখী হইলে অধিবৃত্তের সমীকরণটি হইবে, $\mathbf{y^2 = -4a(x + a)}$ এবং উহার নিয়ামকের সমীকরণ হইবে $x - 2a = 0$.

অনুরূপে, y-অক্ষের সমান্তরাল অক্ষ এবং নাভি মূলবিন্দু হইলে অধিবৃত্তের সমীকরণ হইবে $x^2 = \pm 4a\,(y + a)$ এবং নিয়ামকের সমীকরণ হইবে $y \pm 2a = 0$.

অনুসিদ্ধান্ত 2. x-অক্ষ অধিবৃত্তের অক্ষ এবং y-অক্ষ যদি নিয়ামক হয়, তবে শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(a, 0)$ এবং নাভির স্থানাঙ্ক হইবে $(2a, 0)$.

$\therefore$ ধনাত্মকমুখী অবতলতাযুক্ত অধিবৃত্তের সমীকরণ হইবে,

$$(y - 0)^2 = 4a(x - a)$$

বা, $y^2 = 4a(x - a)$ এবং ঋণাত্মকমুখী অবতলতাযুক্ত অধিবৃত্তের সমীকরণ হইবে $y^2 = -4a(x - a)$.

অনুসিদ্ধান্ত 3. অনুসিদ্ধান্ত 1 হইতে দেখা যায় যে **x-অক্ষের সমান্তরাল অক্ষযুক্ত অধিবৃত্তের সমীকরণ** $y^2 = \pm 4a(x-h)$;

বা, $y^2 = \pm 4ax \pm 4ah$ বা, $x = \pm \frac{1}{4a} y^2 \pm ah$.

অর্থাৎ, $\mathbf{x = Ay^2 + By + c}$ আকারের (এখানে, $A = \frac{1}{\pm 4a}$, $B = 0$ এবং $c = \pm ah$).

অনুরূপে, **y-অক্ষের সমান্তরাল অক্ষযুক্ত অধিবৃত্তের সমীকরণের** আকার,

$$\mathbf{y = Ax^2 + Bx + C.}$$

4·11. নিয়ামক ax + by + c = 0 এবং নাভি (h, k)-বিশিষ্ট অধিবৃত্তের সমীকরণ :

অধিবৃত্তস্থ যে-কোন একটি বিন্দু P-এর স্থানাঙ্ক যদি (x_1, y_1) হয়, তবে নাভি হইতে (x_1, y_1)-এর দূরত্ব

$$= \sqrt{(x_1-h)^2 + (y_1-k)^2},$$

এবং (x_1, y_1) হইতে $ax + by + c$-এর লম্বদূরত্ব

$$= \frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

যেহেতু, অধিবৃত্তের সংজ্ঞা অনুসারে, এই দুইটি দূরত্ব সমান, সেইহেতু

$$\sqrt{(x_1-h)^2 + (y_1-k)^2} = \frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2+b^2}} ;$$

বা, $$(x_1-h)^2 + (y_1-k)^2 = \left\{\frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right\}^2.$$

∴ P-এর যে-কোন স্থানাঙ্ক (x, y)-এর জন্য অধিবৃত্তটির সমীকরণ হইবে,

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = \left\{\frac{ax + by + c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right\}^2.$$

দ্রষ্টব্য : 4·11 অনুচ্ছেদের সমীকরণটিকে সরল করিলে দেখা যাইবে যে উহা এমন একটি দ্বিমাত্রিক সাধারণ সমীকরণ যাহার দ্বিমাত্রিক পদগুলিকে উল্লিখিত ভাবে পূর্ণবর্গের আকারে বিন্যস্ত করা যায়। দ্বিমাত্রিক সাধারণ সমীকরণ এই শর্তেই অধিবৃত্ত সূচিত করে।

উদাহরণমালা

উদা. 1. নিম্নলিখিত সমীকরণ-সূচিত অধিবৃত্তের নাভিলম্ব, নাভির স্থানাঙ্ক এবং নিয়ামকের সমীকরণ নির্ণয় কর :

(i) $y^2 = 16x$; (ii) $y^2 = -6x$; (iii) $x^2 = 4y$;

(iv) $3x^2 = -8y$.

(i) এখানে, নাভিলম্ব = সমীকরণটির একঘাত চলরাশির সহগের সাংখ্যমান = x-এর সহগের সাংখ্যমান = 16.

$\therefore$ $\frac{1}{4}$ নাভিলম্ব = 4.

এখানে, $x=0$ হইলে $y=0$ বলিয়া মূলবিন্দু (0, 0)-ই অধিবৃত্তটির শীর্ষবিন্দু; $y=0$ বা x-অক্ষ উহার অক্ষ এবং অবতলতা x-অক্ষের ধনাত্মক দিক্‌মুখী।

$\therefore$ নাভির স্থানাঙ্ক (4, 0) এবং নিয়ামকের সমীকরণ

$$x=-4;\quad \text{বা,}\quad x+4=0.$$

(ii) এখানে, নাভিলম্ব = সমীকরণটির একঘাত চলরাশির সহগের সাংখ্যমান = x-এর সহগের সাংখ্যমান = 6.

এখন, $\frac{1}{4}$ নাভিলম্ব = $\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$, শীর্ষবিন্দু (0, 0), অক্ষ $y=0$ বা x-অক্ষ এবং অবতলতা x-অক্ষের ঋণাত্মক দিক্‌মুখী।

$\therefore$ নাভি, শীর্ষবিন্দুর বামদিকে অবস্থিত বলিয়া উহার স্থানাঙ্ক $(-\frac{3}{2}, 0)$ এবং নিয়ামকের সমীকরণ, $x=-(-\frac{3}{2})$,

বা, $x=\frac{3}{2}$ বা, $2x=3$.

(iii) এখানে, নাভিলম্ব = সমীকরণটির একঘাত চলরাশির সহগের সাংখ্যমান = y-এর সহগের সাংখ্যমান = 4.

এখন, $\frac{1}{4}$ নাভিলম্ব = $\frac{4}{4}=1$, শীর্ষবিন্দুই মূলবিন্দু, $x=0$ বা y-অক্ষ অধিবৃত্তটির অক্ষ এবং অবতলতা y-অক্ষের ধনাত্মক দিক্‌মুখী।

$\therefore$ নাভির স্থানাঙ্ক (0, 1) এবং নিয়ামকের সমীকরণ হইবে

$$y=-1;\quad \text{বা,}\quad y+1=0.$$

(iv) এখানে, $3x^2=-8y$; বা, $x^2=-\frac{8}{3}y$.

$\therefore$ নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য = একঘাত চলরাশির সহগের সাংখ্যমান = $\frac{8}{3}$.

এখন, $\frac{1}{4}$ নাভিলম্ব = $\frac{8}{3\times4}=\frac{2}{3}$, শীর্ষবিন্দুই মূলবিন্দু; $x=0$ বা, y-অক্ষই অধিবৃত্তটির অক্ষ এবং উহার অবতলতা y-অক্ষে ঋণাত্মক দিক্‌মুখী বলিয়া, নাভির স্থানাঙ্ক $(0, -\frac{2}{3})$ এবং নিয়ামকের সমীকরণ, $y=-(-\frac{2}{3})$ বা $y=\frac{2}{3}$; বা $3y=2$.

উদা. 2. (4, −4) বিন্দুগামী একটি অধিবৃত্তের সমীকরণ যদি $y^2=4mx$ হয়, তবে উহার নাভির স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

অধিবৃত্তটি (4, −4) বিন্দুগামী বলিয়া

$$(-4)^2=4m\times4,\quad \text{বা,}\quad 16=16m;\quad \text{বা}\quad m=1.$$

$\therefore$ অধিবৃত্তটির সমীকরণ হয় $y^2=4x$.

উহার নাভিলম্ব = 4 এবং $\frac{1}{4}$ নাভিলম্ব = $\frac{4}{4}=1$.

$\because$ $x=0$ হইলে, $y=0$ হয়, $\therefore$ অধিবৃত্তটির অক্ষ $y=0$ এবং শীর্ষবিন্দুই মূলবিন্দু $(0, 0)$ এবং উহার অবতলতা $y=0$ বা x-অক্ষের ধনাত্মকমুখী।

$\therefore$ উহার নাভির স্থানাঙ্ক $(1, 0)$.

উদা. 3. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ ও $\frac{x}{b}+\frac{y}{a}=1$-এর ছেদবিন্দুগামী অধিবৃত্তের সমীকরণ $y^2=2mx$ হইলে এবং $a+b\neq 0$ হইলে, অধিবৃত্তটির নাভির স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [C. U. 1952]

$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ এবং $\frac{x}{b}+\frac{y}{a}=1$-কে যোগ করিলে

$$x\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+y\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=2;$$

বা, $(x+y)\cdot\frac{a+b}{ab}=2$; বা, $x+y=\frac{2ab}{a+b}$ ... (1)

আবার $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-\frac{x}{b}-\frac{y}{a}=0$; বা $\left(\frac{x}{a}-\frac{x}{b}\right)-\left(\frac{y}{a}-\frac{y}{b}\right)=0$;

বা, $x\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)-y\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)=0$; বা, $(x-y)\cdot\frac{b-a}{ab}=0$

বা, $x-y=0$ ... ... (2)

(1) ও (2) হইতে, যোগ করিয়া $2x=\frac{2ab}{a+b}$; বা, $x=\frac{ab}{a+b}$,

এবং (1) হইতে (2)-কে বিয়োগ করিয়া $2y=\frac{2ab}{a+b}$; বা, $y=\frac{ab}{a+b}$.

এখন প্রশ্নানুসারে $y^2=2mx\left(\frac{ab}{a+b}, \frac{ab}{a+b}\right)$ বিন্দুগামী বলিয়া

$\left(\frac{ab}{a+b}\right)^2=2m\cdot\frac{ab}{a+b}$; বা $2m=\frac{ab}{a+b}$; বা, $m=\frac{ab}{2(a+b)}$.

$\therefore$ সমীকরণটির রূপ হয় $y^2=2\cdot\frac{ab}{2(a+b)}x=\frac{ab}{a+b}x$.

$\therefore$ উহার $\frac{1}{4}\times$ নাভিলম্ব $=\frac{1}{4}\cdot\frac{ab}{a+b}=\frac{ab}{4(a+b)}$.

$\therefore$ নাভির স্থানাঙ্ক $\left(\frac{ab}{4(a+b)}, 0\right)$.

উদা. 4. নিম্নলিখিত তথ্য হইতে সংশ্লিষ্ট অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর :

(i) মূলবিন্দুতে যাহার শীর্ষবিন্দু, $y=0$ যাহার অক্ষ এবং যাহা $(2, 4)$ বিন্দুগামী ;

(ii) মূলবিন্দুতে যাহার শীর্ষ এবং যাহার নাভি $(3, 0)$ বিন্দু ;

(iii) মূলবিন্দুতে শীর্ষ, $x=0$, যাহার অক্ষ, নাভিলম্ব $=1$ এবং যাহা ধনাত্মকমুখী।

(iv) নিয়ামকের সমীকরণ $x=4$ এবং মূলবিন্দুতে যাহার শীর্ষ ;

(i) মূলবিন্দুতে যাহার শীর্ষ এবং $y=0$ রেখাটি অক্ষ বলিয়া অধিবৃত্তটির সমীকরণটি, $y^2=4ax$ আকারের হইবে।

$\because$ উহা $(2, 4)$ বিন্দুগামী, $\therefore$ $4^2=4a.2$;

বা, $a=\dfrac{4^2}{4.2}=\dfrac{16}{8}=2.$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ, $y^2=4.2.x$; বা, $y^2=8x.$

(ii) নাভি $(3, 0)$ বিন্দু x-অক্ষের উপর এবং উহার শীর্ষ মূলবিন্দুতে অবস্থিত বলিয়া, x-অক্ষই অধিবৃত্তটির অক্ষ।

আবার এখানে $\frac{1}{4}$ নাভিলম্ব $=3$; $\therefore$ নাভিলম্ব $=12.$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ $y^2=12x.$

(iii) $x=0$, অর্থাৎ y-অক্ষই অধিবৃত্তটির অক্ষ, মূলবিন্দু উহার শীর্ষ এবং উহার অবতলতা y-অক্ষের ধনাত্মকমুখী।

$\therefore$ অধিবৃত্তটির সমীকরণ $x^2=4ay$ আকারের হইবে।

কিন্তু অধিবৃত্তটির নাভিলম্ব এখানে $=1.$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ, $x^2=y.$

(iv) নিয়ামকের আদর্শ সমীকরণ $x=-a.$

$\therefore$ এখানে $-a=4$; বা, $a=-4.$

আবার নিয়ামকের সমীকরণ $x=4$ বলিয়া অধিবৃত্তটির অক্ষ নিশ্চয় x-অক্ষ।

$\therefore$ অধিবৃত্তটির সমীকরণ, $y^2=4ax,$

বা, $y^2=4\times(-4)\times x=-16x.$

উদা. 5. $y^2=8(x-1)$ অধিবৃত্তের নাভিলম্ব, শীর্ষবিন্দু ও নাভির স্থানাঙ্ক এবং নিয়ামকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

নাভিলম্ব = সমীকরণের একঘাত চলরাশির সহগের সাংখ্যমান $=$ **8.**

$\frac{1}{4}$ নাভিলম্ব $=2=$ শীর্ষবিন্দু হইতে নিয়ামকের দূরত্ব $y=0$, অর্থাৎ x-অক্ষ অধিবৃত্তের অক্ষ। সমীকরণটিতে $x=1$ বসাইলে $y=0$ হয় বলিয়া $(1, 0)$. বিন্দুতে অক্ষটি অধিবৃত্তটিকে ছেদ করে।

$\therefore$ $(1, 0)$ বিন্দুই উহার শীর্ষবিন্দু।

$\therefore$ শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক **(1, 0).**

$\therefore$ নাভি শীর্ষবিন্দুর ডানদিকে এবং শীর্ষবিন্দু হইতে 2 একক দূরে বলিয়া উহার স্থানাঙ্ক $(1+2, 0)$ বা, **(3, 0).** আবার, অধিবৃত্তটির অবতলতা ধনাত্মক মুখী বলিয়া শীর্ষবিন্দু হইতে নিয়ামকের দূরত্ব ঋণাত্মক মুখে 2 একক অর্থাৎ -2 ; সুতরাং মূলবিন্দু হইতে নিয়ামকের দূরত্ব $=1-2=-1.$

$\therefore$ নিয়ামকের সমীকরণ হইবে $\mathbf{x=-1}$ বা $\mathbf{x+1=0.}$

উদা. 6. $y^2-4x-8y+4=0$ অধিবৃত্তের নাভিলম্ব, শীর্ষবিন্দু ও নাভির স্থানাঙ্ক এবং নিয়ামকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

এস্থলে, অধিবৃত্তের সমীকরণ $y^2-4x-8y+4=0$;

বা, $y^2-8y=4x-4$; বা, $y^2-8y+16=4x-4+16=4x+12$;

বা, $(y-4)^2=4(x+3).$ ... ... (1)

নাভিলম্ব = সমীকরণের একঘাত চলরাশির সহগের সাংখ্যমান = **4.**

$\therefore$ শীর্ষবিন্দু হইতে নাভির দূরত্ব $=\frac{1}{4}$ নাভিলম্ব $=1.$

$y-4=0$, বা, $y=4$ অধিবৃত্তের অক্ষ ; অধিবৃত্তের সমীকরণটিতে $y=4$ বসাইলে $x=-3$ হয়। সুতরাং অক্ষ ও অধিবৃত্তের ছেদবিন্দু $(-3, 4)$ এবং তাহাই শীর্ষবিন্দু।

$\therefore$ শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক **(−3, 4).**

এখন, সমীকরণটিকে (1)-এর আকারে লিখিলে দেখা যায়, একঘাত চলরাশির সহগ ধনাত্মক চিহ্নযুক্ত ; সুতরাং অধিবৃত্তটির অবতলতা ইহার অক্ষ $y=4$ সরল রেখার ধনাত্মক দিক্-মুখী ;

$\therefore$ নাভি অধিবৃত্তের অক্ষ $y=4$ সরল রেখার উপর শীর্ষবিন্দু A-এর ডানদিকে 1 একক দূরে অবস্থিত হইবে, এবং সেইজন্যই ইহার কোটি 4 হইবে এবং ভুজ হইবে $(-3+1)$ অর্থাৎ -2 ; সুতরাং, নাভির স্থানাঙ্ক হইল **(−2, 4).**

আবার, শীর্ষবিন্দু হইতে নিয়ামকের দূরত্ব ঋণাত্মক দিকে 1 একক অর্থাৎ $-1.$

অতএব, শীর্ষবিন্দুর ভুজ $=-3$ বলিয়া নিয়ামকের যে-কোন বিন্দুর ভুজ

$$=-3-1=-4.$$

$\therefore$ নিয়ামকের সমীকরণ $x=\mathbf{-4}$, বা, $\mathbf{x+4=0.}$

উদা. 7. x-অক্ষ ও শীর্ষবিন্দুকে যথাক্রমে অক্ষ ও মূলবিন্দু ধরিয়া $(-3, -6)$ বিন্দুগামী এবং x-অক্ষের ঋণাত্মক দিক্-মুখী অবতলতাবিশিষ্ট অধিবৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

অবতলতা x-অক্ষের ঋণাত্মকদিক্‌মুখী বলিয়া, নির্ণেয় সমীকরণটি হইবে, $y^2=-4ax$ আকারের। অধিবৃত্ত $(-3, -6)$ বিন্দুগামী বলিয়া,

$$(-6)^2=-4a(-3), \text{ বা, } a=3.$$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ $\mathbf{y^2=-12x.}$

উদা. 8. যে অধিবৃত্তের স্থানাঙ্ক (3, − 2) এবং যাহার নিয়ামক $2x-y+3=0$, সেই অধিবৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। [C. U., 1958]

অধিবৃত্তটির উপর অবস্থিত যে-কোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক যেন (x, y). এখন, নাভি হইতে অধিবৃত্তের উপর অবস্থিত কোন বিন্দুর দূরত্ব, নিয়ামক হইতে ঐ বিন্দুর দূরত্বের সমান বলিয়া,

$$\sqrt{(x-3)^2+(y+2)^2}=\frac{2x-y+3}{\sqrt{2+1^2}}=\frac{2x-y+3}{\sqrt{5}};$$

বা, $(x-3)^2+(y+2)^2=\dfrac{(2x-y+3)^2}{5}$;

বা, $5(x-3)^2+5(y+2)^2=(2x-y+3)^2$;

বা, $5x^2-30x+45+5y^2+20y+20$

$$=4x^2+y^2+9-4xy+12x-6y;$$

বা, $x^2+4y^2+4xy-42x+26y+56=0$;

বা, $\mathbf{(x+2y)^2=42x-26y-56}$; ইহাই নির্ণেয় সমীকরণ।

উদা. 9. $x-7y+12=0$ সরল রেখাটি যে বিন্দুদ্বয়ে $y^2=x$ অধিবৃত্তকে ছেদ করে উহাদের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

সমীকরণ-দুইটিকে সহ-সমীকরণরূপে সমাধান করিলে ছেদবিন্দুদ্বয়ের কোটি-নির্ণায়ক $y^2-7y+12=0$ দ্বিঘাত-সমীকরণটি পাওয়া যায়। ইহার দুইটি বীজ 4 এবং 3 বলিয়া ছেদবিন্দুদ্বয়ের কোটি 4 এবং 3.

কোটি 4 হইলে, $y^2=x$ হইতে, ভুজ হইবে 16,

এবং কোটি 3 হইলে, $y^2=x$ হইতে, ভুজ হইবে 9.

$\therefore$ ছেদবিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক **(16, 4)** এবং **(9, 3).**

উদা. 10. প্রমাণ কর যে, অধিবৃত্তের অক্ষের সমান্তরাল যে-কোন সরল রেখা অধিবৃত্তকে একটি মাত্র বিন্দুতে ছেদ করে।

মনে কর, অধিবৃত্তটির সমীকরণ $y^2=4ax$;

তাহা হইলে $y=0$, অর্থাৎ x-অক্ষ অধিবৃত্তটির অক্ষ ; সুতরাং, অধিবৃত্তের অক্ষের সমান্তরাল সরল রেখার সমীকরণ $y=c$, মনে করা যাইতে পারে।

$y^2=4ax$ এবং $y=c$-কে সহ-সমীকরণরূপে সমাধান করিলে, সরল রেখা এবং অধিবৃত্তের ছেদবিন্দুর ভুজ-নির্ণায়ক $c^2=4ax$ সমীকরণটি পাওয়া যায় ; ইহা হইতে x-এর একটিমাত্র মান $\dfrac{c^2}{4a}$ পাওয়া যায় এবং ইহাই ছেদবিন্দুর ভুজ, আর $y=c$ হইতে দেখা যায়, ছেদবিন্দুর কোটি $=c$. অতএব সরল রেখাটি অধিবৃত্তটিকে একটিমাত্র বিন্দুতে ছেদ করে ; এই বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\dfrac{c^2}{4a},\ c\right)$.

উদা 11. প্রমাণ কর যে অধিবৃত্তের নাভিলম্বের দ্বিগুণ যুগ্মকোটি উহার শীর্ষবিন্দুতে এক সমকোণ উৎপন্ন করে।

অধিবৃত্তটির সমীকরণ যদি $y^2 = 4ax$ হয়, তবে তাহার নাভিলম্ব $= 4a$. সুতরাং নাভিলম্বের দ্বিগুণ যুগ্মকোটির মান $= 8a$. যুগ্মকোটিমাত্রই নাভিলম্বের সমান্তরাল বলিয়া উহা অক্ষদ্বারা লম্বভাবে সমদ্বিখণ্ডিত হইবে এবং সেই কারণে ঐ যুগ্মকোটি ও অধিবৃত্তের ছেদবিন্দুদ্বয়ের কোটি হইবে $4a$ ও $-4a$.

অধিবৃত্তের সমীকরণে $y = \pm 4a$ বসাইলে,

$$(\pm 4a)^2 = 4ax, \text{ বা, } x = 4a \text{ হয়,}$$

$\therefore$ ছেদবিন্দু-দুইটি P_1 ও P_2 হইলে তাহাদের স্থানাঙ্ক $(4a, 4a)$ এবং $(4a, -4a)$.

এখন শীর্ষবিন্দুটি A হইলে, A-র স্থানাঙ্ক $(0, 0)$.

স্পষ্টতঃ, যুগ্মকোটি $\overline{P_1P_2}$ শীর্ষবিন্দুতে P_1AP_2 কোণ উৎপন্ন করিয়াছে।

এখন, $\overline{P_1A}$-এর প্রবণতা $= \dfrac{4a}{4a} = 1$;

এবং, $\overline{P_2A}$-এর প্রবণতা $= \dfrac{-4a}{4a} = -1$.

$\therefore$ $\overline{P_1A}$-এর প্রবণতা $\times$ P_2A-র প্রবণতা $= 1 \times (-1) = -1$.

$\therefore$ $\overline{P_1A}$ ও $\overline{P_2A}$ পরস্পরের উপর লম্ব।

$\therefore$ P_1AP_2 কোণ একটি সমকোণ।

অতএব, নাভিলম্বের দ্বিগুণ যুগ্মকোটি সর্বদা অধিবৃত্তের শীর্ষে এক সমকোণ উৎপন্ন করে।

প্রশ্নমালা 16

1. নিম্নলিখিত সমীকরণ-নির্দিষ্ট অধিবৃত্তগুলির নাভিলম্ব, নাভির স্থানাঙ্ক এবং নিয়ামকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

(i) $y^2 = 8x$; (ii) $y^2 = -12x$; (iii) $x^2 = 20y$;
(iv) $x^2 = -16y$; (v) $x^2 = -10y$; (vi) $5y^2 = 7x$.

[C. U. 1936]

উপরি-উক্ত প্রতিটি অধিবৃত্তের ক্ষেত্রে $(2, 4)$ বিন্দুটির অবস্থান নির্ণয় কর।

2. যে অধিবৃত্তের শীর্ষবিন্দু মূলবিন্দু এবং

(i) যাহার অক্ষ x-অক্ষ, নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য 2 এবং অবতলতা x-অক্ষের ধনাত্মক দিক্-মুখী; (ii) যাহার অক্ষ y-অক্ষ, নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য $\frac{4}{5}$ এবং অবতলতা y-অক্ষের ঋণাত্মক দিক্-মুখী; সেই অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

3. যে অধিবৃত্তের শীর্ষবিন্দু মূলবিন্দু এবং নাভির স্থানাঙ্ক

(i) $(4, 0)$; (ii) $(-2, 0)$; (iii) $(0, \frac{3}{4})$; (iv) $(0, -5)$,

তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর। প্রত্যেক ক্ষেত্রেই নিয়ামকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

4. একটি অধিবৃত্তের নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য 16, ইহার সমীকরণ নির্ণয় কর যখন ইহার অক্ষ ও নিয়ামক যথাক্রমে x-অক্ষ ও y-অক্ষ এবং অবতলতা

(i) x-অক্ষের ধনাত্মক দিক্-মুখী ;

(ii) x-অক্ষের ঋণাত্মক দিক্-মুখী।

5. একটি অধিবৃত্তের নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য 10 ; মূলবিন্দু ইহার নাভি, x-অক্ষ ইহার অক্ষ এবং ইহার অবতলতা

(i) x-অক্ষের ধনাত্মক দিক্-মুখী, (ii) x-অক্ষের ঋণাত্মক দিক্-মুখী,

হইলে ইহার সমীকরণ নির্ণয় কর। প্রত্যেক ক্ষেত্রে নিয়ামকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

6. একটি অধিবৃত্তের নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য 6 ; মূলবিন্দু ইহার নাভি এবং y-অক্ষ ইহার অক্ষ এবং ইহার অবতলতা

(i) y-অক্ষের ধনাত্মক দিক্-মুখী, (ii) y-অক্ষের ঋণাত্মক দিক্-মুখী,

হইলে, ইহার সমীকরণ নির্ণয় কর। প্রত্যেক ক্ষেত্রে নিয়ামকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

7. একটি অধিবৃত্তের অবতলতা y-অক্ষের ধনাত্মক দিক্-মুখী। ইহার নাভি $(0, 3)$ বিন্দু এবং নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য 12. ইহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

[C. U., 1950, Special]

8. $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্ত $(3, -2)$ বিন্দুগামী হইলে, ইহার নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য এবং নাভির স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [C. U., 1934]

9. $y^2 = 20x$ অধিবৃত্তটির নাভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর এবং নাভিলম্বের প্রান্তবিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

10. অধিবৃত্তের অক্ষ এবং শীর্ষবিন্দু যথাক্রমে x-অক্ষ ও মূলবিন্দু ধরিয়া অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর, যখন

(i) অধিবৃত্তটি $(4, 8)$ বিন্দুগামী এবং ইহার অবতলতা x-অক্ষের ধনাত্মক দিক্-মুখী ;

(ii) অধিবৃত্তটি $(-\frac{9}{4}, 6)$ বিন্দুগামী এবং ইহার অবতলতা x-অক্ষের ঋণাত্মক দিক্-মুখী।

প্রত্যেক ক্ষেত্রে নাভির স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

11. অধিবৃত্তের অক্ষ এবং শীর্ষবিন্দুকে যথাক্রমে y-অক্ষ এবং মূলবিন্দু ধরিয়া অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর, যখন

(i) অধিবৃত্তটি $(12, 9)$ বিন্দুগামী এবং ইহার অবতলতা y-অক্ষের ধনাত্মক দিক্-মুখী ;

(ii) অধিবৃত্তটি (5, -5) বিন্দুগামী এবং ইহার অবতলতা y-অক্ষের ঋণাত্মক দিক্-মুখী।

প্রত্যেক ক্ষেত্রে ইহার নাভির স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

12. নিম্নলিখিত সমীকরণ-নির্দিষ্ট অধিবৃত্তসমূহের প্রত্যেকটির নাভিলম্ব, নাভির স্থানাঙ্ক এবং নিয়ামকের সমীকরণ নির্ণয় কর:

(i) $y^2 = 4(x-3)$; (ii) $y^2 + 8(x+1) = 0$;

(ii) $y^2 = 2x + 3$; (iv) $y^2 + 4x - 6 = 0$;

(v) $2x^2 - 2y + 3 = 0$; (vi) $4x^2 + 12y - 15 = 0$;

(vii) $y^2 - 4x - 4y + 16 = 0$; (viii) $y^2 + 8x + 6y + 25 = 0$.

13. $(y+3)^2 = 2(x+2)$ অধিবৃত্তটির শীর্ষবিন্দু, নাভির স্থানাঙ্ক এবং নিয়ামকের সমীকরণ নির্ণয় কর। [U. P., 1946]

14. (*a*) $y^2 = 4y - 4x$;

(*b*) $y = ax^2 + bx + c$. [C. U. B. A. & B. Sc., 1912]

অধিবৃত্তের শীর্ষবিন্দু, নাভি এবং নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

15. কোন অধিবৃত্তের নাভির স্থানাঙ্ক $(-1, 1)$ এবং নিয়ামকের সমীকরণ $x + y + 1 = 0$. অধিবৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

[C. U. B. A. & B. Sc., 1932]

16. কোন অধিবৃত্তের নাভির স্থানাঙ্ক $(-2, 3)$ এবং নিয়ামকের সমীকরণ $x - 2y + 3 = 0$. অধিবৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

17. $y^2 = 2ax$ অধিবৃত্তটি $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$ এবং $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$ সরল রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী। ইহার নাভির স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [C. U., 1943]

18. নিম্নলিখিত অধিবৃত্ত এবং সরল রেখার ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর:

(i) $y^2 = 2x$ অধিবৃত্ত এবং $y = x - 4$ সরল রেখার;

(ii) $y^2 = x$ অধিবৃত্ত এবং $x - 5y + 6 = 0$ সরল রেখার;

[C. U., 1944]

(iii) $3x^2 = -4y$ অধিবৃত্ত এবং $3x - 2y = 12$ সরল রেখার;

(iv) $5y^2 = 12x$ অধিবৃত্ত এবং $5y + 9x - 5 = 0$ সরল রেখার।

19. $3y^2 = 4x$ অধিবৃত্তটি নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য এবং নাভির স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর এবং যে বিন্দুদ্বয়ে ইহা $2x = 3y$ সরল রেখাকে ছেদ করে, উহাদের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

[C. U., 1935]

20. একটি অধিবৃত্তের শীর্ষবিন্দু ও নাভির স্থানাঙ্ক যথাক্রমে যদি $(a, 0)$ ও $(b, 0)$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, অধিবৃত্তটির সমীকরণ $y^2 = 4(b-a)(x-a)$.

[সংকেত : এখানে শীর্ষবিন্দু হইতে নাভির দূরত্ব $=(b-a)=\frac{1}{4}$ নাভিলম্ব। $(y-k)^2=4a(x-h)$ সমীকরণে $h=a$, $k=0$ এবং a-এর স্থলে $(b-a)$ বসাইয়া সমাধান কর।]

4·11. উপবৃত্ত (Ellipse) :

পূর্বেই বলা হইয়াছে যে, কনিকের উৎকেন্দ্রতা (e), এক (1) অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইলে, কনিককে **উপবৃত্ত** (Ellipse) বলা হয়, অর্থাৎ,

কোন সমতলের উপর অবস্থিত একটি স্থিরনির্দিষ্ট বিন্দু এবং একটি স্থিরনির্দিষ্ট সরল রেখা হইতে ঐ সমতলের উপর গতিশীল কোন বিন্দুর দূরত্বদ্বয়ের অনুপাত ধ্রুবক কিন্তু এক অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইলে, গতিশীল বিন্দুটির সঞ্চারপথকে **উপবৃত্ত** (Ellipse) বলে।

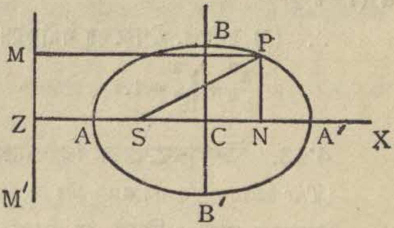
নির্দিষ্ট বিন্দুটিকে ঐ উপবৃত্তের **নাভি** (Focus), নির্দিষ্ট সরল রেখাকে উহার **নিয়ামক** (Directrix) এবং দূরত্বদ্বয়ের ধ্রুবক অনুপাতকে ঐ উপবৃত্তের **উৎকেন্দ্রতা** (Eccentricity) বলা হয়। সাধারণতঃ নাভিকে S অক্ষর দ্বারা এবং উৎকেন্দ্রতাকে e অক্ষর দ্বারা সূচিত করা হয়।

নাভিবিন্দুগামী এবং নিয়ামকের লম্ব সরল রেখাকে উপবৃত্তের **মুল অক্ষ** বা **পরাক্ষ** (Major axis) এবং এই অক্ষের সহিত উপবৃত্তের ছেদবিন্দু-দুইটিকে ঐ উপবৃত্তের **শীর্ষবিন্দু** (Vertex) বলে। শীর্ষবিন্দু-দুইটি দ্বারা সীমাবদ্ধ অক্ষাংশের অক্ষের মধ্য-বিন্দুকে বলে উপবৃত্তের **কেন্দ্র**। কেন্দ্রবিন্দু দিয়া অঙ্কিত এবং উপবৃত্ত দ্বারা সীমাবদ্ধ লম্বের খণ্ডাংশকে বলে **উপাক্ষ** (Minor axis)।

নাভিবিন্দুগামী এবং অক্ষের লম্ব-জ্যা-কে উপবৃত্তের **নাভিলম্ব** (Latus rectum) বলে।

4·12. উপবৃত্তের সমীকরণ (Equation of an ellipse).

S উপবৃত্তটির নাভি এবং $\overleftrightarrow{MM'}$ উহার নিয়ামক। S হইতে নিয়ামকের উপর $\overline{SZ}$ লম্ব টানিয়া, S-এর দিকে বর্ধিত করা হইল ; ইহাই হইল অক্ষ।



$\overline{SZ}$-এর উপর এরূপ একটি বিন্দু A নির্ণয় করা যায়, অর্থাৎ $\overline{SZ}$-কে এরূপে অন্তর্বিভক্ত করা যায় যে,

$$SA=e.AZ \quad \cdots \quad (1)$$

আবার, $e<1$ বলিয়া, বর্ধিত $\overrightarrow{ZS}$-এর উপর এরূপ একটি বিন্দু A′ থাকিবে যে, $SA'=e.A'Z \quad \cdots \quad (2)$

ধরা যাক্, $AA' = 2a$, এবং AA'-এর মধ্যবিন্দু C.

সংজ্ঞানুসারে, A ও A′ উভয়ই উপবৃত্তের শীর্ষবিন্দু এবং C উপবৃত্তের কেন্দ্র (centre).

(1) এবং (2) হইতে, যোগ করিয়া, $2a = e(AZ + A'Z) = 2e.CZ$;

$$\therefore \quad CZ = \frac{a}{e} \quad \cdots \quad \cdots \quad (3)$$

(2) হইতে (1) বিয়োগ করিয়া, $SA' - SA = e(A'Z - AZ)$,

বা, $(CS + CA') - (CA - CS) = e.AA'$,

বা, $2CS = e.2a$, বা, $CS = ae$. $\quad \cdots \quad \cdots \quad (4)$

এখন, কেন্দ্র C-কে মূলবিন্দু, CA'-কে x-অক্ষ এবং C বিন্দু দিয়া অঙ্কিত AA'-এর লম্ব-রেখাকে y-অক্ষ ধরিলে, উপবৃত্তের উপর অবস্থিত যে-কোন বিন্দু P-এর স্থানাঙ্ক যেন (x, y) হয়। P বিন্দু হইতে নিয়ামকের উপর $\overline{PM}$ লম্ব এবং AA' এর উপর $\overline{PN}$ লম্ব টানা হইল।

∵ $CS = ae$ বলিয়া, নাভি S-এর স্থানাঙ্ক $(-ae, 0)$.

এখন, $SP^2 = (e.PM)^2 = (e.ZN)^2 = e^2 ZN^2 = e^2(CN + ZC)^2$;

$$\therefore \quad (x + ae)^2 + y^2 = e^2\left(x + \frac{a}{e}\right)^2,$$

বা, $x^2(1 - e^2) + y^2 = a^2(1 - e^2)$,

বা, উভয় পক্ষকে $a^2(1 - e^2)$ দ্বারা ভাগ করিয়া,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1 - e^2)} = 1. \quad \cdots\cdot \quad \cdots\cdot \quad (5)$$

ইহাই উপবৃত্তের সমীকরণ ; এই সমীকরণে $x = 0$ বসাইয়া দেখা যায়, উপবৃত্তটি y-অক্ষকে দুইটি বিন্দুতে ছেদ করে এবং তাহাদের কোটি $\pm a\sqrt{1 - e^2}$. অতএব, এই ছেদবিন্দু-দুইটি y-অক্ষের উপর মূলবিন্দু C-এর বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত হইবে এবং C হইতে সমদূরবর্তী হইবে। এই দুইটি বিন্দুকে B ও B′ দ্বারা সূচিত করিলে, $CB = B'C = a\sqrt{1 - e^2} = b$ ধরা হয়। তাহা হইলে, $BB' = 2b$ এবং $b = a\sqrt{1 - e^2}$, বা $b^2 = a^2(1 - e^2) \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (6)$

∴ (5) হইতে, উপবৃত্তের সমীকরণ হইলে

$$\mathbf{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.}$$

4·13. উপবৃত্তের দ্বিতীয় নাভি ও দ্বিতীয় নিয়ামক।

[*The second focus and the second directrix of an ellipse.*]

উপবৃত্তের কেন্দ্র C বিন্দুর যে পার্শ্বে নাভি S বিন্দু অবস্থিত, তাহার বিপরীত পার্শ্বে (4·14 অনুচ্ছেদের চিত্র দ্রষ্টব্য) পরাক্ষের উপর S′ যেন এমন একটি বিন্দু যে

CS = CS′ হয় এবং বর্ধিত $\overrightarrow{ZA'}$-এর উপর Z′ যেন এমন আরেকটি বিন্দু যে CZ = CZ′ হয় এবং $\overline{Z'M'}$ সরল রেখা যেন $\overline{ZZ'}$-এর উপর লম্ব। বর্ধিত $\overrightarrow{MP}$ রেখা $\overline{Z'M'}$-এর উপর M বিন্দুতে লম্ব হইল।

এখন CS′ = CS = ae ; ∴ S′-এর স্থানাঙ্ক $(ae, 0)$; এবং CZ′ = CZ = $\frac{a}{e}$.

আবার, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2(1-e^2)}=1$ হইতে

$$(1-e^2)x^2+y^2=a^2(1-e^2),$$

বা, $x^2+a^2e^2+y^2=e^2x^2+a^2,$

বা, $(x-ae)^2+y^2=e^2x^2-2aex+a^2$

$$=e^2\left(x^2-\frac{2a}{e}x+\frac{a^2}{e^2}\right)=e^2\left(\frac{a}{e}-x\right)^2.$$

কিন্তু, $x-ae=$ NS′, $y=$ PN

এবং $\frac{a}{b}-x=$ CZ′ − CN = NZ′ = PM′.

অধিকন্তু, PN² + NS′² = S′P² ;

বা, $(x-ae)^2+y^2=$ SP².

∴ S′P² = e^2PM′² ;

বা, S′P − e.PM′ ;

বা, $\frac{S'P}{PM'}=e.$

অতএব, দেখা গেল, S′ বিন্দু হইতে উপবৃত্তের উপর অবস্থিত যে-কোন বিন্দু P-এর দূরত্ব এবং Z′M′ রেখা হইতে ঐ P বিন্দুর দূরত্বের অনুপাত, উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রতা e-এর সমান। সুতরাং, S′ বিন্দুকে নাভি এবং $\overline{Z'M'}$ রেখাকে নিয়ামক ধরিলেও একই উপবৃত্ত পাওয়া যাইবে; অর্থাৎ উপবৃত্তের একটি দ্বিতীয় নাভি এবং দ্বিতীয় নিয়ামক থাকে।

অনুসিদ্ধান্ত 1. শীর্ষবিন্দু A-এর স্থানাঙ্ক **(− a, 0)**, A′-এর স্থানাঙ্ক**(a, 0)** ; নাভি S-এর স্থানাঙ্ক **(− ae, 0)** এবং নাভি S′-এর স্থানাঙ্ক **(ae, 0).**

অনুসিদ্ধান্ত 2. AA′-কে উপবৃত্তের **পরাক্ষ** (Major Axis) এবং BB′-কে উহার **উপাক্ষ** (Minor Axis) বলা হয় বলিয়া

স্পষ্টই, পরাক্ষের দৈর্ঘ্য = 2a এবং **উপাক্ষের দৈর্ঘ্য = 2b.**

অনুসিদ্ধান্ত 3. $b^2=a^2(1-e^2)$, স্বীকৃত বলিয়া

$a^2e^2=a^2-b^2$; ∴ $e=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}$, অর্থাৎ, $\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}.$

অনুসিদ্ধান্ত 4. নিয়ামকের সমীকরণ: $x = -\frac{a}{e}$, বা, $x + \frac{a}{e} = 0$.

নাভিলম্বের সমীকরণ: $x = -ae$, বা $x + ae = 0$.

অনুসিদ্ধান্ত 5. (3) হইতে, $CA = a = e\,CZ$;

(4) হইতে, $CS = e.a = e.CA$;

(3) ও (4) গুণ করিয়া, $CS.CZ = a^2 = CA^2$ (উভয় পক্ষ হইতে সাধারণ গুণনীয়ক e অপসারিত করিয়া)।

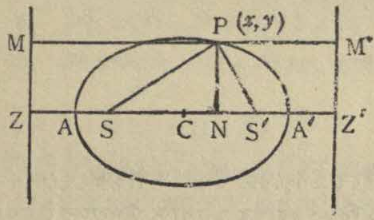
অনুসিদ্ধান্ত 6. উপবৃত্তের সমীকরণ হইতে দেখা যায়,

$$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} = \frac{a^2 - x^2}{a^2} = \frac{(a+x)(a-x)}{a^2},$$

বা,
$$\frac{PN^2}{BC^2} = \frac{(AC + CN)(CA' - CN)}{AC^2} = \frac{AN.NA'}{AC^2};$$

$$\therefore \quad \frac{PN^2}{AN.NA'} = \frac{BC^2}{AC^2}.$$

4·14. নাভিদ্বয় হইতে উপবৃত্তের উপর অবস্থিত যে-কোন বিন্দুর দূরত্বদ্বয়ের সমষ্টি পরাক্ষের সমান।



[The sum of the focal distances of any point on an ellipse is equal to the major axis.]

উপবৃত্তের উপর অবস্থিত যে-কোন বিন্দু P. ইহার স্থানাঙ্ক (x, y).

$$SP = e.PM, \text{ এবং } S'P = e.PM';$$

$$\therefore \quad SP + S'P = e(PM + PM') = e.MM' = e.\,ZZ'$$

$$= e.2CZ = e.2\frac{a}{e} = 2a = \text{পরাক্ষ}।$$

বিশেষ দ্রষ্টব্য। নাভি হইতে উপবৃত্তের উপর অবস্থিত যে-কোন বিন্দুর দূরত্ব।

$$SP = e.PM = e.NZ = e(CZ + CN)$$

$$= e\left(\frac{a}{e} + x\right) = a + ex;$$

$$S'P = e.PM' = e.NZ' = e(CZ' - CN)$$

$$= e\left(\frac{a}{e} - x\right) = a - ex.$$

অনুসিদ্ধান্ত। উপাক্ষের অন্তবিন্দু B-এর স্থানাঙ্ক $(0, b)$ বলিয়া,

$$SB = a + e.0 = a\ ;\ S'B = a - e.0 = a\ ;$$

এবং $$SB + S'B = a + a = 2a.$$

4·15. উপবৃত্তের নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য।

নাভিগামী এবং পরাক্ষের লম্ব $\overline{LSL'}$ জ্যা উপবৃত্তের নাভিলম্ব।

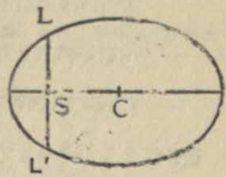
এখন L বিন্দুর ভুজের মান CS $= -ae.$

$\therefore$ SL = নাভি S হইতে L-এর দূরত্ব

$$= a + e(-ae) = a - ae^2$$

$$= a(1 - e^2) = a.\frac{b^2}{a^2}. \quad [\because\ b^2 = a^2(1 - e^2)]$$

$$= \frac{b^2}{a};$$



L′ বিন্দুর ভুজের মানও $-ae$ বলিয়া, $SL' = \dfrac{b^2}{a}$ হইবে; উপবৃত্তটি পরাক্ষে প্রতিসম বলিয়াও বলা চলে যে, $SL = SL' = \dfrac{b^2}{a}.$

$\therefore$ নাভিলম্বের মান $LL' = SL + SL' = 2SL = \dfrac{2b^2}{a}.$

দ্রষ্টব্য 1. উপবৃত্ত $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ সম্বন্ধীয় পূর্বে প্রাপ্ত এবং অতি প্রয়োজনীয় বিভিন্ন ফলসমূহ নিয়ে একসঙ্গে লিপিবদ্ধ করা হইল। ইহাদিগকে মনে রাখিতে হইবে।

(i) পরাক্ষ $AA' = 2a$; (ii) উপাক্ষ $BB' = 2b$;

(iii) $CA = CA' = a$; (iv) $CB = CB' = b$;

(v) $CS = CS' = ae$; (vi) $CZ = CZ' = \dfrac{a}{e}$;

(vii) S নাভিগামী নাভিলম্ব LSL' = S′ নাভিগামী নাভিলম্ব $= \dfrac{2b^2}{a^2}$;

(viii) উপবৃত্তের উপর অবস্থিত কোন বিন্দু $P(x, y)$ হইলে, $SP = a + ex$, $S'P = a - ex$;

(ix) $SP + S'P = 2a$;

(x) $SB = S'B = a \quad (\because\ SB + S'B = 2a)$;

(xi) A ও A′ শীর্ষবিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(-a, 0), (a, 0)$;

Z ও Z′ বিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $\left(-\frac{a}{e}, 0\right), \left(\frac{a}{e}, 0\right)$;

S ও S′ নাভিদ্বয়ের স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(-ae, 0), (ae, 0)$;

B ও B′ উপাক্ষের অন্তর্বিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(0, b), (0, -b)$;

(xii) $b^2 = a^2(1-e^2)$; $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$;

(xiii) পরাক্ষের সমীকরণ : $y = 0$;
উপাক্ষের সমীকরণ : $x = 0$;
নিয়ামকদ্বয়ের সমীকরণ : $x = -\frac{a}{e}, x = \frac{a}{e}$;
নাভিলম্বদ্বয়ের সমীকরণ : $x = -ae, x = ae.$

দ্রষ্টব্য 2. $b^2 = a^2(1-e^2)$ এবং $0 < e < 1$; অতএব, $b^2 < a^2$, বা, $b < a$, অর্থাৎ **উপাক্ষার্ধ < পরাক্ষার্ধ** ; আর,

মনে রাখিতে হইবে : (i) নাভিদ্বয় পরাক্ষের উপর অবস্থিত ;

(ii) নিয়ামকদ্বয় উপাক্ষের সমান্তরাল ; এবং

লক্ষ্য করিতে হইবে, পরাক্ষ x-অক্ষ বরাবর না হইয়া, y-অক্ষ বরাবর, কিন্তু মূলবিন্দু পূর্ববৎ কেন্দ্রে অবস্থিত এবং পরাক্ষার্ধ ও উপাক্ষার্ধ যথাক্রমে পূর্ববৎ a ও b হইলে, উপবৃত্তটির সমীকরণ হইবে

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1.$$

তখন, নাভিদ্বয়ের স্থানাঙ্ক হইবে $(0, ae)$ এবং $(0, -ae)$, এবং নিয়ামকদ্বয়ের সমীকরণ হইবে $y = \pm \frac{a}{e}$.

উদা. 1. (i) $3x^2 + 4y^2 = 48$; [C. U., 1941, Gauhati, 1949]
(ii) $25x^2 + 16y^2 = 400$;

উপবৃত্তের অক্ষদ্বয়ের দৈর্ঘ্য, নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য, উৎকেন্দ্রতা, নাভিদ্বয়ের স্থানাঙ্ক এবং নিয়ামকদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর।

(i) উভয় পক্ষকে 48 দ্বারা ভাগ করিলে, সমীকরণটি হয়. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$, সমীকরণটির আকার হইতে সিদ্ধান্ত করা যায়, এস্থলে, মূলবিন্দুটি উপবৃত্তটির কেন্দ্রে অবস্থিত এবং $16 > 12$ বলিয়া $a^2 = 16, b^2 = 12$ ধরিতে হইবে ; কাজেই উপবৃত্তটির পরাক্ষ ও উপাক্ষ যথাক্রমে x-অক্ষ ও y-অক্ষ বরাবর।

$\therefore$ পরাক্ষ $= 2a = 2\sqrt{16} = 2.4 = \mathbf{8}$;
উপাক্ষ $= 2b = 2\sqrt{12} = 2.2\sqrt{3} = \mathbf{4\sqrt{3}}$;
নাভিলম্ব $= \frac{2b^2}{a} = \frac{2.12}{4} = \mathbf{6}$;
উৎকেন্দ্রতা $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \frac{12}{16}} = \sqrt{\frac{4}{16}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \mathbf{\frac{1}{2}}$;
নাভিদ্বয়ের স্থানাঙ্ক : $(-ae, 0)$ এবং $(ae, 0)$,
অর্থাৎ, $(-4.\frac{1}{2}, 0), (4.\frac{1}{2}, 0)$, অর্থাৎ, $\mathbf{(-2, 0), (2, 0)}$;
নিয়ামকদ্বয়ের সমীকরণ : $x = -\frac{a}{e} = \frac{4}{\frac{1}{2}} = -8$, অর্থাৎ, $\mathbf{x + 8 = 0}$,
এবং $x = \frac{a}{e} = 8$, অর্থাৎ, $\mathbf{x - 8 = 0}$.

(ii) উভয় পক্ষকে 400 দ্বারা ভাগ করিয়া, $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$.

সমীকরণটির আকার হইতে সিদ্ধান্ত করা যায়,
(1) মূলবিন্দু উপবৃত্তটির কেন্দ্রে অবস্থিত ;
(2) $25 > 16$ বলিয়া $a^2 = 25$ এবং $b^2 = 16$ ধরিতে হইবে ;
ফলে (3) উপবৃত্তটির পরাক্ষ y-অক্ষ বরাবর এবং উপাক্ষ x-অক্ষ বরাবর এইরূপ সিদ্ধান্ত করিতে হইবে।

$\therefore$ পরাক্ষ $= 2a - 2\sqrt{25} = 2.5 = \mathbf{10}$;
উপাক্ষ $= 2b = 2\sqrt{16} = 2.4 = \mathbf{8}$;
নাভিলম্ব $= \frac{2b^2}{a} = \frac{2.16}{5} = \frac{32}{5} = \mathbf{6\frac{2}{5}}$;
উৎকেন্দ্রতা $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \mathbf{\frac{3}{5}}$;
নাভিদ্বয় y-অক্ষের উপর অবস্থিত বলিয়া, উহাদের স্থানাঙ্ক :
$(0, ae), (0, -ae)$, অর্থাৎ
$(0, 5.\frac{3}{5}), (0, -5.\frac{3}{5})$, অর্থাৎ $\mathbf{(0, 3)}$ এবং $\mathbf{(0, -3)}$;
নিয়ামকদ্বয় x-অক্ষের সমান্তরাল বলিয়া, উহাদের সমীকরণ

$$\mathbf{y} = \frac{a}{e} = \frac{5}{3/5} = \mathbf{\frac{25}{3}}, \text{ এবং } \mathbf{y = -\frac{a}{e} = -\frac{25}{3}}.$$

উদা. 2. $(-3, 1)$ এবং $(2, -2)$ বিন্দুদ্বয়গামী যে উপবৃত্তের অক্ষদ্বয় x-অক্ষ এবং y-অক্ষের খণ্ডাংশ, তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর। ইহার নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য, উৎকেন্দ্রতা এবং নাভিদ্বয়ের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [C. U., 1945]

উপবৃত্তটির সমীকরণ যেন, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$

উপবৃত্তটি $(-3, 1)$ এবং $(2, -2)$ বিন্দুগামী বলিয়া,

$$\left.\begin{aligned} &\frac{9}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1,\\ \text{এবং}\quad &\frac{4}{a^2}+\frac{4}{b^2}=1. \end{aligned}\right\}$$

সমীকরণদ্বয় সমাধান করিয়া, $a^2=\frac{32}{3}$ এবং $b^2=\frac{32}{5}$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ $\frac{x^2}{32/3}+\frac{y^2}{32/5}=1,$

বা, $\frac{3x^2}{32}+\frac{5y^2}{32}=1,$ বা, $\mathbf{3x^2+5y^2=32.}$

নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য $=\frac{2b^2}{a}=\frac{2.32}{5\cdot\sqrt{\frac{32}{3}}}=\frac{2}{5}\cdot\sqrt{3}.\sqrt{32}=\frac{8\sqrt{6}}{5}.$

উৎকেন্দ্রতা $e=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{1-\frac{32/5}{32/3}}=\sqrt{1-\frac{3}{5}}=\sqrt{\frac{2}{5}}.$

নাভির স্থানাঙ্ক : $(\pm ae, 0)$, অর্থাৎ, $(\pm\sqrt{\frac{32}{3}}.\sqrt{\frac{2}{5}}, 0)$,

অর্থাৎ, $\left(\pm\frac{8\sqrt{15}}{15}, 0\right).$

উদা. 3. $(\frac{10}{3}, \sqrt{5})$ বিন্দুগামী যে উপবৃত্তের অক্ষদ্বয় x-অক্ষ ও y-অক্ষের উপর অবস্থিত এবং যাহার উৎকেন্দ্রতা $\frac{4}{5}$, সেই উপবৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

[C. U. 1942]

উপবৃত্তটির সমীকরণ যেন $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$ ... (1)

উপবৃত্তটি $(\frac{10}{3}, \sqrt{5})$ বিন্দুগামী বলিয়া, $\frac{100}{9a^2}+\frac{5}{b^2}=1.$ ... (2)

আবার, $b^2=a^2(1-e^2)=a^2(1-\frac{16}{25})=\frac{9}{25}a^2.$ ... (3)

(2) এবং (3) সমাধান করিয়া, $a^2=25, b^2=9.$

$\therefore$ a^2 এবং b^2-এর মান (1)-এ বসাইয়া উপবৃত্তের সমীকরণ হইল

$$\frac{\mathbf{x}^2}{25}+\frac{\mathbf{y}^2}{9}=1.$$

উদা. 4. যে উপবৃত্তের অক্ষদ্বয় x- ও y-অক্ষের উপর অবস্থিত এবং যাহার উৎকেন্দ্রতা $\frac{1}{\sqrt{5}}$ এবং নাভিলম্ব 8, সেই উপবৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

উপবৃত্তটির সমীকরণ যেন $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$ ... (1)

প্রদত্ত শর্তানুসারে,

$$\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}, \text{ বা, } b^2=\frac{4}{5}a^2 ; \qquad \cdots (2)$$

এবং $\frac{2b^2}{a}=8$, বা, $b^2=4a.$ ... (3)

(2) এবং (3) হইতে, $\frac{4}{5}a^2=4a$, বা, $a^2-5a=0$, বা, $a(a-5)=0$;

কিন্তু $a \neq 0$; $\therefore$ $a=5$ এবং $b^2=4a=20$;

$\therefore$ (1) হইতে, $\mathbf{\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{20}=1.}$

উদা. 5. যে উপবৃত্তের অক্ষদ্বয় x-এবং y-অক্ষের উপর অবস্থিত, যাহার উৎকেন্দ্রতা $\frac{1}{2}$, এবং নাভিদ্বয়ের স্থানাঙ্ক $(\pm 2, 0)$, সেই উপবৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

উপবৃত্তটির সমীকরণ যেন $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$ .... (1)

এস্থলে, নাভির স্থানাঙ্ক $(\pm ae, 0)$, এবং $b^2=a^2(1-e^2)$;

$\therefore$ প্রদত্ত শর্তানুসারে, $ae=2$, অর্থাৎ, $\frac{1}{2}a=2$, বা, $a=4$;
এবং $b^2=16(1-\frac{1}{4})=16\times\frac{3}{4}=12.$

$\therefore$ (1) হইতে, নির্ণেয় সমীকরণ $\mathbf{\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1.}$

উদা. 6. যে উপবৃত্তের অক্ষদ্বয় x-এবং y-অক্ষের উপর অবস্থিত, যাহার নাভিলম্ব 16 এবং উপাক্ষ নাভিদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্বের সমান, সেই উপবৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

ধরা যাক, উপবৃত্তটির সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ .... (1)

প্রদত্ত শর্তানুসারে, $\frac{2b^2}{a}=16$, বা, $b^2=8a$ .... (2)

এবং $2ae=2b$, বা, $a^2e^2=b^2=a^2(1-e^2)=a^2-a^2e^2$,
বা, $2a^2e^2=a^2$; কিন্তু $a^2\neq 0$; $\therefore$ $2e^2=1.$
বা, $e^2=\frac{1}{2}$; $\therefore$ $e=\frac{1}{\sqrt{2}}.$

(2) হইতে, $8a = b^2 = a^2(1-e^2) = a^2(1-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}a^2$,

বা, $a(8-\frac{1}{2}a)=0$; কিন্তু $a \neq 0$; $\therefore$ $\frac{1}{2}a = 8$, বা, $a = 16$. ··· (3)

$\therefore$ (2) হইতে, $b^2 = 8a = 8.16 = 128$. ··· (4)

(1)-এ (3) এবং (4) হইতে a^2 ও b^2-এর মান বসাইয়া,

নির্ণেয় সমীকরণ $\frac{x^2}{256} + \frac{y^2}{128} = 1$,

বা, $\mathbf{x^2 + 2y^2 = 256}$.

উদা. 7. p-এর মান কত হইলে, $px^2 + 4y^2 = 1$ উপবৃত্তটি $(\pm 1, 0)$ বিন্দুদ্বয়গামী হইবে ? উপবৃত্তটির অক্ষদ্বয়ের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। [C. U., 1935]

উপবৃত্তটি $(\pm 1, 0)$ বিন্দুদ্বয়গামী বলিয়া,

$p.(1)^2 + 4.0 = 1$ এবং $p.(-1)^2 + 4.0 = 1$;

উভয় সমীকরণ হইতেই, $\mathbf{p = 1}$.

অতএব, সমীকরণটি হইল $x^2 + 4y^2 = \mathbf{1}$,

বা, $\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{\frac{1}{4}} = 1$.

$\therefore$ $a = 1$ এবং $b = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$.

$\therefore$ পরাক্ষ $= 2a = \mathbf{2}$, এবং উপাক্ষ $= 2b = 2.\frac{1}{2} = \mathbf{1}$.

উদা. 8. যে উপবৃত্তটির নাভি $(2, -1)$, নিয়ামক $x + 2y + 3 = 0$ এবং উৎকেন্দ্রতা $\frac{5}{6}$, সেই উপবৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

উপবৃত্তটির উপর অবস্থিত যে-কোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক যেন (x, y).

এখন, নাভি হইতে বিন্দুটির দূরত্ব $= e \times$ নিয়ামক হইতে বিন্দুটির দূরত্ব,

বা, $\sqrt{(x-2)^2 + (y+1)^2} = \frac{5}{6} \cdot \frac{x+2y+3}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{5}{6} \cdot \frac{x+2y+3}{\sqrt{5}}$;

বা, উভয় পক্ষ বর্গ করিয়া, $(x-2)^2 + (y+1)^2 = \frac{25}{36} \cdot \frac{(x+2y+3)^2}{5}$;

বা, $36(x^2 + y^2 - 4x + 2y + 5) = 5(x^2 + 4y^2 + 4xy + 6x + 12y + 9)$;

বা, $\mathbf{31x^2 + 16y^2 - 20xy - 174x + 12y + 135 = 0}$;

ইহাই নির্ণেয় সমীকরণ।

উদা. 9. (i) $4x^2 + 9y^2 - 24x = 0$,

(ii) $16x^2 + 25y^2 - 64x - 150y = 111$

উপবৃত্তের কেন্দ্র, উৎকেন্দ্রতা, নাভিদ্বয় নিয়ামকদ্বয় নির্ণয় কর।

(i) উপবৃত্তটির সমীকরণ $4x^2+9y^2-24x=0$;

বা, $(2x-6)^2+9y^2=36$,

বা, $4(x-3)^2+9y^2=36$,

বা, $\frac{(x-3)^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$,

বা, $X=x-3$ বসাইয়া $\frac{X^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$.

(1) পরাক্ষ $y=0$ রেখা বরাবর হইবে, এবং উপাক্ষ $X=0$ বা $x-3=0$ রেখা বরাবর হইবে ; এই দুই রেখার ছেদবিন্দু কেন্দ্র ;

$\therefore$ সমাধান করিয়া কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক **(3, 0)**.

(2) এস্থলে, $a^2=9$ এবং $b^2=4$;

$\therefore$ উৎকেন্দ্রতা $e=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{1-\frac{4}{9}}=\frac{\sqrt{5}}{35}$.

(3) নাভিদ্বয় পরাক্ষে, অর্থাৎ, এস্থলে, $y=0$ রেখার উপর এবং কেন্দ্র (3, 0)-এর উভয় পার্শ্বে অবস্থিত এবং কেন্দ্র হইতে উহাদের দূরত্ব ae, অর্থাৎ, $3\cdot\frac{\sqrt{5}}{3}$, অর্থাৎ, $\sqrt{5}$; অতএব, নাভিদ্বয়ের স্থানাঙ্ক হইবে **$(3-\sqrt{5}, 0)$** এবং **$(3+\sqrt{5}, 0)$**.

(4) নিয়ামকদ্বয় উপাক্ষের সমান্তরাল ; অতএব, উহারা $x-3=0$ রেখা এবং সেইজন্য $x=0$ রেখার সমান্তরাল। আবার উহারা কেন্দ্রের দুই পার্শ্বে অবস্থিত এবং কেন্দ্র হইতে উহাদের দূরত্ব $\frac{a}{e}$, অর্থাৎ, $\frac{3}{\sqrt{5}/3}$, অর্থাৎ, $\frac{9}{\sqrt{5}}$, অতএব, নিয়ামকদ্বয়ের সমীকরণ হইবে

$$x=3-\frac{9}{\sqrt{5}} \text{ এবং } x=3+\frac{9}{\sqrt{5}}.$$

(ii) উপবৃত্তটির সমীকরণ $16(x^2-4x)+25(y^2-6y)=111$;

বা, $16(x-2)^2+25(y-3)^2=111+64+225=400$;

বা, $\frac{(x-2)^2}{25}+\frac{(y-3)^2}{16}=1$.

(1) পরাক্ষ $y-3=0$ রেখা বরাবর হইবে, এবং উপাক্ষ $x-2=0$ রেখা বরাবর হইবে ; এই দুই রেখার ছেদবিন্দু কেন্দ্র ; অতএব, সমাধান করিয়া কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক **(2, 3)**.

(2) এস্থলে, $a^2=25$ এবং $b^2=16$;

$$e=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{1-\frac{16}{25}}=\sqrt{\frac{9}{25}}=\frac{3}{5}.$$

(3) নাভিদ্বয় পরাক্ষে, অর্থাৎ, এস্থলে, $y=3$ রেখার উপর এবং কেন্দ্র (2, 3)-এর উভয় পার্শ্বে অবস্থিত, এবং কেন্দ্র হইতে উহাদের দূরত্ব ae, অর্থাৎ, $5.\frac{3}{5}$, অর্থাৎ 3; অতএব, নাভিদ্বয়ের কোটি হইবে 3 এবং ভুজ হইবে $2-3$, অর্থাৎ -1, এবং $2+3$, অর্থাৎ 5;

$\therefore$ নাভিদ্বয়ের স্থানাঙ্ক **(−1, 3), (5, 3).**

(4) নিয়ামকদ্বয় উপাক্ষের সমান্তরাল; অতএব, উহারা $x-2=0$, অর্থাৎ, $x=2$ রেখার সমান্তরাল। আবার, উহারা উপাক্ষের দুই পার্শ্বে অবস্থিত এবং উপাক্ষ হইতে উহাদের দূরত্ব কেন্দ্র হইতে উহাদের দূরত্বের সমান এবং এই দূরত্ব

$$=\frac{a}{e}=\frac{5}{3/5}=\frac{25}{3};$$

$\therefore$ নিয়ামকদ্বয়ের সমীকরণ $x=2-\frac{25}{3}=-\frac{19}{3}$ অর্থাৎ, $\mathbf{3x+19=0}$,
এবং $x=2+\frac{25}{3}=\frac{31}{3}$, অর্থাৎ, $\mathbf{3x-31=0}$.

প্রশ্নমালা 17

1. নিম্নলিখিত সমীকরণগুলির প্রত্যেকটি দ্বারা সূচিত উপবৃত্তের অক্ষদ্বয়ের দৈর্ঘ্য, উৎকেন্দ্রতা, নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য, কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক, নাভিদ্বয়ের স্থানাঙ্ক এবং নিয়ামকের সমীকরণ নির্ণয় কর :

(i) $\frac{x^2}{4^2}+\frac{y^2}{3^2}=1$; [C. U., 1936] (ii) $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$;
(iii) $9x^2+25y^2=225$; [C. U., 1944]
(iv) $x^2+2y^2=2$; [C. U., 1947]
(v) $2x^2+3y^2=1$; [U. P., 1952]
(vi) $9x^2+4y^2=36$; (vii) $3x^2+2y^2=8$;
(viii) $3x^2+4y^2-24x=0$; (ix) $2x^2+3y^2-4x=4$;
(x) $9x^2+25y^2-72x+100y=656$.

2. $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{28}=1$ উপবৃত্তের একটি নাভি এবং তদ্সম্পর্কীয় নিয়ামকের মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় কর।

3. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{24}=1$ উপবৃত্তের নাভিদ্বয় হইতে $(\frac{5}{2}, 3\sqrt{2})$ বিন্দুটির দূরত্ব নির্ণয় কর।

4. কোন উপবৃত্তের পরাক্ষ ও উপাক্ষ যথাক্রমে 3 এবং 2 দেওয়া আছে। এই অক্ষদ্বয়ের সম্পর্কে উপবৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

5. যে উপবৃত্তের অক্ষদ্বয় x- এবং y-অক্ষদ্বয়ের উপর অবস্থিত এবং যাহা (i) (5, 0) এবং (0, 4) ; (ii) (2, 2) এবং (3, 1) ; [C. U., 1939]

(iii) $\left(\frac{\sqrt{5}}{2}, \sqrt{3}\right)$ এবং $\left(\frac{3\sqrt{5}}{4}, \frac{\sqrt{7}}{2}\right)$;

(iv) $(4, \sqrt{21})$ এবং $(4\sqrt{3}, \sqrt{7})$; বিন্দুদ্বয়গামী, তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

6. a-এর মান কত হইলে, $9ax^2+5y^2=9$ উপবৃত্তটি $(\pm\sqrt{5}, 0)$ বিন্দুদ্বয়-গামী হইবে ? উপবৃত্তটির উৎকেন্দ্রতা নির্ণয় কর।

7. যে উপবৃত্ত x-অক্ষের উপর $\frac{x}{7}+\frac{y}{2}=1$ সরল রেখা এবং y অক্ষের উপর $\frac{x}{3}+\frac{y}{5}=1$ সরল রেখার সহিত মিলিত হয়, এবং যাহার অক্ষ x-এবং y-অক্ষের উপর অবস্থিত, সেই উপবৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। উপবৃত্তটির উৎকেন্দ্রতা এবং নাভিদ্বয়ের অবস্থান নির্ণয় কর। [C. U., 1938]

8. $(-3, 1)$ বিন্দুগামী যে উপবৃত্ত (যাহার অক্ষদ্বয় যথাক্রমে x-এবং y-অক্ষদ্বয়) এবং যাহার উৎকেন্দ্রতা $\sqrt{\frac{2}{5}}$, সেই উপবৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।
[C. U., 1949]

9. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তটি $7x+13y-87=0$ এবং $5x-8y+7=0$ সরল রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী এবং ইহার নাভিলম্ব $\frac{32}{5}\sqrt{2}$; a ও b-এর মান নির্ণয় কর।
[C. U., 1949]

10. একটি উপবৃত্তের নাভি ও নিয়ামকের মধ্যে দূরত্ব 16 সেমি. এবং ইহার উৎকেন্দ্রতা $\frac{3}{5}$. ইহার প্রধান অক্ষগুলির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। [C. U., 1943]

11. যে উপবৃত্তের নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য 4 সেমি., এবং নিকটতর নাভি হইতে যাহার শীর্ষবিন্দুর দূরত্ব 1·5 সেমি., তাহার উৎকেন্দ্রতা নির্ণয় কর। [C. U., 1944]

12. একটি উপবৃত্তের নাভিলম্ব, (a) পরাক্ষের অর্ধেক ; (b) উপাক্ষের অর্ধেক হইলে, উহার উৎকেন্দ্রতা নির্ণয় কর।

13. যে উপবৃত্তের অক্ষদ্বয় x- ও y-অক্ষের উপর অবস্থিত এবং (i) যাহার পরাক্ষ 10 এবং উৎকেন্দ্রতা $\frac{1}{5}$; (ii) যাহার নাভিলম্ব 5 এবং উৎকেন্দ্রতা $\frac{2}{3}$; (iii) যাহার উৎকেন্দ্রতা $\frac{1}{3}$ এবং নাভিদ্বয়ের স্থানাঙ্ক $(\pm 1, 0)$, তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

14. একটি উপবৃত্তের নাভিদ্বয়ের স্থানাঙ্ক (0, 1) এবং (0, −1), উপাক্ষের দৈর্ঘ্য 1. উপবৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। [C. U., 1951]

15. যে উপবৃত্তের

(i) নাভির স্থানাঙ্ক $(-1, 1)$, উৎকেন্দ্রতা $\frac{1}{2}$ এবং নিয়ামক $x-y+3=0$;
[C. U., B. A. & B. Sc., 1945]

(ii) নাভির স্থানাঙ্ক $(2, 3)$, উৎকেন্দ্রতা $\dfrac{1}{\sqrt{13}}$ এবং নিয়ামক $x-y+13=0$;

তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

16. একটি উপবৃত্তে $CS.CX=CA^2$, যখন C কেন্দ্র, S একটি নাভি, A অনুরূপ শীর্ষবিন্দু এবং X সেই বিন্দুটি যেথায় CS উপবৃত্তটির অনুরূপ নিয়ামকের সহিত মিলিত হয়। এই উপপাদ্যটির সত্যতা $x^2+2y^2=2$ উপবৃত্তে প্রতিপন্ন কর।

4·16. পরাবৃত্ত (*Hyperbola*) :

কনিকের উৎকেন্দ্রতা (e) এক অপেক্ষা বৃহত্তর হইলে, কনিককে **পরাবৃত্ত** (Hyperbola) বলা হয়, অর্থাৎ,

কোন সমতলের উপর অবস্থিত একটি স্থির নির্দিষ্ট বিন্দু এবং একটি স্থির নির্দিষ্ট সরল রেখা হইতে ঐ সমতলের উপর গতিশীল কোন বিন্দুর দূরত্বদ্বয়ের অনুপাত ধ্রুবক কিন্তু এক (1) অপেক্ষা বৃহত্তর হইলে, গতিশীল বিন্দুটির সঞ্চারপথকে **পরাবৃত্ত** বলে।

নির্দিষ্ট বিন্দুটিকে ঐ পরাবৃত্তের **নাভি** (Focus), নির্দিষ্ট সরল রেখাকে উহার **নিয়ামক** (Directrix) এবং দূরত্বদ্বয়কে ধ্রুবক অনুপাতকে ঐ পরাবৃত্তের **উৎকেন্দ্রতা** (Eccentricity) বলা হয়।

সাধারণতঃ নাভিকে S দ্বারা এবং উৎকেন্দ্রতাকে e দ্বারা সূচিত করা হয়।

নাভিবিন্দুগামী এবং নিয়ামকের উপর লম্ব সরল রেখা এবং পরাবৃত্তের ছেদবিন্দুকে ঐ পরাবৃত্তের **শীর্ষবিন্দু** (Vertex) বলে।

নাভিবিন্দুগামী এবং নিয়ামকের সমান্তরাল জ্যা-কে পরাবৃত্তের **নাভিলম্ব** (Latus rectum) বলে।

4·17. পরাবৃত্তের সমীকরণ (*Equation of a hyperbola*) :

S পরাবৃত্তটির নাভি এবং $\overleftrightarrow{ZK}$ উহার নিয়ামক। S হইতে নিয়ামকের উপর $\overleftrightarrow{SZ}$ লম্ব টানিয়া S-এর দিকে বর্ধিত করা হইল ; ইহা হইল অক্ষ।

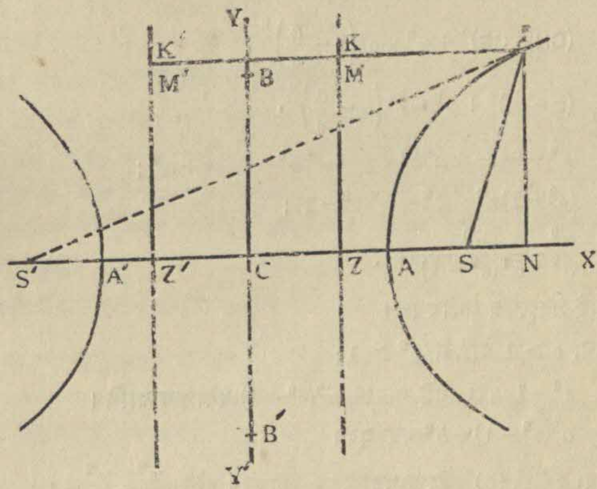
$\overleftrightarrow{SZ}$-এর উপর এরূপ একটি বিন্দু A নির্ণয় করা যায়, অর্থাৎ $\overline{SZ}$-কে এরূপে অন্তর্বিভক্ত করা যায় যে,

$$SA=e.AZ \qquad \cdots \qquad \cdots \quad (1)$$

আবার, $e>1$ বলিয়া, বর্ধিত $\overline{SZ}$-এর উপর এরূপ একটি বিন্দু A′ নির্ণয় করা যায় যে, $SA'=e.A'Z$ .... (2)

ধরা যাক, $\overline{AA'}=2a$ এবং C, উহার মধ্যবিন্দু।

[A ও A′ পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু এবং C পরাবৃত্তের **কেন্দ্র** (centre).]



(1) এবং (2) যোগ করিয়া,

$$SA+SA'=e(AZ+A'Z);$$

বা, $SA+(SA+AA')=e.AA$;

বা, $2SA+2AC=e.2AC'$;

বা, $2(SA+AC)=2ae$; $\quad [\because AC=\frac{1}{2}AA'=\frac{1}{2}.2a=a]$

বা, $CS=ae.$ .... (3)

আবার, (2) হইতে (1) বিয়োগ করিয়া,

$SA'-SA=e(A'Z-AZ)$;

বা, $AA'=e\{(A'C+CZ)-(CA-CZ)\}$

$=e.2CZ, \quad (\because A'C=CA)$

বা, $2a=2e.CZ$; $\therefore CZ=\frac{a}{e}\cdot$ .... (4)

এখন, কেন্দ্র C-কে মূলবিন্দু, বর্ধিত $\overleftrightarrow{CS}$-কে x-অক্ষ এবং C বিন্দু দিয়া অঙ্কিত AA′-এর লম্ব রেখাকে y-অক্ষ ধরা হইল। পরাবৃত্তের উপর অবস্থিত যে-কোন বিন্দু P-এর স্থানাঙ্ক যেন (x, y). P বিন্দু হইতে নিয়ামকের উপর $\overline{PM}$ লম্ব এবং $\overleftrightarrow{CS}$, অর্থাৎ x-অক্ষের উপর $\overline{PN}$ লম্ব টানা হইল।

$CS=ae$ বলিয়া, নাভি S-এর স্থানাঙ্ক $(ae, 0)$,

এখন, $SP^2 = (e.PM)^2 = (e\,ZN)^2 = e^2 ZN^2 = e^2(CN - CZ)^2$;

বা, $SN^2 + PN^2 = e^2\left(x - \frac{a}{e}\right)^2$ $\quad [\because SP^2 = SN^2 + PN^2]$

$(CN - CS)^2 + y^2 = e^2\left(x - \frac{a}{e}\right)^2$;

$\therefore\ (x - ae)^2 + y^2 = e^2\left(x - \frac{a}{e}\right)^2$,

বা, $x^2 - 2aex + a^2e^2 + y^2 = e^2x^2 - 2aex + a^2$;

বা, $(e^2 - 1)x^2 - y^2 = a^2(e^2 - 1)$;

বা, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2(e^2-1)} = 1.$ .... (5)

ইহাই পরবৃত্তের সমীকরণ।

এখন, $e > 1$ বলিয়া, $e^2 > 1$;

$\therefore$ $e^2 - 1$ এবং সেই কারণে, $a^2(e^2 - 1)$ ধনাত্মক রাশি।

$a^2(e^2 - 1) = b^2$ ধরা হয়।

তাহা হইলে, (5) হইতে পরাবৃত্তের সমীকরণ হইল $\mathbf{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$.

অনুসিদ্ধান্ত 1. $\mathbf{a^2(e^2 - 1) = b^2}$; বা, $a^2e^2 = a^2 + b^2$;

বা, $e^2 = \frac{a^2 + b^2}{a^2} = 1 + \frac{b^2}{a^2}$; $\quad \therefore\ e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$.

অনুসিদ্ধান্ত 2. $a^2(e^2 - 1) = b^2$; বা, $a^2e^2 = a^2 + b^2$;

বা, $(ae)^2 = a^2 + b^2$; অর্থাৎ, $\mathbf{CS^2 = a^2 + b^2}$,

এবং $b^2 = CS^2 - a^2$, বা, $\mathbf{b^2 = CS^2 - CA^2}$.

অনুসিদ্ধান্ত 3. পরাবৃত্তের সমীকরণ হইতে,

$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} - 1 = \frac{x^2 - a^2}{a^2} = \frac{(x-a)(x+a)}{a^2};$$

$$\therefore\ \frac{PN^2}{b^2} = \frac{AN.A'N}{a^2},\ \text{বা},\ \mathbf{\frac{PN^2}{AN.A'N} = \frac{b^2}{a^2}}.$$

অনুসিদ্ধান্ত 4. A বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(a, 0)$,

A′ বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(-a, 0)$,

S বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(ae, 0)$

নিয়ামক $\overleftrightarrow{ZK}$-এর সমীকরণ $x = \frac{x}{e}$.

4·18. সংজ্ঞা।

শীর্ষদ্বয় সংযোজক এবং শীর্ষদ্বয়ের মধ্যে সীমাবদ্ধ $\overline{A'A}$ সরল রেখাকে পরাবৃত্তের **তির্যক্ অক্ষ** (Transverse axis) বলে। যদি পরাবৃত্তের কেন্দ্র দিয়া অঙ্কিত তির্যক্ অক্ষের লম্ব সরল রেখার উপর B ও B′ এরূপ দুইটি বিন্দু হয় যে, $B'C = CB = b$, তাহা হইলে $\overline{BB'}$-কে পরাবৃত্তের **অনুবন্ধী** (Conjugate) অক্ষ বলা হয়।

তির্যক্ অক্ষ $AA' = 2a$, এবং অনুবন্ধী অক্ষ $BB' = 2b$.

পরাবৃত্তের তির্যক্ এবং অনুবন্ধী অক্ষ সাধারণত অসমান থাকে। তির্যক্ অক্ষ ও অনুবন্ধী অক্ষ সমান হইলে পরাবৃত্তকে ইংরেজীতে Equilateral বা Rectangular বলা হয়, আর বাংলায় উহাকে বলা যাইতে পারে **সমাক্ষ পরাবৃত্ত** বা **আয়ত পরাবৃত্ত**।

সমাক্ষ পরাবৃত্তে $2a = 2b$, বা $a = b$

$\therefore$ সমাক্ষ পরাবৃত্তের সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$, বা, $\mathbf{x^2 - y^2 = a^2}$.

ইহার উৎকেন্দ্রতা $e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 + \frac{a^2}{a^2}} = \sqrt{2}.$

4·19. পরাবৃত্তের দ্বিতীয় নাভি ও দ্বিতীয় নিয়ামক।

পরাবৃত্তের কেন্দ্র C বিন্দুর যে পার্শ্বে S বিন্দু অবস্থিত তাহার বিপরীত পার্শ্বে বর্ধিত তির্যক্ অক্ষের উপর S′ যেন এমন একটি বিন্দু যে $CS = CS'$ হয়, এবং C বিন্দুর যে পার্শ্বে Z বিন্দু অবস্থিত তাহার বিপরীত পার্শ্বে তির্যক্ অক্ষের উপর Z′ যেন এমন একটি বিন্দু যে $CZ = CZ'$ হয়; Z′ বিন্দু দিয়া তির্যক্ অক্ষের লম্ব বা নিয়ামকের সমান্তরাল করিয়া, Z′K′ সরল রেখা টানা হইল। [অনুচ্ছেদ 4·17-এর চিত্র দ্রষ্টব্য]

তাহা হইলে $CS' = SC = ae$. $\therefore$ S′ বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(-ae, 0)$;

এবং $CZ' = ZC = \frac{a}{e}\cdot$

পরাবৃত্তের উপর অবস্থিত যে-কোন বিন্দু $P(x, y)$ হইতে Z′K′-এর উপর $\overline{PM'}$ লম্ব টানা হইল।

$$\therefore \quad S'P^2 = S'N^2 + PN^2 = (S'C + CN)^2 + PN^2$$

$$= (x + ae)^2 + y^2, \text{ এবং } PM' = NZ' = CN + CZ' = x + \frac{a}{e}\cdot$$

এখন পরাবৃত্তের সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2(e^2-1)} = 1,$

বা, $x^2(e^2 - 1) - y^2 = a^2(e^2 - 1)$;

বা, $x^2 + a^2e^2 + y^2 = e^2x^2 + a^2$;

বা, $(x^2+2aex+a^2e^2)+y^2=e^2x^2+2aex+a^2$;

বা, $(x+ae)^2+y^2=e^2\left(x^2+\frac{2ax}{e}+\frac{a^2}{e^2}\right)=e^2\left(x+\frac{a}{e}\right)^2$;

বা, $\mathrm{S'N}^2+\mathrm{PN}^2=e^2\mathrm{Z'C}+\mathrm{CN}^2$;

বা, $\mathrm{S'P}^2=e^2\mathrm{PM'}^2$, বা, $\mathrm{S'P}=e.\mathrm{PM'}$;

বা, $\frac{\mathrm{S'P}}{\mathrm{PM'}}=e.$

দেখা গেল, S′ বিন্দু হইতে পরাবৃত্তের উপর অবস্থিত যে-কোন বিন্দুর দূরত্ব এবং $\overleftrightarrow{\mathrm{Z'K'}}$ রেখা হইতে ইহার দূরত্বের অনুপাত পরাবৃত্তের উৎকেন্দ্রতা e-এর সমান ; অতএব, S′ বিন্দুকে নাভি এবং Z′K′ রেখাকে নিয়ামক ধরিলেও একই পরাবৃত্ত পাওয়া যাইবে। অতএব, দেখা গেল পরাবৃত্তের সর্বদাই একটি দ্বিতীয় নাভি এবং একটি দ্বিতীয় নিয়ামক থাকে।

অনুসিদ্ধান্ত। S′ বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(-ae, 0)$, এবং দ্বিতীয় নিয়ামক Z′K′-এর সমীকরণ $x=-\frac{a}{e}$.

4·20. পরাবৃত্তের আকার।

পরাবৃত্তের সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ হইতে দেখা যায়,

$$y=\pm b\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1} \qquad \cdots\cdot \quad (1)$$

এবং $$x=\pm a\sqrt{\frac{y^2}{b^2}+1} \qquad \cdots\cdot \quad (2)$$

ইহা হইতে পরাবৃত্তের আকার-নির্ণায়ক নিম্নলিখিত তথ্যগুলি পাওয়া যায় :

(i) (1) হইতে, $x^2<a^2$, অর্থাৎ $x<a$, অথবা, $>-a$ হইলে, x^2/a^2, 1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হয় এবং মূলচিহ্নের নীচে ঋণাত্মক চিহ্ন আসিয়া যায় বলিয়া, x-এর ঐ সকল মানের জন্য y অবাস্তব হয় ; সুতরাং, a অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর এবং $-a$ অপেক্ষা বৃহত্তর ভুজ-বিশিষ্ট কোন বিন্দুই পরাবৃত্তের উপর থাকিবে না ; অতএব, A ও A′ বিন্দুদ্বয়ের মধ্যে পরাবৃত্তের কোন অংশই থাকিবে না।

(ii) (1) হইতে দেখা যায়, $x^2=a^2$, অর্থাৎ $x=a$, অথবা $-a$ হইলে, $y=0$ হয় ; অতএব, পরাবৃত্তটি x-অক্ষকে A′ ও A বিন্দুদ্বয়ে ছেদ করে।

(1) হইতে আরও দেখা যায়, $x^2>a^2$, অর্থাৎ $x>a$, অথবা, $x<-a$ এইরূপ x-এর সকল মানের জন্যই y-এর পরস্পর সমান কিন্তু বিপরীত চিহ্ন-বিশিষ্ট দুইটি করিয়া মান থাকে ; অতএব, পরাবৃত্তটি x-অক্ষে প্রতিসম এবং A বিন্দু হইতে আরম্ভ করিয়া x-অক্ষের ধনাত্মক দিকে, ইহার উভয় পার্শ্বে অসীম পর্যন্ত বিস্তৃত এবং

A′ বিন্দু হইতে আরম্ভ করিয়া x-অক্ষের ঋণাত্মক দিকে, ইহার উভয় পার্শ্বে অসীম পর্যন্ত বিস্তৃত।

(iii) (2) হইতে দেখা যায়, y-এর ধনাত্মক বা ঋণাত্মক সকল মানের জন্যই x-এর পরস্পর সমান, কিন্তু বিপরীত চিহ্ন-বিশিষ্ট দুইটি করিয়া মান থাকে; অতএব, পরাবৃত্তটি y-অক্ষে প্রতিসম।

এই সকল তথ্য হইতে এই সিদ্ধান্তে উপনীত হওয়া যায় যে, পরাবৃত্ত, অনু. 4·17-এর চিত্রের ন্যায় A ও A′ বিন্দুগামী x এবং y উভয় অক্ষে প্রতিসম, x-অক্ষের ধনাত্মক এবং ঋণাত্মক উভয়দিকে অসীম পর্যন্ত বিস্তৃত দুইটি সন্তত রেখা।

4·21. নাভিদ্বয় হইতে পরাবৃত্তের উপর অবস্থিত যে-কোন বিন্দুর দূরত্বদ্বয়ের অন্তর তির্যক অক্ষের সমান।

[*The difference of the focal distances of any point on a hyperbola is equal to the transverse axis.*]

পরাবৃত্তের উপর অবস্থিত যে কোন বিন্দু P-এর স্থানাঙ্ক (x, y).

অনু. 4·17-এর চিত্র হইতে,

SP $= e.$PM এবং S′P $= e.$PM′ ;

$\therefore$ S′P − SP $= e($PM′ − PM$) = e.$MM′ $= e.$ZZ′

$$= e.2\text{CZ} = e2\cdot\frac{a}{e} = 2a = \text{তির্যক্ অক্ষ।}$$

বিশেষ দ্রষ্টব্য। নাভি হইতে পরাবৃত্তের উপর অবস্থিত যে-কোন বিন্দুর দূরত্ব :

$$\text{SP} = e.\text{PM} = e.\text{NZ} = e.(\text{CN} - \text{CZ}) = e\left(x - \frac{a}{e}\right)$$

$$= \mathbf{ex - a};$$

$$\text{S'P} = e\text{PM}' = e.\text{NZ}' = e(\text{CN} + \text{CZ}') = e\left(x + \frac{a}{e}\right)$$

$$= \mathbf{ex + a}.$$

4·22. পরাবৃত্তের নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য।

S ও S′ নাভিদ্বয় দিয়া অঙ্কিত তির্যক্ অক্ষের লম্ব $\overline{\text{LSL}'}$ ও $\overline{\text{L}_1\text{S}'\text{L}'_1}$ জ্যা-দ্বয় পরাবৃত্তের দুইটি নাভিলম্ব।

এখন, L বিন্দুর স্থানাঙ্ক (CS, SL), অর্থাৎ (ae, SL). L বিন্দু পরাবৃত্তের উপর অবস্থিত বলিয়া,

$$\frac{a^2e^2}{a^2} - \frac{\text{SL}^2}{b^2} = 1,$$

বা, $SL^2 = b^2(e^2-1) = b^2\left(1+\frac{b^2}{a^2}-1\right) = \frac{b^4}{a^2}$;

$\therefore\ SL = \frac{b^2}{a}$; এইরূপে, $SL' = \frac{b^2}{a}$.

$\therefore\ \mathbf{LSL' = \frac{2b^2}{a}}$.

একই পদ্ধতিতে দেখানো যায়, $L_1S'L_1' = \frac{2b^2}{a}$.

সুতরাং পরাবৃত্তের নাভিলম্বদ্বয়ের সমীকরণ $\mathbf{x = ae, x = -ae}$.

দ্রষ্টব্য : উপবৃত্তের সমীকরণে b^2 স্থলে $-b^2$ লিখিয়া পরাবৃত্তের সমীকরণ পাওয়া যায়।

উদাহরণমালা

উদা. 1. (i) যে পরাবৃত্তের তির্যক্ অক্ষ এবং অনুবন্ধী অক্ষ যথাক্রমে 8 এবং 6 ;
(ii) যে পরাবৃত্তের অনুবন্ধী অক্ষ 12 এবং নাভিদ্বয়ের মধ্যস্থ দূরত্ব 20 ;
(iii) যে পরাবৃত্ত (2, 1) এবং (3, −2) বিন্দুগামী ; x- ও y-অক্ষকে অক্ষ ধরিয়া তাহাদের সমীকরণ নির্ণয় কর।

(i) এস্থলে, $2a = 8$ এবং $2b = 6$; $\therefore\ a = 4$ এবং $b = 3$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$, বা, $\mathbf{9x^2 - 16y^2 = 144}$.

(ii) এস্থলে, $2b = 12$; $\therefore\ b = 6$; এবং নাভিদ্বয়ের দূরত্ব $= 2ae = 20$;
$\therefore\ ae = 10$.

এখন, $b^2 = a^2(e^2-1) = a^2e^2 - a^2$;

$\therefore\ 36 = 100 - a^2$; $\therefore\ a^2 = 100 - 36 = 64$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$; বা, $36x^2 - 64y^2 = 64 \times 36$,

বা, $\mathbf{9x^2 - 16y^2 = 576}$.

(iii) মনে কর, পরাবৃত্তটির সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

পরাবৃত্তটি (2, 1) এবং (3, −2) বিন্দুদ্বয়গামী বলিয়া,

$$\left.\begin{aligned} &\frac{4}{a^2} - \frac{1}{b^2} = 1 \\ \text{এবং}\quad &\frac{9}{a^2} - \frac{4}{b^2} = 1 \end{aligned}\right\}$$

সমীকরণ-দুইটি সমাধান করিয়া, $a^2=\frac{7}{3}, b^2=\frac{7}{5}$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ $\frac{x^2}{\frac{7}{3}}-\frac{y^2}{\frac{7}{5}}=1$;

বা, $\mathbf{3x^2-5y^2=7}$.

উদা. 2. x- ও y- অক্ষকে অক্ষ ধরিয়া পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর,

(i) যাহার একটি নাভির স্থানাঙ্ক $(2\sqrt{15}, 0)$ এবং উৎকেন্দ্রতা $\sqrt{\frac{5}{3}}$;

(ii) যাহা $(5, -3)$ বিন্দুগামী এবং যাহার উৎকেন্দ্রতা $\frac{2\sqrt{10}}{5}$.

(i) এস্থলে, $e=\sqrt{\frac{5}{3}}$ এবং $ae=2\sqrt{15}$;

$\therefore\quad a=\frac{2\sqrt{15}}{\sqrt{\frac{5}{3}}}=6$; $\therefore\quad a^2=36$ ... ... (1)

এবং $b^2=a^2(e^2-1)=36(\frac{5}{3}-1)=36.\frac{2}{3}=24$ ... (2)

$\therefore$ (1) এবং (2) হইতে, পরাবৃত্তের সমীকরণ $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{24}=1$,

বা, $\mathbf{2x^2-3y^2=72}$.

(ii) মনে কর, পরাবৃত্তটির সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$. ... (1)

পরাবৃত্তটি $(5, -3)$ বিন্দুগামী বলিয়া, $\frac{25}{a^2}-\frac{9}{b^2}=1$ ... (2)

আবার, $e=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=\frac{2\sqrt{10}}{5}$;

$\therefore\quad 1+\frac{b^2}{a^2}=\left(\frac{2\sqrt{10}}{5}\right)^2=\frac{8}{5}$,

বা, $\frac{b^2}{a^2}=\frac{3}{5}$, বা, $b^2=\frac{3}{5}a^2$ ... ... (3)

(2) এবং (3) হইতে, $\frac{25}{a^2}-\frac{9}{\frac{3}{5}a^2}=1$, বা, $a^2=25-15=10$,

এবং (3) হইতে, $b^2=\frac{3}{5}a^2=\frac{3}{5}.10=6$.

$\therefore$ (1) হইতে নির্ণেয় সমীকরণ $\frac{x^2}{10}-\frac{y^2}{6}=1$;

বা, $\mathbf{3x^2-5y^2=30}$.

উদা. 3. যে পরাবৃত্তের নাভির স্থানাঙ্ক $(-2, 3)$, উৎকেন্দ্রতা 5, এবং $3x-4y-5=0$ সরল রেখা যাহার নিয়ামক, সেই পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

মনে কর, পরাবৃত্তের উপর অবস্থিত যে-কোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y).

নাভি হইতে এই বিন্দুর দূরত্ব $= \sqrt{(x+2)^2+(y-3)^2}$
$= \sqrt{x^2+y^2+4x-6y+13}.$

নিয়ামক হইতে (x, y) বিন্দুর দূরত্ব $= \dfrac{3x-4y-5}{\sqrt{3^2+4^2}} = \dfrac{3x-4y-5}{5}$;

$\therefore$ পরাবৃত্তের উপর (x, y) বিন্দুর সকল অবস্থানের জন্য নাভি হইতে (x, y) বিন্দুর দূরত্ব $= e$ [নিয়ামক হইতে (x, y) বিন্দুর দূরত্ব] বলিয়া, নির্ণেয় পরাবৃত্তের সমীকরণ

$$\sqrt{x^2+y^2+4x-6y+13} = 5 \times \frac{3x-4y-5}{5} = 3x-4y-5,$$

বা, উভয় পক্ষ বর্গ করিয়া, $x^2+y^2+4x-6y+13 = (3x-4y-5)^2$
$= 9x^2+16y^2+25-24xy-30x+40y,$

বা, $\mathbf{8x^2+15y^2-24xy-34x+46y+12=0.}$

উদা. 4. $x^2-4y^2=16$ পরাবৃত্তের নাভিলম্ব, উৎকেন্দ্রতা, নাভিদ্বয়ের স্থানাঙ্ক এবং নিয়ামকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

পরাবৃত্তের সমীকরণ $x^2-4y^2=16$; বা, $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{4}=1$;

$\therefore$ এস্থলে, $a^2=16$; $\therefore$ $a=4$; এবং $b^2=4$.

$\therefore$ নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য $= \dfrac{2b^2}{a} = \dfrac{2.4}{4} = 2.$

উৎকেন্দ্রতা $e = \sqrt{1+\dfrac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1+\dfrac{4}{16}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{4}.$

নাভির স্থানাঙ্ক $(\pm ae, 0)$, অর্থাৎ, $\left(\pm 4.\dfrac{2\sqrt{5}}{4}, 0\right)$

অর্থাৎ, $(\pm 2\sqrt{5}, 0)$.

নিয়ামকের সমীকরণ $x = \pm\dfrac{a}{e} = \pm\dfrac{4}{\frac{2\sqrt{5}}{4}} = \pm\dfrac{8}{\sqrt{5}} = \pm\dfrac{8\sqrt{5}}{5}.$

উদা. 5. $4x^2-9y^2-16x-54y-101=0$ পরাবৃত্তের (i) তির্যক্ অক্ষ, (ii) অনুবন্ধী অক্ষ, (iii) উৎকেন্দ্রতা, (iv) কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক, (v) নাভিদ্বয়ের স্থানাঙ্ক এবং (vi) নিয়ামকদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর।

প্রদত্ত পরাবৃত্তের সমীকরণ $4x^2-9y^2-16x-54y-101=0$;

বা, $(4x^2-16x+16)-(9y^2+54y+81)=36$;

বা, $(2x-4)^2-(3y+9)^2=36$;

বা, $4(x-2)^2-9(y+3)^2=36$;

বা, $\frac{(x-2)^2}{9}-\frac{(y+3)^2}{4}=1.$

পরাবৃত্তের সমীকরণ হইতে, স্পষ্টই $a=3$, $b=2$;

$\therefore$ (i) তির্যক্ অক্ষ $=2a=6$; (ii) অনুবন্ধী অক্ষ $=2b=4.$

(iii) উৎকেন্দ্রতা $e=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{1+\frac{4}{9}}=\frac{\sqrt{13}}{3}.$

(iv) তির্যক্ অক্ষের সমীকরণ $y+3=0$,

এবং অনুবন্ধী অক্ষের সমীকরণ $x-2=0$;

কেন্দ্র এই দুই অক্ষের ছেদবিন্দু বলিয়া, উহার স্থানাঙ্ক $(2, -3)$.

(v) নাভিদ্বয় বর্ধিত তির্যক্ অক্ষের উপর কেন্দ্রের উভয় পার্শ্বে অবস্থিত, এবং কেন্দ্র হইতে উহাদের দূরত্ব $ae=3.\frac{\sqrt{13}}{3}=\sqrt{13}.$

এখন, তির্যক্ অক্ষের উপর অবস্থিত বলিয়া নাভিদ্বয়ের উভয়েরই কোটি -3;

আর একটির ভুজ $2+\sqrt{13}$ এবং অপরটির ভুজ $2-\sqrt{13}$.

$\therefore$ নাভিদ্বয়ের স্থানাঙ্ক $(2+\sqrt{13}, -3)$ এবং $(2-\sqrt{13}, -3)$.

(vi) নিয়ামকদ্বয় অনুবন্ধী অক্ষের সমান্তরাল, অর্থাৎ, উহারা $x-2=0$, অর্থাৎ $x=2$ রেখার সমান্তরাল। আবার উহারা অনুবন্ধী অক্ষের উভয় পার্শ্বে অবস্থিত এবং এই অক্ষ হইতে উহাদের দূরত্ব কেন্দ্র হইতে উহাদের দূরত্বের সমান। অতএব,

$$\frac{a}{e}=\frac{3}{\sqrt{13}/3}=\frac{9}{\sqrt{13}}=\frac{9\sqrt{13}}{13};$$

$\therefore$ নিয়ামকদ্বয়ের সমীকরণ

$$x=2+\frac{9\sqrt{13}}{13}, \text{ অর্থাৎ, } \mathbf{13x=26+9\sqrt{13}},$$

এবং $$x=2-\frac{9\sqrt{13}}{13}, \text{ অর্থাৎ, } \mathbf{13x=26-9\sqrt{13}}.$$

উদা. 6. $4x^2-5y^2=16$ পরাবৃত্ত এবং $2x+5y=4$ সরল রেখার ছেদবিন্দু নির্ণয় কর।

সরল রেখার সমীকরণ $2x=-5y+4$; ... ... (1)

বর্গ করিয়া, $4x^2=(-5y+4)^2$.

পরাবৃত্তের সমীকরণে $4x^2$-এর মান বসাইয়া,

$(-5y+4)^2-5y^2=16$; বা, $20y^2-40y=0$;

বা, $y^2-2y=0$, বা, $y(y-2)=0$;

$\therefore \quad y=0, 2.$

$y=0$ হইলে, (1) হইতে, $2x=-5.0+4=4$;

$\therefore \quad x=2$;

$y=2$ হইলে, (1) হইতে, $2x=-5.2+4=-6$;

$\therefore \quad x=-3.$

$\therefore$ নির্ণেয় ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক **(2, 0)** এবং **(−3, 2).**

উদা. 7. যে-পরাবৃত্তের একটি নাভির স্থানাঙ্ক (4, −3), যাহার উৎকেন্দ্রতা $\frac{13}{5}$ এবং নিয়ামক $2x-3y+1=0$ রেখা তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

পরাবৃত্তটির একটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক যেন $(x,.y)$.

নাভি (4, −3) হইতে (x, y)-এর দূরত্ব ... (1)

$$=\sqrt{(x-4)^2+(y+3)^2}$$

এবং, (x, y) বিন্দু হইতে নিয়ামক $2x-3y+1=0$-এর লম্ব দূরত্ব

$$=\frac{2x-3y+1}{\sqrt{2^2+3^2}}=\frac{2x-3y+1}{\sqrt{13}} \quad \cdots \quad (2)$$

(1) ও (2)-এর অনুপাত = পরাবৃত্তের উৎকেন্দ্রতা = $\frac{13}{5}$,

অর্থাৎ $$\frac{\sqrt{(x-4)^2+(y+3)^2}}{\frac{2x-3y+1}{\sqrt{13}}}=\frac{13}{5};$$

বা, $$\frac{[13(x-4)^2+(y+3)^2]}{(2x-3y+1)^2}=\frac{13^2}{5^2};$$

বা, $$\frac{x^2+y^2-8x+6y+25}{4x^2+9y^2+1-12xy-6y-4x}=\frac{13}{25};$$

বা, $$25x^2+25y^2-200x+150y+625=52x^2 +117y^2-156xy-78y-52x+13$$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ

$$27x^2+92y^2-156xy-228y+148x-612=0$$

প্রশ্নমালা 18

1. x ও y-অক্ষকে অক্ষ ধরিয়া সেই পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর,

(i) যাহার তির্যক্ এবং অনুবন্ধী অক্ষ যথাক্রমে 6 এবং 5 ;

(ii) যাহার অনুবন্ধী অক্ষ 2 এবং নাভিদ্বয়ের মধ্যবর্তী ব্যবধান $2\sqrt{5}$;

(iii) যাহা $(-2, 1)$ এবং $(3, -\sqrt{5})$ বিন্দুদ্বয়গামী ;

(iv) যাহার একটি নাভির স্থানাঙ্ক $(-6\sqrt{2}, 0)$ এবং উৎকেন্দ্রতা $\frac{3\sqrt{2}}{4}$;

(v) যাহার তির্যক্ অক্ষ 8 এবং উৎকেন্দ্রতা $\frac{5}{4}$;

(vi) যাহা $(4, \frac{7}{3})$ বিন্দুগামী এবং যাহার উৎকেন্দ্রতা $\frac{4}{3}$;

(vii) যাহার অনুবন্ধী অক্ষ 5 এবং যাহা $(5, \frac{10}{3})$ বিন্দুগামী ;

(viii) যাহার নাভিলম্ব $\frac{9}{2}$ এবং উৎকেন্দ্রতা $\frac{5}{4}$;

(ix) যাহার তির্যক্ অক্ষ 4 এবং যাহার শীর্ষবিন্দু কেন্দ্র এবং নাভির মধ্যস্থ দূরত্বকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

2. (i) $x^2 - 4y^2 = 16$; (ii) $5x^2 - 4y^2 = 20$; এবং
(iii) $11x^2 - 25y^2 = 275$

পরাবৃত্তসমূহের উৎকেন্দ্রতা, নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য, নাভিদ্বয়ের স্থানাঙ্ক, এবং নিয়ামকদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর।

3. $9x^2 - 16y^2 - 18x - 64y = 631$ পরাবৃত্তের (i) তির্যক্ অক্ষ, (ii) অনুবন্ধী অক্ষ, (iii) উৎকেন্দ্রতা, (iv) কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক, (v) নাভিদ্বয়ের স্থানাঙ্ক এবং (vi) নিয়ামকদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর।

4. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ পরাবৃত্ত $2x - 3y + 2 = 0$ এবং $5x - 2y = 28$ সরল রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দুগামী এবং ইহার নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য 6 ; a এবং b-এর মান নির্ণয় কর।

5. A-এর মান কত হইলে, $Ax^2 - 5y^2 = 4$ পরাবৃত্ত $(\pm 2, 0)$ বিন্দুদ্বয়গামী হইবে ?

পরাবৃত্তটির (i) নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য, (ii) অক্ষদ্বয়ের দৈর্ঘ্য, এবং (iii) উৎকেন্দ্রতা নির্ণয় কর।

6. যে পরাবৃত্ত $6x - 5y = 3$ সরল রেখার সহিত x-অক্ষের উপর মিলিত হয় এবং যাহার উৎকেন্দ্রতা $\frac{3}{2}$, x-ও y-অক্ষকে অক্ষ ধরিয়া সেই পরাবৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

7. $2x^2 - 3y^2 = 5$ পরাবৃত্ত এবং $2x + 3y = 1$ সরল রেখার ছেদবিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। পরাবৃত্ত দ্বারা সরল রেখার ছিন্ন অংশের মধ্যবিন্দুর অবস্থান কোথায় ?

8. যে পরাবৃত্তের একটি নাভি $(3, -4)$ বিন্দুতে, উৎকেন্দ্রতা $\frac{10}{3}$ এবং $6x = 8y + 5$ সরল রেখা নিয়ামক, সেই পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

পঞ্চম অধ্যায়

স্পর্শক ও অভিলম্ব

(Tangents and Normals)

5·1. কনিকের স্পর্শক ও অভিলম্বের সংজ্ঞা: যে সরল রেখা একটি কনিক-রেখাকে উহার দুইটি সমাপতিত (coincident) বিন্দুতে ছেদ করে তাহাকে ঐ কনিকের **স্পর্শক** বলা হয়। [দুইটি সমাপতিত বিন্দু কার্যতঃ একটি বিন্দুতেই পরিণতি লাভ করে; কাজেই দুইটি সমাপতিত বিন্দুতে ছেদ করা আর স্পর্শ করা একই অর্থ বহন করে। সেই কারণে যে সরল রেখা কনিকের দুইটি সমাপতিত বিন্দুগামী হয় তাহাকে **স্পর্শক** বলে।]

স্পর্শক যে-বিন্দুতে কনিক রেখাকে স্পর্শ করে তাহাকে **স্পর্শবিন্দু** বলে এবং ঐ স্পর্শবিন্দুগামী যে রেখা ঐ বিন্দুতে কনিকের স্পর্শকের উপর লম্বভাবে অবস্থিত হয়, তাহাকে বলে **অভিলম্ব**।

5·2. কনিকের উপরিস্থ একটি নির্দিষ্ট বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের সমীকরণ (Equation of a tangent drawn at a given point on the conic) :

সংজ্ঞা অনুসারে কনিকের উপরিস্থ-দুইটি সমাপতিত বিন্দুগামী সরলরেখা ঐ কনিকের একটি স্পর্শক।

(i) কনিক-রেখাটি যদি $x^2+y^2=a^2$-দ্বারা সূচিত একটি বৃত্ত হয় এবং (x_1, y_1) ও (x^2, y^2) যদি উহার উপরিস্থ দুইটি বিন্দু হয় তবে

$$x_1{}^2+y_1{}^2=a^2,$$
$$x_2{}^2+y_2{}^2=a^2.$$

ইহাদের বিয়োগ ও পক্ষান্তর করিয়া দেখা যায় যে,

$$x_1{}^2-x_2{}^2=-(y_1{}^2-y_2{}^2);$$

বা, $$(x_1 \mp x_2)(x_1-x_2)=-(y_1+y_2)(y_1-y_2);$$

বা, $$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\frac{x_1+x_2}{y_1+y_2}.$$

অতএব, (x_1, y_1) ও (x_2, y_2) বিন্দুগামী সরলরেখার সাধারণ সমীকরণ

$$y-y_1=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}(x-x_1),$$

বৃত্তটির ক্ষেত্রে পরিবর্তিত হইয়া যায়

$$y-y_1=-\frac{x_1+x_2}{y_1+y_2}(x-x_1)$$ সমীকরণে।

এখন, (x_2, y_2) বিন্দুটি যদি সরিয়া আসিয়া (x_1, y_1) বিন্দুটির উপর সমাপতিত হয়, তবে, $x_2 = x_1$ এবং $y_2 = y_1$ হইবে এবং সেক্ষেত্রে ঐ দুই বিন্দুগামী রেখার সমীকরণটি (x_1, y_1) বিন্দুতে বৃত্তটির একটি স্পর্শক সূচিত করিবে।

অতএব, (x_1, y_1) বিন্দুতে $x^2 + y^2 = a^2$-এর স্পর্শকের সমীকরণ,

$$y - y_1 = -\frac{x_1 + x_1}{y_1 + y_1}(x - x_1) = -\frac{x_1}{y_1}(x - x_1);$$

বা, $yy_1 - y_1^2 = -xx_1 + x_1^2$;

বা, $xx_1 + yy_1 = x_1^2 + y_1^2$;

অথবা, $x_1^2 + y_1^2 = a^2$ বলিয়া

$$\mathbf{xx_1 + yy_1 = a^2} \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$$

(ii) দ্বিতীয়ত কনিক-রেখাটি যদি $y^2 = 4ax$ - দ্বারা সূচিত একটি অধিবৃত্ত, এবং (x_1, y_1) ও (x_2, y_2) যদি উহার উপরিস্থ দুইটি বিন্দু হয়, তবে,

$$y_1^2 = 4ax_1,$$
$$y_2^2 = 4ax_2,$$

ইহাদের বিয়োগফল লইলে দেখা যায় যে,

$$y_1^2 - y_2^2 = 4ax_1 - 4ax_2;$$

বা, $(y_1 + y_2)(y_1 - y_2) = 4a(x_1 - x_2)$;

বা, $\dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \dfrac{4a}{y_1 + y_2}$.

সুতরাং (x_1, y_1) ও (x_2, y_2) বিন্দুগামী,

$$y - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x - x_1)$$

সরল রেখাটির সমীকরণ অধিবৃত্তটির ক্ষেত্রে, $y - y_1 = \dfrac{4a}{y_1 + y_2}(x - x_1)$ আকারে পরিবর্তিত হইয়া যায়। স্পষ্টতঃ (x_2, y_2) বিন্দুটি যখন (x_1, y_1) বিন্দুর উপর সমাপতিত হয় তখন ঐ দুই বিন্দুগামী সমীকরণ-সূচিত রেখাটি অধিবৃত্তটির স্পর্শকে রূপান্তরিত হয় এবং তখন $y_2 = y_1$ বসাইলে (x_1, y_1) বিন্দুতে $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণটি হয়, $y - y_1 = \dfrac{4a}{2y_1}(x - x_1) = \dfrac{2a}{y_1}(x - x_1)$;

বা, $yy_1 - y_1^2 = 2ax - 2ax_1$;

বা, $yy_1 = 2ax - 2ax_1 + y_1^2$;

বা, $yy_1 = 2ax - 2ax_1 + 4ax_1 \quad [\because \; y_1^2 = 4ax_1]$

বা, $$\mathbf{yy_1 = 2a(x + x_1)} \quad \cdots \quad (2)$$

(iii) তৃতীয়তঃ, কনিক-রেখাটি যদি $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$-দ্বারা সূচিত একটি উপবৃত্ত এবং (x_1, y_1) ও (x_2, y_2) যদি উহার উপরিস্থ দুইটি বিন্দু হয় তবে,

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1,$$

$$\frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}=1.$$

ইহাদের বিয়োগফল লইয়া পক্ষান্তর করিলে দেখা যায় যে,

$$\frac{y_1^2-y_2^2}{b^2}=-\frac{x_1^2-x_2^2}{a^2};$$

বা, $$\frac{(y_1+y_2)(y_1-y_2)}{b^2}=-\frac{(x_1+x_2)(x_1-x_2)}{a^2};$$

বা, $$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\frac{b^2}{a^2}\frac{(x_1+x_2)}{(y_1+y_2)}.$$

অতএব, (x_1, y_1) ও (x_2, y_2) বিন্দুগামী $y-y_1=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}(x-x_1)$ রেখাটির সমীকরণ, উপবৃত্তটির ক্ষেত্রে পরিবর্তিত হইয়া দাঁড়ায় এইরূপ,

$$y-y_1=-\frac{b^2}{a^2}\frac{(x_1+x_2)}{(y_1+y_2)}(x-x_1).$$

স্পষ্টতঃ, (x_2, y_2) বিন্দুটি যখন (x_1, y_1) বিন্দুর উপর সমাপতিত হয় তখন, $x_2=x_1$ এবং $y_2=y_1$ হয় এবং এই সমীকরণ-সূচিত রেখাটি স্পর্শকে রূপান্তরিত হইয়া যায়।

অতএব, (x_1, y_1) বিন্দুটিতে $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তটির স্পর্শকের সমীকরণ হইবে,

$$y-y_1=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{2x_1}{2y_1}(x-x_1)=\frac{-b^2x_1}{a^2y_1}(x-x_1);$$

বা, $$\frac{yy_1}{b^2}-\frac{y_1^2}{b^2}=-\frac{xx_1}{a^2}+\frac{x_1^2}{a^2};$$

বা, $$\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1 \qquad \left[\because \ \frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1\right]$$

অর্থাৎ $$\frac{\mathbf{xx_1}}{\mathbf{a^2}}+\frac{\mathbf{yy_1}}{\mathbf{b^2}}=1 \qquad \cdots \quad \cdots \qquad (3)$$

(iv) অনুরূপে, কনিক-রেখাটি যদি $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$-সূচিত একটি পরাবৃত্ত হয়। এবং (x_1, y_1) ও (x_2, y_2) যদি উহার উপরিস্থ দুইটি বিন্দু হয়,

তবে $\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}=1$ এবং $\frac{x_2^2}{a^2}-\frac{y_2^2}{b^2}=1$ হইবে

এবং সেই কারণে $\frac{y_1^2-y_2^2}{b^2}=\frac{x_1^2-x_2^2}{a^2}$,

বা, $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{b^2}{a^2}\left(\frac{x_1+x_2}{y_1+y_2}\right)$ হইবে।

অতএব (x_1, y_1) ও (x_2, y_2) বিন্দুগামী রেখার সাধারণ সমীকরণ

$y-y_1=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}(x-x_1)$ পরাবৃত্তটির ক্ষেত্রে পরিবর্তিত হইয়া দাঁড়ায়

এইরূপ : $y-y_1=\frac{b^2(x_1+x_2)}{a^2(y_1+y_2)}(x-x_1)$.

স্পষ্টতঃ, (x_2, y_2) যখন (x_1, y_1)-এর উপর সমাপতিত হয় অর্থাৎ যখন $x_2=x_1$ এবং $y_1=y_2$ হয়, তখন ঐ সমীকরণটি নিম্নরূপে পরিবর্তিত হইয়া (x_1, y_1) বিন্দুতে পরাবৃত্তটির স্পর্শকের সমীকরণে পরিণত হয়।

$$y-y_1=\frac{b^2.2x_1}{a^2.2y_1}(x-x_1)=\frac{b^2x_1(x-x_1)}{a^2y_1};$$

বা, $\frac{yy_1}{b^2}-\frac{y_1^2}{b^2}=\frac{xx_1}{a^2}-\frac{x_1^2}{a^2}$;

বা, $\frac{xx_1}{a^2}-\frac{yy_1}{b^2}=\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}=1$ $\left[\because \frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}=1\right]$

$\therefore$ (x_1, y_1) বিন্দুতে $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, পরাবৃত্তটির সমীকরণ

$$\frac{\mathbf{xx_1}}{\mathbf{a^2}}-\frac{\mathbf{yy_1}}{\mathbf{b^2}}=1 \quad \cdots \quad \cdots \quad (4)$$

বিশেষ দ্রষ্টব্য : (1), (2), (3) ও (4)-এর সমীকরণগুলি হইতে দেখা যায় যে, (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় করিবার সময়,

কনিকের সমীকরণে যেখানে x^2, স্পর্শকের সমীকরণে সেখানে xx_1,
" " " y^2, " " " yy_1,
" " " x, " " " $\frac{1}{2}(x+x_1)$,
এবং " " " y, " " " $\frac{1}{2}(y+y_1)$
বসাইতে হয়।

অনুসিদ্ধান্ত : $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ সূচিত বৃত্তটির উপরিস্থ দুইটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) হইলে,

$$x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c=0,$$

এবং $x_2^2 + y_2^2 + 2gx_2 + 2fy_2 + c = 0.$

$\therefore \quad (x_1^2 - x_2^2) + (y_1^2 - y_2^2) + 2g(x_1 - x_2) + 2f(y_1 - y_2) = 0$;

বা, $(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) + 2g(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)(y_1 + y_2) + 2f(y_1 - y_2) = 0.$

বা, $(x_1 - x_2)(x_1 + x_2 + 2g) = -(y_1 - y_2)(y_1 + y_2 + 2f)$;

$$\therefore \quad \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = -\frac{x_1 + x_2 + 2g}{y_1 + y_2 + 2f}$$

$= (x_1, y_1)$ ও (x_2, y_2) বিন্দুগামী ছেদকের প্রবণতা।

$\therefore$ ঐ ছেদকের সমীকরণ, $y - y_1 = -\dfrac{x_1 + x_2 + 2g}{y_1 + y_2 + 2f}(x - x_1).$

স্পষ্টতঃ, $x_2 = x_1$ এবং $y_2 = y_1$ হইলে ছেদকটি (x_1, y_1) বিন্দুতে বৃত্তটির স্পর্শকে পরিণত হয়।

অতএব, (x_1, y_1) বিন্দুতে $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$, বৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণ হয়,

$$y - y_1 = -\frac{2(x_1 + g)}{2(y_1 + f)}(x - x_1) = -\frac{x_1 + g}{y_1 + f}(x - x_1) ;$$

বা, $yy_1 - y_1^2 + fy - fy_1 = -xx_1 + x_1^2 - gx + gx_1$;

বা, $xx_1 + yy_1 + gx + fy = x_1^2 + y_1^2 + gx_1 + fy_1$;

বা, উভয় পক্ষে $gx_1 + fy_1 + c$ যোগ করিয়া

$$xx_1 + yy_1 + gx + gx_1 + fy + fy_1 + c = x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c ;$$

বা, $\mathbf{xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c = 0.}$

$[\because \; x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c = 0]$

5·3. অবকলনাঙ্কের (Differential Co-efficient-এর) সাহায্যে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় :

কলনের ভাষায় যে-কোন কনিকের সমীকরণকেই $y = f(x)$-রূপে লেখা যায়।

(x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) কোন কনিক $y = f(x)$-এর উপরিস্থ দুইটি বিন্দু হইলে, ঐ দুই বিন্দুগামী ছেদকের প্রবণতা $= \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}.$

স্পষ্টতঃ, (x_2, y_2) বিন্দু (x_1, y_1) বিন্দুটির নিকটতর হইতে নিকটতম অবস্থানে আসিয়া শেষ পর্যন্ত যখন (x_1, y_1)-এর উপর সমাপতিত হয়, তখন ছেদকটি ঐ কনিকের (x_1, y_1) বিন্দুতে একটি স্পর্শকে রূপান্তরিত হয়। এই অবস্থায় y_2-এর মান y_1-এর মানের ও x_2-এর মান x_1-এর মানের নিকটতম হয় এবং তখন ছেদকটির প্রবণতা উহার প্রান্তিক মানে পৌছায়।

ধরা যাক, $y_1 - y_2 = \delta y$ এবং $x_1 - x_2 = \delta x$;

সুতরাং, প্রবণতা $= \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \dfrac{\delta y}{\delta x}$ এবং

উহার প্রান্তিক মান $= \underset{\substack{\delta x \to 0 \\ \delta y \to 0}}{Lt} \dfrac{\delta y}{\delta x} = \dfrac{dy}{dx}$

$= x$ সাপক্ষে y অপেক্ষকটির অবকলনাঙ্ক (Differential co-efficient).

অতএব, (x_1, y_1) ও (x_2, y_2) বিন্দুগামী ছেদকটি যখন উহার প্রান্তিক অবস্থানে স্পর্শকে রূপান্তরিত হয়, তখন উহার সমীকরণ

$y - y_1 = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x - x_1)$ হইতে $y - y_1 = \dfrac{dy_1}{dx_1}(x - x_1)$ সমীকরণে পরিবর্তিত হইয়া যায়।

সুতরাং, **(x_1, y_1) বিন্দুতে $y = f(x)$-এর স্পর্শকের সমীকরণ**

$$\mathbf{y - y_1 = \frac{dy_1}{dx_1}(x - x_1).}$$

বিশেষ দ্রষ্টব্য ঃ কলনবিদ্যার সাহায্যে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় করিবার সময় নিম্নলিখিত ফলগুলি সর্বদা মনে রাখা প্রয়োজন ঃ

(i) $\dfrac{d(by^2)}{dx} = 2by\dfrac{dy}{dx}$; (ii) $\dfrac{d}{dx}(ax^2) = 2ax$;

(iii) $\dfrac{d(cx)}{dx} = c$ এবং (iv) $\dfrac{d(k)}{dx} = 0$,

যেখানে a, b, c ও k ধ্রুবক সংখ্যা।

অনুসিদ্ধান্ত 1. (x_1, y_1) বিন্দুতে $x^2 + y^2 = a^2$-এর স্পর্শকের সমীকরণ ঃ

x-সাপক্ষে $x^2 + y^2 = a^2$-এর অবকলন দ্বারা (by differentiation)

$$\frac{d(x^2)}{dx} + \frac{d(y^2)}{dx} = \frac{d(a^2)}{dx}, \quad \text{বা,} \quad 2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0 ;$$

$\therefore \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{2x}{2y} = -\dfrac{y}{x}$ এবং (x_1, y_1) বিন্দুতে $\dfrac{dy_1}{dx_1} = -\dfrac{x_1}{y_1}$.

$\therefore$ (x_1, y_1) বিন্দুতে

$x^2 + y^2 = a^2$-এর স্পর্শকের সমীকরণ $y - y_1 = -\dfrac{x_1}{y_1}(x - x_1)$;

বা, $xx_1 + yy_1 = x_1^2 + y_1^2 = a^2$.

অনুসিদ্ধান্ত 2. (x_1, y_1) বিন্দুতে $y^2 = 4ax$-এর স্পর্শকের সমীকরণ।

x-সাপক্ষে $y^2 = 4ax$-এর অবকলন (differentiation) দ্বারা

$$\frac{d(y^2)}{dx} = \frac{d(4ax)}{dx}, \quad \text{বা,} \quad 2y\frac{dy}{dx} = 4a ;$$

$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=\frac{4a}{2y}=\frac{2a}{y}$; $\qquad \therefore \quad \frac{dy_1}{dx_1}=\frac{2a}{y_1}$.

অতএব, (x_1, y_1) বিন্দুতে $y^2=4ax$-এর স্পর্শকের সমীকরণ,

$$y-y_1=\frac{dy}{dx}(x-x_1);$$

বা, $y-y_1=\frac{2a}{y_1}(x-x_1)$;

বা, $yy_1-y_1^2=2ax-2ax_1$;

বা, $yy_1=2ax-2ax_1+y_1^2=2ax-2ax_1+4ax_1 \quad [\because y_1^2=4ax_1]$

$=2ax+2ax_1=2a(x+x_1)$.

অনুসিদ্ধান্ত 3. (x_1, y_1) বিন্দুতে $\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}=1$-এর স্পর্শকের সমীকরণ।

x-সাপেক্ষে $\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}=1$-এর অবকলন (differentiation) দ্বারা

$$\frac{d(x^2/a^2)}{dx}\pm\frac{d(y^2/b^2)}{dx}=\frac{d(1)}{dx};$$

বা, $\frac{2x}{a^2}\pm\frac{2y}{b^2}\frac{dy}{dx}=0$;

বা, $\frac{dy}{dx}=\mp\frac{2x/a^2}{2y/b^2}=\mp\frac{b^2x}{a^2y}$;

$\therefore \quad \frac{dy_1}{dx_1}=\mp\frac{b^2x_1}{a^2y_1}$.

নির্ণেয় স্পর্শকের সমীকরণ $y-y_1=\mp\frac{b^2x_1}{a^2y_1}(x-x_1)$;

বা, $\frac{yy_1}{b^2}-\frac{y_1^2}{b^2}=\mp\left(\frac{xx_1}{a^2}-\frac{x_1^2}{a^2}\right)$;

বা, $\frac{xx_1}{a^2}\pm\frac{yy_1}{b^2}=\frac{x_1^2}{a^2}\pm\frac{y_1^2}{b^2}=1$; বা, $\frac{xx_1}{a^2}\pm\frac{yy_1}{b^2}=1$.

উদাহরণমালা

উদা. 1. নিম্নলিখিত কনিক রেখাগুলির উপর প্রদত্ত বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর :

(i) $x^2+y^2+6x-2y+2=0$-এর $(-1, 3)$ বিন্দুতে ;

(ii) $y^2=24x$-এর $(6, 12)$ বিন্দুতে ;

(iii) $3x^2+5y^2=120$-এর $(5, -3)$ বিন্দুতে ;

(iv) $3x^2-8y^2=16$-এর $(4, -2)$ বিন্দুতে ।

(i) $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ বৃত্তে (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $xx_1+yy_1+g(x+x_1)+f(y+y_1)+c=0.$

$\therefore$ $x^2+y^2+6x-2y+2=0,$
বৃত্তে $(-1, 3)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ হইবে
$x.(-1)+y.3+3.(x-1)-(y+3)+2=0$;

বা, $-x+3y+3x-3-y-3+2=0$; বা, $2x+2y=4$;

বা, $\mathbf{x+y=2.}$

(ii) $y^2=4ax$ অধিবৃত্তে (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ হয়,

$$yy_1=2a(x+x_1).$$

এখানে, $y^2=24x$ বা $y^2=4.6.x$ অধিবৃত্তে a-র স্থলে 6 বসিয়াছে এবং প্রদত্ত বিন্দুর $x_1=6, y_1=12$ হওয়ায় নির্ণেয় সমীকরণ $y.12=2.6(x+6)$;

বা, $y=x+6$; বা, $x-y+6=0.$

$\therefore$ (6, 12) বিন্দুতে $y^2=24x$-এর স্পর্শকের সমীকরণ, $x-y+6=0.$

(iii) $3x^2+5y^2=120$-এর দুইপক্ষকে 120 দিয়া ভাগ করিলে, $\frac{x^2}{40}+\frac{y^2}{24}=1$ উপবৃত্তটি পাওয়া যায়। (x_1, y_1) বিন্দুতে $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$-এর স্পর্শকের সমীকরণ $\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1$; সেই সূত্র অনুসারে $(5, -3)$ বিন্দুতে $\frac{x^2}{40}+\frac{y^2}{24}=1$-এর স্পর্শকের সমীকরণ $\frac{5x}{40}+\frac{-3y}{24}=1$;

বা, $\frac{x}{8}-\frac{y}{8}=1$; বা, $\mathbf{x-y=8.}$

(iv) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ পরাবৃত্তের (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ হয় $\frac{xx_1}{a^2}-\frac{yy_1}{b^2}=1$; সেই সূত্র অনুসারে $3x^2-8y^2=16$; বা, $\frac{3x^2}{16}-\frac{8y^2}{16}=1$ পরাবৃত্তটির $(4, -2)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ হইবে $\frac{3x.4}{16}-\frac{8y.-2}{16}=1$;

বা, $\frac{3x}{4}+y=1$; বা, $\mathbf{3x+4y=4.}$

উদা. 2. $x-y=k$ সরল রেখাটি যদি $x^2+y^2-4x-6y+11=0$-কে স্পর্শ করে তবে k-এর মান ও স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক কি হইবে ?

সরল রেখার সমীকরণ হইতে $x=y+k$ মান বৃত্তটির সমীকরণে বসাইলে, উহাদের ছেদবিন্দুর কোটি নির্ণায়ক সমীকরণটি হয় $(y+k)^2+y^2-4(y+k)-6y+11=0$;

বা, $2y^2+(2k-10)y+k^2-4k+11=0.$ ... ... (1)

সরল রেখাটি স্পর্শক বলিয়া এই দ্বিঘাত সমীকরণে বীজদ্বয় সমান হইবে।

অর্থাৎ সমীকরণটির নিরূপক $(2k-10)^2-4.2.(k^2-4k+11)=0$;

বা, $-4k^2-8k+12=0$; বা, $k^2+2k-3=0$;

বা, $(k+3)(k-1)=0$ হইবে।

$\therefore \quad k=-3$ বা $1.$

(1)-এ $k=-3$ বসাইলে, $2y^2-16y+32=0$; বা, $y^2-8y+16=0$;

বা, $(y-4)^2=0$; $\therefore\ y=4$ এবং $x=y+k=4-3=1$ হয়।

$\therefore$ স্পর্শবিন্দুর নির্ণেয় স্থানাঙ্ক **(1, 4).**

উদা. 3. $y^2=24x$-এর নাভিলম্বের প্রান্তবিন্দুদ্বয়ে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

$y^2=24x$ বা $y^2=4.6.x$ অধিবৃত্তটি নাভির স্থানাঙ্ক (6,0) ; স্পষ্টতঃ, নাভিলম্বদ্বয়ের প্রান্তবিন্দুদ্বয়ের ভুজও 6 হইবে। সুতরাং ঐ প্রান্তবিন্দুদ্বয়ের

কোটি $=y=\pm\sqrt{24x}=\pm\sqrt{24\times6}=\pm\sqrt{144}=\pm12$ হইবে।

$\therefore$ নাভিলম্বটির প্রান্তবিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক হইবে (6,12) ও (6, −12).

অতএব (6, 12) প্রান্তবিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $12y=12(x+12)$;

বা, $y=x+12$; বা, $\mathbf{x-y+12=0}$;

এবং (6, −12) প্রান্তবিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ হইবে

$-12y=12(x+6)$; বা, $-y=x+6$; বা, $\mathbf{x+y+6=0.}$

উদা. 4. $2x^2+3y^2=56$ উপবৃত্তটির যে-বিন্দুর কোটি, উহার ভুজের দ্বিগুণ, সেই বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

উপবৃত্তটির $(x_1, 2x_1)$ বিন্দুর কোটি, তাহার ভুজের দ্বিগুণ।

$\therefore$ উপবৃত্তটির সমীকরণে $x=x_1$ এবং $y=2x_1$ বসাইলে,

$2x_1^2+3(2x_1)^2=56,$

বা, $14x_1^2=56$; বা, $x_1^2=4$; বা, $x_1=\pm2$;

এবং $y_1=2x_1=2\times(\pm2)=\pm4,$ পাওয়া যায়।

$\therefore$ $(x_1, 2x_1)$ − সূচিত বিন্দুর স্থানাঙ্ক-দুইটি হয় (2, 4) ও (−2, −4). (2, 4) বিন্দুতে উপবৃত্তটির স্পর্শকের সমীকরণ $2x.2+3y.4=56$;

বা $\mathbf{x+3y=14}$;

এবং (−2, −4) বিন্দুতে উপবৃত্তটির স্পর্শকের সমীকরণ হয়

$2x\times(-2)+3y\times(-4)=56$; বা $-4x-3y=14$;

বা, $\mathbf{x+3y+14=0.}$

উদা. 5. $x^2 - y^2 = 9$, পরাবৃত্তের (5, 4) বিন্দুগামী স্পর্শকটি x-অক্ষকে কোন বিন্দুতে ছেদ করে ?

(5, 4) বিন্দুতে $x^2 - y^2 = 9$ পরাবৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণ হয় $5x - 4y = 9$;

$\therefore$ x-অক্ষ বা $y = 0$ রেখার সহিত এই স্পর্শকের ছেদবিন্দুর ভুজ-নির্ণায়ক সমীকরণ হইবে $5x - 4 \times 0 = 9$; $\therefore$ $x = \frac{9}{5}$.

$\therefore$ $(\frac{9}{5}, 0)$ বিন্দুতে স্পর্শকটি x-অক্ষকে ছেদ করিবে।

প্রশ্নমালা 19

1. নিম্নলিখিত সমীকরণসূচিত কনিক রেখাগুলির উল্লিখিত বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর :

(i) $x^2 + y^2 = 20$-এর $(-2, 4)$ বিন্দুতে ;
(ii) $x^2 + y^2 - 16x + 4y - 5 = 0$-এর $(0, -5)$ বিন্দুতে ;
(iii) $y^2 = 4x$-এর $(9, -6)$ বিন্দুতে ;
(iv) $y^2 = -12x$-এর $(-3, 6)$ বিন্দুতে ;
(v) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$-এর (4, 0) বিন্দুতে ;
(vi) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$-এর (0, 4) বিন্দুতে ;
(vii) $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{8} = 1$-এর (3, 2) বিন্দুতে ;
(viii) $5x^2 - 8y^2 = 40$-এর (4, 5) বিন্দুতে ;
(ix) $3x^2 - 4y^2 = 48$-এর $(-4, -3)$ বিন্দুতে ;
(x) $4x^2 - 8y^2 = 16$-এর $(4, -2)$ বিন্দুতে।

2. a-এর মান কত হইলে $y = 3x + 1$ রেখাটি $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তটিকে স্পর্শ করিবে ?

3. $y^2 = 5x$ অধিবৃত্তের যে-স্পর্শকটি $20x - 4y + 9 = 0$ রেখাটির সমান্তরাল সেই স্পর্শকের সমীকরণ ও স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

4. $y^2 = 9x$ অধিবৃত্তের নাভিলম্বের প্রান্তবিন্দুদ্বয়ে অঙ্কিত স্পর্শকদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর।

5. দেখাও যে $x - 3y + 9 = 0$ রেখাটি $6x^2 + 27y^2 = 162$, উপবৃত্তটিকে স্পর্শ করে ; স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

6. $3x^2 + 4y^2 = 84$-সূচিত উপবৃত্তটির যে-বিন্দুর কোটি -3, সেই বিন্দুতে উহার স্পর্শকটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

7. $3x^2+4y^2=48$ সূচিত উপবৃত্তের নাভিলম্বটির যে-প্রান্ত দ্বিতীয় পাদে অবস্থিত সেই প্রান্তে উপবৃত্তটির স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

8. দেখাও যে $3x-8y=2$ রেখা $5x^2-36y^2=180$ সূচিত পরাবৃত্তকে স্পর্শ করে ; স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

9. m-এর কত মান হইলে $5y=mx-9$ রেখাটি $7x^2-16y^2=112$ সূচিত পরাবৃত্তকে স্পর্শ করিবে ?

10. $4x-3y+9=0$ রেখাটি $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, পরাবৃত্তটিকে স্পর্শ করে। পরাবৃত্তটির উৎকেন্দ্রতা $\frac{4}{3}$ হইলে a ও b-এর মান নির্ণয় কর।

5·4. $y=mx+c$ রেখাটির কনিকের স্পর্শক হওয়ার শর্ত :

(i) $y=mx+c$ রেখা $x^2+y^2=a^2$ বৃত্তকে স্পর্শ করিবে যদি

$x^2+(mx+c)^2-a^2=0$, [বৃত্তের সমীকরণে y-এর স্থলে $mx+c$ বসাইয়া]

বা, $(1+m^2)x^2+2mcx+c^2-a^2=0$, সমীকরণটির বীজদ্বয় সমান হয়।

ইহার শর্ত এই যে, নিরূপক $4m^2c^2-4(1+m^2)(c^2-a^2)=0$,

অর্থাৎ $a^2+m^2a^2-c^2=0$ বা $c^2=a^2(1+m^2)$;

বা, $\mathbf{c=\pm a\sqrt{1+m^2}}$ হইবে।

টীকা : স্পষ্টতঃ, m-এর সকল মানের জন্য $\mathbf{y=mx\pm a\sqrt{1+m^2}}$ সর্বদা $\mathbf{x^2+y^2=a^2}$, বৃত্তের স্পর্শক। $mx-y\pm a\sqrt{1+m^2}=0$ এবং $xx_1+yy_1-a^2=0$, উভয়ে একই বৃত্তের একই স্পর্শক বলিয়া, $\frac{m}{x_1}=\frac{-1}{y_1}=\frac{\pm a\sqrt{1+m^2}}{-a^2}=\frac{\pm\sqrt{1+m^2}}{-a}$;

$\therefore\ x_1=\frac{-a}{\pm m\sqrt{1+m^2}}$ এবং $y_1=\frac{a}{\pm\sqrt{1+m^2}}$; অর্থাৎ স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক হইবে $\left(\frac{\mathbf{-a}}{\mathbf{m\sqrt{1+m^2}}}, \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{\sqrt{1+m^2}}}\right)$.

(ii) $y=mx+c$ যদি $y^2=4ax$ অধিবৃত্তকে স্পর্শ করে, তবে

$(mx+c)^2=4ax$, বা, $m^2x^2+2(mc-2a)x+c^2=0$-এর বীজদ্বয় সমান হইবে। ইহার শর্ত এই যে, এই সমীকরণের নিরূপক, $4(mc-2a)^2-4m^2c^2=0$ হইবে। অর্থাৎ $-4amc+4a^2=0$; বা, $mc=a$; বা $\mathbf{c=\frac{a}{m}}$ হইবে।

টীকা : m-এর সকল মানের জন্য $\mathbf{y=mx+\frac{a}{m}}$ **সর্বদা** $\mathbf{y^2=4ax}$**-এর স্পর্শক** এবং তাহা $yy_1=2a(x+x_1)$-এর সহিত এক ও অভিন্ন।

সুতরাং $\frac{y_1}{1}=\frac{2a}{m}=\frac{2ax_1}{a/m}=2mx_1$ বলিয়া $x_1=\frac{a}{m^2}$ এবং $y_1=\frac{2a}{m}$;

অর্থাৎ স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{m}^2}, \frac{2\mathrm{a}}{\mathrm{m}}\right)$.

(iii) $y=mx+c$ যদি $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ বা $b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2=0$ উপবৃত্তকে স্পর্শ করে, তবে $b^2x^2+a^2(mx+c)^2-a^2b^2=0$

বা $(b^2+a^2m^2)x^2+2a^2mcx+a^2c^2-a^2b^2=0$-এর বীজদ্বয় সমান হইবে। তাহার শর্ত, সমীকরণটির নিরূপক $=0$, হইবে;

অর্থাৎ $4a^4m^2c^2=4(b^2+a^2m^2)a^2(c^2-b^2)$,

বা, $a^2m^2c^2=b^2c^2+a^2m^2c^2-b^4-a^2b^2m^2$;

বা, $b^2c^2=b^4+a^2b^2m^2=b^2(b^2+a^2m^2)$ বা $c^2=a^2m^2+b^2$.

অর্থাৎ $\mathbf{c=\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}}$ হইবে।

টীকা : স্পষ্টতঃ, m-এর সকল মানের জন্য $\mathbf{y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}}$ সর্বদা $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তের স্পর্শক। $mx-y\pm\sqrt{a^2m+b^2}=0$ এবং $x\frac{x_1}{a^2}+y\frac{y_1}{b^2}-1=0$ একই সমীকরণ বুঝায় বলিয়া $\frac{x_1/a^2}{m}=\frac{y_1/b^2}{-1}=\frac{-1}{\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}}$

সুতরাং $x_1=\frac{-a^2m}{\sqrt{a^2m^2+b^2}}$ এবং $y_1=\frac{b^2}{\sqrt{a^2m^2+b^2}}$ হইবে।

অর্থাৎ $\left(\frac{-\mathrm{a}^2\mathrm{m}}{\sqrt{\mathrm{a}^2\mathrm{m}^2+\mathrm{b}^2}}, \frac{\mathrm{b}^2}{\sqrt{\mathrm{a}^2\mathrm{m}^2+\mathrm{b}^2}}\right)$ স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক।

(iv) $y=mx+e$ যদি $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ বা $b^2x^2-a^2y^2-1=0$, পরাবৃত্তকে স্পর্শ করে, তবে $mx-y+c=0$ এবং $x\frac{x_1}{a^2}-y\frac{y_1}{b^2}-1=0$ একই স্পর্শকের সমীকরণ হইবে।

$\therefore \frac{x_1/a^2}{m}=\frac{y_1/b^2}{1}=\frac{-1}{c}$ হইবে। সেই কারণে $x_1=\frac{-a^2m}{c}$ এবং $y^1=\frac{-b^2}{c}$ হইবে। পরাবৃত্তের সমীকরণে প্রাপ্ত মান বসাইয়া

$$\frac{(-a^2m/c)^2}{a^2}-\frac{(-b^2/c)^2}{b^2}=1;$$

বা, $\frac{a^4m^2}{a^2c^2}-\frac{b^4}{b^2c^2}=1$; বা, $a^4b^2m^2-a^2b^4=a^2b^2c^2$;

বা, $c^2=a^2m^2-b^2$; বা, $\mathbf{c=\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}}$ হইবে। ইহাই নির্ণেয় শর্ত।

টীকা ঃ স্পষ্টতঃ, m-এর সকল মানের জন্য $\mathbf{y=mx\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}}$ **সর্বদা** $\mathbf{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1}$ **পরাবৃত্তের স্পর্শক।** $x_1=\frac{-a^2m}{c}$ এবং $y_1=-\frac{b^2}{c}$-এ c-র মান বসাইলে ঐ স্পর্শকের স্থানাঙ্ক হইবে $\left(\frac{-\mathbf{a^2m}}{\sqrt{\mathbf{a^2m^2-b^2}}}, \frac{-\mathbf{b^2}}{\sqrt{\mathbf{a^2m^2-b^2}}}\right)$

উদাহরণমালা

উদা. 1. $x^2+y^2=3$ সূচিত বৃত্তের যে-দুইটি স্পর্শক x-অক্ষের সহিত 60° কোণ উৎপন্ন করে, তাহাদের সমীকরণ নির্ণয় কর।

বৃত্তটির সমীকরণ, $x^2+y^2=3=(\pm\sqrt{3})^2$ বলিয়া, m-এর সকল মানের জন্যই $y=mx\pm\sqrt{3}\sqrt{1+m^2}$ বৃত্তটির স্পর্শক হইবে। যেহেতু ইহারা x-অক্ষের সহিত 60° কোণ উৎপন্ন করে, সেইহেতু $m=\tan 60°=\sqrt{3}$.

∴ নির্ণেয় সমীকরণদ্বয়, $y=\sqrt{3}x\pm\sqrt{3}\sqrt{1+(\sqrt{3})^2}$

$$=\sqrt{3}x\pm\sqrt{3}\sqrt{4},$$

অর্থাৎ $\mathbf{y=\sqrt{3}x\pm 2\sqrt{3}}$.

উদা. 2. দেখাও যে, $x^2+y^2-4x+6y+8=0$ এবং $x^2+y^2-10x-6y+14=0$ পরস্পরকে $(3,-1)$ বিন্দুতে স্পর্শ করে।

$(3,-1)$ বিন্দুটির স্থানাঙ্ক দ্বারা উভয় সমীকরণই সিদ্ধ হয় বলিয়া বিন্দুটি উভয় বৃত্তের উপরই অবস্থিত। এখন, বিন্দুটিতে উভয় বৃত্ত পরস্পরকে স্পর্শ করিলে বিন্দুটিতে অঙ্কিত প্রথম বৃত্তের স্পর্শক দ্বিতীয় বৃত্তেরও স্পর্শক হইবে।

$(3,-1)$ বিন্দুতে প্রথম বৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণ

$$3x-y-2(x+3)+3(y-1)+8=0, \text{ বা, } x+2y=1 \quad \cdots \quad (1)$$

$(3,-1)$ বিন্দুতে দ্বিতীয় বৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণ

$$3x-y-5(x+3)-3(y-1)+14=0,$$

বা, $-2x-4y+2=0$, বা, $x+2y=1$. … … (2)

(1) এবং (2) হইতে দেখা যায়, $x+2y=1$ সরল রেখাটি $(3,-1)$ বিন্দুতে উভয় বৃত্তেরই স্পর্শক হইয়াছে।

∴ বৃত্তদ্বয় $(3,-1)$ বিন্দুতে পরস্পরকে স্পর্শ করে।

উদা. 3. প্রমাণ কর যে, $x^2+y^2-6x+4y+12=0$ এবং $x^2+y^2-12x+4y+36=0$ বৃত্তদ্বয় পরস্পরকে স্পর্শ করে। স্পর্শবিন্দুটি নির্ণয় কর।

বৃত্তের সমীকরণ $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ হইলে,

কেন্দ্র হয় $(-g, -f)$ এবং ব্যাসার্ধ হয় $\sqrt{g^2+f^2-c}$.

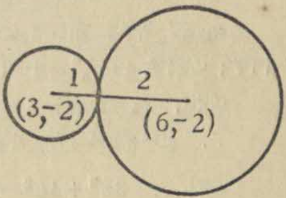
$\therefore$ প্রথম বৃত্তের কেন্দ্র $(3, -2)$ এবং ব্যাসার্ধ 1 ;

এবং দ্বিতীয় বৃত্তের কেন্দ্র $(6, -2)$ এবং ব্যাসার্ধ 2.

এখন, কেন্দ্রদ্বয়ের দূরত্ব $= \sqrt{(3-6)^2+(-2+2)^2} = 3$

$= 1+2 =$ বৃত্তদ্বয়ের ব্যাসার্ধ-সমষ্টি ;

$\therefore$ বৃত্তদ্বয় পরস্পরকে স্পর্শ করে।



এখন, বৃত্তদ্বয় পরস্পরকে স্পর্শ করিলে, কেন্দ্রদ্বয় সংযোজক সরল রেখা স্পর্শবিন্দুগামী হয় এবং স্পর্শবিন্দু উক্ত সরল রেখাকে ব্যাসার্ধদ্বয়ের অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে। অতএব, স্পর্শবিন্দুটি (x, y) হইলে,

$$x = \frac{2\times3+1\times6}{1+2} = 4, \text{ এবং } y = \frac{2\times(-2)+1\times(-2)}{1+2} = -2.$$

$\therefore$ নির্ণেয় স্পর্শবিন্দু **(4, −2).**

দ্রষ্টব্য ঃ এস্থলে, বৃত্তদ্বয়ের বহিঃস্পর্শ হইয়াছে। অন্তঃস্পর্শের ক্ষেত্রে কেন্দ্রদ্বয়ের দূরত্ব ব্যাসার্ধদ্বয়ের অন্তরের সমান।

উদা. 4. $y = x\sin\alpha + a\sec\alpha$ দ্বারা সূচিত সরল রেখা $x^2+y^2=a^2$ বৃত্তকে স্পর্শ করিলে, প্রমাণ কর যে, $\cos^2\alpha = 1.$ [C. U., B.A. & B.Sc., 1919]

$y = mx + c$ সরল রেখাটি $x^2+y^2=a^2$ বৃত্তের স্পর্শক হইলে,

$c^2 = a^2(1+m^2)$;

অতএব, এক্ষেত্রে, প্রদত্ত সরল রেখাটি প্রদত্ত বৃত্তের স্পর্শক হইলে,

$a^2\sec^2\alpha = a^2(1+\sin^2\alpha)$, বা, $\sec^2\alpha = 1+\sin^2\alpha$,

বা, $\sec^2\alpha - 1 = \sin^2\alpha$, বা, $\tan^2\alpha = \sin^2\alpha$,

বা, $\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \sin^2\alpha$, বা, $\dfrac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \cos^2\alpha$;

$\therefore$ $\mathbf{\cos^2\alpha = 1}$.

উদা. 5. $2x-3y+6=0$ সরল রেখার সমান্তরাল, $y^2=8x$ অধিবৃত্তের স্পর্শকটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

$2x-3y+6=0$ সরল রেখায় প্রবণতা $2/3$ বলিয়া, $y=\frac{2}{3}x+a/\frac{2}{3}$ উহার সমান্তরাল।

এখন, $y^2=8x=4.2x$ বলিয়া, $a=2$ লিখিলে, $y=\frac{2}{3}x+2/\frac{2}{3}$;

বা, $y=\frac{2}{3}x+3$ রেখাটি $2x-3y+6=0$-এর সমান্তরাল এবং $y^2=8x$-এর স্পর্শক হইবে।

∴ নির্ণেয় স্পর্শকের সমীকরণ হইল

$$3y = 2x + 9,$$

বা, $2x - 3y + 9 = 0.$

উদা. 6. $y^2 = 16x$ অধিবৃত্তের যে স্পর্শক x-অক্ষের সহিত $\pi/4$ কোণ উৎপন্ন করে, তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

m-এর সকল মানের জন্যই $y = mx + a/m$ সরল রেখা $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তের স্পর্শক ; এস্থলে, $a = \frac{16}{4} = 4$ বলিয়া $y = mx + 4/m$ সরল রেখা $y^2 = 16x$-এর স্পর্শক।

এখন, $m = \tan \pi/4 = 1$;

∴ $y = mx + 4/m$-এ $m = 1$ বসাইয়া, নির্ণেয় স্পর্শকের সমীকরণ $y = x + 4.$

উদা. 7. $3x^2 + 4y^2 = 16$ উপবৃত্তটির যে-স্পর্শকগুলি $3x - 2y + 5 = 0$ সরল রেখাটির সমান্তরাল, তাহাদের সমীকরণ নির্ণয় কর।

$3x - 2y + 5 = 0$ সরল রেখার সমান্তরাল যে-কোন সরল রেখার সমীকরণ

$$3x - 2y + c = 0,$$

বা, $2y = 3x + c$ ... ... (1)

বা, $y = \frac{3}{2}x + c/2.$

এখন, উপবৃত্তের সমীকরণটির উভয় পক্ষকে 16 দ্বারা ভাগ করিয়া সমীকরণটিকে $\frac{x^2}{16/3} + \frac{y^2}{4} = 1$ রূপে লিখিলে দেখা যায়, $a^2 = \frac{16}{3}$ এবং $b^2 = 4.$

∴ সরল রেখা (1)-এর ঐ উপবৃত্তের স্পর্শক হইবার শর্ত হইল

$$\frac{c}{2} = \pm\sqrt{\frac{16}{3} \cdot \frac{9}{4} + 4} = \pm 4 \text{ ;}$$

∴ $c = \pm 8.$ .... (2)

∴ উপবৃত্তটির দুইটি স্পর্শক প্রদত্ত সরল রেখার সমান্তরাল হইবে এবং (1) ও (2) হইতে ঐ স্পর্শকদ্বয়ের সমীকরণ

$$2y = 3x + 8 \text{ এবং } 2y = 3x - 8.$$

উদা. 8. $4x^2 + 5y^2 = 24$ উপবৃত্তটির যে স্পর্শকগুলি $5x - 2y + 3 = 0$ সরল রেখার উপর লম্ব, তাহাদের সমীকরণ নির্ণয় কর।

$5x - 2y + 3 = 0$ সরল রেখার লম্ব যে-কোন সরল রেখার সমীকরণ

$2x + 5y = 5c$ ... ... (1)

বা, $y = -\frac{2}{5}x + c$ ... ... (2)

এখন, উপবৃত্তটির সমীকরণের উভয় পক্ষকে 24 দ্বারা ভাগ করিয়া সমীকরণটিকে $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{24/5} = 1$ রূপে লিখিলে দেখা যায়, $a^2 = 6$ এবং $b^2 = \frac{24}{5}.$

∴ সরল রেখা (1) বা (2)-এর ঐ উপবৃত্তের স্পর্শক হইবার শর্ত হইল

$$c = \pm\sqrt{6(-\tfrac{2}{5})^2 + \tfrac{24}{5}} = \pm\tfrac{12}{5}. \qquad \cdots \quad (3)$$

∴ (1) ও (3) হইতে দেখা যায়, উপবৃত্তের দুইটি স্পর্শক প্রদত্ত সরল রেখার লম্ব হইবে, এবং এই দুইটি স্পর্শকের সমীকরণ

$$\mathbf{2x+5y=12} \text{ এবং } \mathbf{2x+5y+12=0}.$$

উদা. 9. $3x^2+5y^2=30$ উপবৃত্তটির যে স্পর্শকগুলি x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সহিত 45° কোণে নত, তাহাদের সমীকরণ নির্ণয় কর।

উপবৃত্তের সমীকরণের উভয় পক্ষকে 30 দ্বারা ভাগ করিয়া সমীকরণকে $\dfrac{x^2}{10}+\dfrac{y^2}{6}=1$ রূপে লিখিলে দেখা যায়,

$$a^2=10 \text{ এবং } b^2=6.$$

আবার, এস্থলে স্পর্শকের প্রবণতা $m=\tan 45°=1$.

∴ নির্ণেয় স্পর্শকের সমীকরণ $y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$;

অর্থাৎ $y=x\pm\sqrt{10+6}=x\pm 4$.

অতএব প্রদত্ত শর্ত অনুসারে স্পর্শক-দুইটির সমীকরণ হইবে,

$$\mathbf{y=x+4} \quad \text{এবং} \quad \mathbf{y=x-4}.$$

উদা. 10. প্রমাণ কর যে, $lx+my=n$, $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, উপবৃত্তটির স্পর্শক হইলে $a^2l^2+b^2m^2=n^2$ হইবে।

উপবৃত্তটির যে-কোনও স্পর্শকের সমীকরণ

$$y=m_1x+\sqrt{a^2m_1^2+b^2} ;$$

∴ $lx+my=n$, বা, $y=-\dfrac{l}{m}x+\dfrac{n}{m}$ স্পর্শক হইলে

$$m_1=-\frac{l}{m}, \text{ এবং } \sqrt{a^2m_1^2+b^2}=\frac{n}{m} ;$$

$$\therefore\ a^2\left(-\frac{l}{m}\right)^2+b^2=\frac{n}{m^2} ;$$

বা, $a^2l^2+b^2m^2=n$.

প্রশ্নমালা 20

1. প্রমাণ কর যে, $y-3x=10$, সরল রেখাটি $x^2+y^2=10$ বৃত্তকে দুইটি সমাপতিত বিন্দুতে ছেদ করে। ঐ ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

2. প্রমাণ কর যে, $x+\sqrt{3}y=8$ সরল রেখাটি $x^2+y^2=16$-কে স্পর্শ করে। স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

3. প্রমাণ কর যে, $x^2+y^2-2ax-2ay+a^2=0$, বৃত্তটি x ও y-অক্ষকে স্পর্শ করে।

4. c-এর মান কত হইলে, m-এর সকল মানের জন্য $y=mx+c$ রেখাটি $x^2+y^2=4y$ বৃত্তকে স্পর্শ করিবে।

5. $x^2+y^2=45$-এর যে-স্পর্শকগুলির কোটি, $y=-6$, তাহাদের সমীকরণ নির্ণয় কর।

6. $x^2+y^2=5$ বৃত্তটির যে-স্পর্শকগুলি $2x+y=4$ রেখার উপর লম্ব তাহাদের সমীকরণ নির্ণয় কর।

প্রমাণ কর যে—

7. $y=3x+2$ রেখা $y^2=24x$-কে স্পর্শ করে ;

8. $4(y-3x)=5$ রেখা $y^2=15x$ অধিবৃত্তকে স্পর্শ করে ;

9. $4a(y-b)=x$ রেখা $ay^2=bx$ অধিবৃত্তকে স্পর্শ করে ;

10. দেখাও যে, $y=m(x+a)+\frac{a}{m}$ রেখা $y^2=4a(x+a)$-এর স্পর্শক।

11. দেখাও যে, m-এর সকল মানের জন্য $x+my+am^2=0$ রেখাটি $y^2=4ax$-এর স্পর্শক হইবে।

[সংকেত : $y=m'x+\frac{a}{m'}$ সর্বদা $y^2=4ax$-এর স্পর্শক ; $m'=\frac{1}{m}$ বসাইয়া অগ্রসর হও।]

12. 7 হইতে 11 পর্যন্ত প্রশ্নগুলির প্রত্যেকটি হইতে স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

13. $y=mx+c$ রেখাটি যদি $y^2=5x$ অধিবৃত্তকে স্পর্শ করে এবং তাহা যদি $5y+3x+25=0$ রেখাটির সমান্তরাল হয়, তবে m ও c-এর মান নির্ণয় কর।

14. $y^2=24x$-এর যে-স্পর্শক $x+3y+4=0$ রেখার উপর লম্ব, তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

15. $y^2=bx$-এর একটি স্পর্শক x-অক্ষের সহিত $60°$ কোণ উৎপন্ন করে। ঐ স্পর্শকের সমীকরণ এবং স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

16. $y^2=8x$-এর একটি স্পর্শক $y=3x+5$ রেখাটির সহিত $45°$ কোণ উৎপন্ন করে। স্পর্শকটির সমীকরণ এবং অধিবৃত্তটির উপর উহার স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

[সংকেত : $y^2=4.2.x$-এর স্পর্শক $y=mx+\frac{a}{m}$ যেন x-অক্ষের সহিত θ কোণ এবং $y=3x+5$ যেন x-অক্ষের সহিত ϕ কোণ উৎপন্ন করে ; $\tan\theta=m$ এবং $\tan\phi=3$ এবং $\tan(\theta-\phi)=\tan 45°=1$; এইভাবে অগ্রসর হও।]

17. $y^2 = 4ax$-এর t বিন্দুতে (অর্থাৎ at^2, $2at$ বিন্দুতে) স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

18. $x^2 + 3y^2 = 3$, উপবৃত্তের যে-স্পর্শক $y = 4x - 3$-এর সমান্তরাল সেই স্পর্শকের সমীকরণ ও স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

19. $3x - 4y = 8$-এর সমান্তরাল যে-রেখা $9x^2 + 32y^2 = 96$-কে স্পর্শ করে সেই রেখার সমীকরণ ও স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

20. $6x + 5y + 4 = 0$-এর উপর লম্ব যে-রেখা $2x^2 + 3y^2 = 8$ অধিবৃত্তকে স্পর্শ করে সেই রেখার সমীকরণ ও স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

21. $3x^2 + 5y^2 = 32$ অধিবৃত্তটির যে-স্পর্শক $5x + 3y + 1 = 0$ রেখার উপর লম্ব সেই স্পর্শকের সমীকরণ এবং স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

22. $2x^2 + 3y^2 = 18$ উপবৃত্তটির যে-স্পর্শকটি x-অক্ষের ধনাত্মক-মুখী অংশের সহিত $60°$ কোণ উৎপন্ন করে সেই স্পর্শকের সমীকরণ এবং উহার স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

23. $5x - 9y + 8 = 0$ সরল রেখার সমান্তরাল $x^2 - 9y^2 = 9$ পরাবৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

24. $2x + 3y + 8 = 0$ সরল রেখার উপর লম্ব $8x^2 - 9y^2 = 72$ পরাবৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

25. x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সহিত $60°$ কোণ উৎপন্নকারী $5x^2 - 7y^2 = 35$ পরাবৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

26. দেখাও যে, $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 21 = 0$ এবং $x^2 + y^2 - 14x + 6y + 57 = 0$, এই দুইটি বৃত্ত পরস্পরকে $(6, -3)$ বিন্দুতে স্পর্শ করে।

27. দেখাও যে, $x^2 + y^2 + 8x - 4y + 15 = 0$ এবং $x^2 + y^2 - 8x - 12y + 7 = 0$, এই বৃত্ত-দুইটি বহিঃস্থভাবে পরস্পরকে স্পর্শ করে। উহাদের স্পর্শবিন্দু নির্ণয় কর।

28. দেখাও যে, $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 77 = 0$ এবং $x^2 + y^2 - 10x + 8y + 1 = 0$, বৃত্তদ্বয় পরস্পরকে অন্তঃস্থভাবে স্পর্শ করে। উহাদের স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

29. $lx + my + 1 = 0$ রেখাটি যদি $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তকে স্পর্শ করে তবে দেখাও যে (l, m) বিন্দু একটি বৃত্তের উপর অবস্থিত হয়। (l, m) বিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

30. $9x^2 + 16y^2 = 144$ সূচিত উপবৃত্তের যে-স্পর্শকটি অক্ষদ্বয়ের ধনাত্মক দিকে সমান অংশ ছিন্ন করে তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

31. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, উপবৃত্তটির উপর যে-বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকটি অক্ষদ্বয়ের সহিত সমান কোণ উৎপন্ন করে, সেই বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

[সংকেত: $\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1$ স্পর্শকটি অক্ষদ্বয়ের সহিত সমান কোণ উৎপন্ন করে বলিয়া উহার প্রবণতা $\frac{-x_1b^2}{a^2y_1}=1$, এবং $\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1$; ইত্যাদি।]

32. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$-এর যে-স্পর্শকটি অক্ষদ্বয় হইতে সমান অংশ ছিন্ন করে তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

33. দেখাও যে, $x^2+y^2=2a^2$ বৃত্ত এবং $y^2=8ax$ অধিবৃত্তের সাধারণস্পর্শকটির সমীকরণ, $y=\pm(x+2a)$.

[সংকেত: সাধারণ স্পর্শকটি যদি $y=mx+c$ হয়, তবে বৃত্তের ক্ষেত্রে $c=\pm a\sqrt{2}\sqrt{1+m^2}$ এবং অধিবৃত্তের ক্ষেত্রে $c=\frac{2a}{m}$; প্রশ্নানুসারে উভয়ক্ষেত্রে c-র মান সমান, অর্থাৎ $\frac{2a}{m}=a\sqrt{2}\sqrt{1+m^3}$; ইত্যাদি।]

5·5. বিভিন্ন কনিকের অভিলম্ব-সমূহের সমীকরণ:

(i) (x_1, y_1) বিন্দুতে $x^2+y^2=a^2$ বৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণ $xx_1+yy_1=a^2$; ঐ স্পর্শকের প্রবণতা $=-\frac{x_1}{y_1}$.

$\therefore$ (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকটির উপর লম্বভাবে অবস্থিত অভিলম্বের প্রবণতা

$$=\frac{-1}{-\frac{x_1}{y_1}}=\frac{y_1}{x_1};$$

$\therefore$ ঐ বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ, $(y-y_1)=\frac{y_1}{x_1}(x-x_1)$;

বা, $x_1y-x_1y_1=xy_1-x_1y_1$; বা, $xy_1=x_1y$ ... (1)

টীকা: $y=mx\pm a\sqrt{1+m^2}$ স্পর্শকটি $x^2+y^2=a^2$-কে $\left(\frac{-a}{m\sqrt{1+m^2}}, \frac{a}{\sqrt{1+m^2}}\right)$ বিন্দুতে স্পর্শ করে বলিয়া ঐ স্পর্শবিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ

$$\frac{x.a}{\sqrt{1+m^2}}=\frac{-ay}{m\sqrt{1+m^2}}; \text{ বা, } mx+y=0.$$

(ii) (x_1, y_1) বিন্দুতে $y^2=4ax$ অধিবৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণ $yy_1=2a(x+x_1)$ এবং উহার প্রবণতা $=\frac{2a}{y_1}$.

$\therefore$ (x_1, y_1) বিন্দুতে ঐ অভিলম্বের প্রবণতা $=-\frac{y_1}{2a}$ বলিয়া অভিলম্বটির সমীকরণ হইবে $y-y_1=-\frac{y_1}{2a}(x-x_1)$;

বা, $y_1x+2ay=y_1(2a+x_1)$. ... (2)

টীকা : $y=mx+\frac{a}{m}$ স্পর্শকটি $y^2=4ax$ অধিবৃত্তকে $\left(\frac{a}{m^2}, \frac{2a}{m}\right)$ বিন্দুতে স্পর্শ করে বলিয়া ঐ স্পর্শবিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ হয়, $\frac{2ax}{m}+2ay=\frac{2a}{m}\left(2a+\frac{a}{m^2}\right)$;

বা, $m^2x+m^3y=2am^2+a$;

বা, $\mathbf{m^3y+(x-2a)m^2-a=0}$.

অভিলম্বটির প্রবণতা $=-\frac{1}{m}=m'$ ধরিলে, **অভিলম্বের সমীকরণটি** হইবে

$$\frac{y}{-m'^3}+\frac{(x-2a)}{m'^2}-a=0;$$

বা, $-y+(x-2a)m'-am'^3=0$;

বা, $\mathbf{y=m'x-2am'-am'^3}$ এবং অধিবৃত্তের উপর ঐ **অভিলম্বের পাদবিন্দুর স্থানাঙ্ক** হইবে $\mathbf{(am'^2, -2am')}$.

স্পষ্টতঃ উভয় ক্ষেত্রে অভিলম্বের সমীকরণ m-এর (বা m'-এর) ত্রিঘাত সমীকরণ। সুতরাং, m-এর (বা m'-এর) তিনটি বীজের জন্য **অধিবৃত্তটির তিনটি অভিলম্ব** পাওয়া যাইবে।

আরও দেখা যায় যে সমীকরণটিতে m^2 (বা m'^2) সংবলিত কোন পদ না থাকায় m-এর (বা m'-এর) তিনটি মানের সমষ্টি $=0$ হইবে। অর্থাৎ m-এর তিনটি মান যদি m_1, m_2 ও m_3 অথবা m'-এর তিনটি মান যদি m'_1, m'_2 ও m'_3 হয়, তবে $m_1+m_2+m_3=0$ এবং $m'_1+m'_2+m'_3=0$.

(iii) (x_1, y_1) বিন্দুতে $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ সূচিত উপবৃত্তটির স্পর্শকের সমীকরণ $\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1$ হয় বলিয়া স্পর্শকটি প্রবণতা $=-\frac{b^2}{a^2}\frac{x_1}{y_1}$;

সুতরাং ঐ বিন্দুতে অভিলম্বটির প্রবণতা $=\frac{a^2y_1}{b^2x_1}$ হইবে।

সুতরাং (x_1, y_1) বিন্দুতে $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$-সূচিত উপবৃত্তটির অভিলম্বের সমীকরণ হইবে, $y-y_1=\frac{a^2y_1}{b^2x_1}(x-x_1)$;

$$\text{বা,}\quad \frac{\mathbf{y}-\mathbf{y}_1}{\mathbf{y}_1/\mathbf{b}^2}=\frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}_1}{\mathbf{x}_1/\mathbf{a}^2} \qquad \cdots \qquad \cdots \quad (3)$$

(iv) (x_1, y_1) বিন্দুতে $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$-সূচিত পরাবৃত্তের অভিলম্ব (iii)-এর নিয়মে অনায়াসে নির্ণয় করা যায়। উপবৃত্তের সমীকরণে b^2-এর স্থলে $-b^2$ লিখিলেই পরাবৃত্তের সমীকরণ পাওয়া যায়। (iii)-এর অন্তর্গত (3)-নম্বর সমীকরণে b^2-এর স্থলে স্থলে $-b^2$ বসাইয়া (x_1, y_1) বিন্দুতে $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$-এর অভিলম্বটির সূত্র হয়,

$$-\frac{\mathbf{y}-\mathbf{y}_1}{\mathbf{y}_1/\mathbf{b}^2}=\frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}_1}{\mathbf{x}_1/\mathbf{a}^2} \qquad \cdots \qquad \cdots \quad (4)$$

অনুসিদ্ধান্ত 1. যেহেতু θ-এর যে-কোন মানের জন্য $(a\cos\theta,\ b\sin\theta)$ বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ সমীকরণে সিদ্ধ হয়, সেইহেতু $(\theta\cos\theta,\ b\sin\theta)$ বিন্দুতে ঐ উপবৃত্তের উপর অবস্থিত ঐ বিন্দুতে উপবৃত্তটির স্পর্শকের সমীকরণ

$$\frac{x\cos\theta}{a}+\frac{y\sin\theta}{b}=1 \quad [\,x_1=a\cos\theta \text{ এবং } y_1=b\sin\theta \text{ বসাইয়া}\,]$$

এবং অভিলম্বের সমীকরণ $\dfrac{y-b\sin\theta}{\dfrac{b\sin\theta}{b^2}}=\dfrac{x-a\cos\theta}{\dfrac{a\cos\theta}{a^2}}$;

$$\text{বা,}\quad \frac{by-b^2\sin\theta}{\sin\theta}=\frac{ax-a^2\cos\theta}{\cos\theta};$$

$$\text{বা,}\quad by\operatorname{cosec}\theta-b^2=ax\sec\theta-a^2 ;$$

$$\text{বা,}\quad \mathbf{ax\sec\theta-by\operatorname{cosec}\theta=a^2-b^2}.$$

অনুসিদ্ধান্ত 2. যেহেতু θ-এর সকল মানের জন্য পরাবৃত্তের সমীকরণে $x=a\sec\theta$ এবং $y=b\tan\theta$ বসাইলে,

$$\text{বামপক্ষ}=\frac{a^2\sec^2\theta}{a^2}-\frac{b^2\tan^2\theta}{b^2}=\sec^2\theta-\tan^2\theta=1+\tan^2\theta-\tan^2\theta=1$$

$=$ ডানপক্ষ ; সেইহেতু $(a\sec\theta,\ b\tan\theta)$ বিন্দুটি $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$-সূচিত পরাবৃত্তের উপরে অবস্থিত। ঐ বিন্দুতে পরাবৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণ, $\frac{x\sec\theta}{a}-\frac{y\tan\theta}{b}=1$;

এবং অভিলম্বের সমীকরণ $\dfrac{y-b\tan\theta}{\dfrac{b\tan\theta}{-b^2}}=\dfrac{x-a\sec\theta}{\dfrac{a\sec\theta}{a^2}}$;

$$\text{বা,}\quad \frac{-by+b^2}{\tan\theta}=\frac{ax-a^2}{\sec\theta};$$

$$\text{বা,}\quad \frac{\mathbf{ax}}{\sec\theta}+\frac{\mathbf{by}}{\tan\theta}=\mathbf{a}^2+\mathbf{b}^2.$$

5·6. অবকলনাঙ্কের (Differential Co-efficient) সাহায্যে অভিলম্বের সমীকরণ-নির্ণয় :

ইতিপূর্বে প্রমাণিত হইয়াছে যে $y=f(x)$-এর উপর (x_1, y_1) বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের প্রবণতা $=\dfrac{dy_1}{dx_1}$; সুতরাং ঐ বিন্দুতে অভিলম্বের প্রবণতা হইবে $-\dfrac{1}{dy_1/dx_1}=-\dfrac{dx_1}{dy_1}$ এবং উহার সমীকরণ হইবে, $y-y_1=-\dfrac{dx_1}{dy_1}(x-x_1)$.

(i) $y^2=4ax$-এর উভয় পক্ষের অবকলনাঙ্ক লইলে,

$$2y\frac{dy}{dx}=4a\,;\qquad \text{বা,}\quad -\frac{dx}{dy}=-\frac{y}{2a}\,;\qquad \therefore\ \frac{dx_1}{dy_1}=-\frac{y_1}{2a}.$$

$\therefore$ (x_1, y_1) বিন্দুতে $y^2=4ax$-এর অভিলম্বের সমীকরণ

$$y-y_1=\frac{-y_1}{2a}(x-x_1).$$

(ii) অনুরূপে, $px^2+qy^2=1$-এর উভয় পক্ষের অবকলনাঙ্ক লইলে,

$$2px+2qy\cdot\frac{dy}{dx}=0\,;\qquad \text{বা,}\quad \frac{dy}{dx}=\frac{-2px}{2qy}=\frac{-px}{qy}.$$

$$\therefore\ \frac{-dx}{dy}=-\frac{1}{\dfrac{dy}{dx}}=\frac{qy}{px}\,;\qquad \text{অতএব}\quad \frac{-dx_1}{dy_1}=\frac{qy_1}{px_1}.$$

$\therefore$ (x_1, y_1) বিন্দুতে $px^2+qy^2=1$-এর উপর অভিলম্বের সমীকরণ,

$$y-y_1=\frac{qy_1}{px_1}(x-x_1)\qquad \cdots\qquad \cdots\quad (2)$$

টীকা : লক্ষণীয় যে $px^2+qy^2=1$ দ্বারা বৃত্ত, উপবৃত্ত ও পরাবৃত্ত সবকয়টিরই সমীকরণ সূচিত হয়। $p=q=\frac{1}{a^2}$ হইলে উহা বৃত্ত, $p=\frac{1}{a^2}$ ও $q=\frac{1}{b^2}$ হইলে উপবৃত্ত এবং $p=\frac{1}{a^2}$ ও $q=-\frac{1}{b^2}$ হইলে উহা পরাবৃত্ত সূচিত করে। সুতরাং (2)-নম্বর সূত্রে p ও q-এর যথাযোগ্য মান বসাইলেই (x_1, y_1) বিন্দুতে একটি বৃত্ত বা উপবৃত্ত বা পরাবৃত্তের অভিলম্বসূচক সমীকরণ পাওয়া যাইবে।

উদাহরণমালা

উদা. 1. (x_1, y_1) বিন্দুতে $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ সূচিত বৃত্তের অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর।

অবকলনাঙ্ক লইয়া,

$$2x+2y\frac{dy}{dx}+2g+2f\frac{dy}{dx}=0\ ;$$

বা, $2(y+f)\dfrac{dy}{dx}=-2(x+g)$; বা, $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x+g}{y+f}$.

$\therefore\quad -\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{-\dfrac{dy}{dx}}=\dfrac{y+f}{x+g}$; (x_1, y_1) বিন্দুতে $\dfrac{-dx_1}{dy_1}=\dfrac{y_1+f}{x_1+g}$.

$\therefore$ (x_1, y_1) বিন্দুতে $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$-এর অভিলম্বের সমীকরণ হইবে,

$$y-y_1=\frac{-dx_1}{dy_1}(x-x_1)\ ;\qquad \text{বা,}\quad y-y_1=\frac{y_1+f}{x_1+g}(x-x_1)\ ;$$

বা, $\mathbf{x(y_1+f)-y(x_1+g)+gy_1-fx_1=0}$.

উদা. 2. $y^2=-8x$ অধিবৃত্তটির, $(2, -4)$ বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর।

প্রথম পদ্ধতি : $y^2=-8x=-4.2.x$ বলিয়া, উহার নাভিলম্বের চতুর্থাংশ, $a=2$.

এখন, $y^2=4ax$-এর (x_1, y_1) বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ

$$y-y_1=\frac{y_1}{2a}(x-x_1).$$

এখানে, $a=2$, $x_1=2$ এবং $y_1=-4$;

নির্ণেয় অভিলম্বের সমীকরণ

$$y-(-4)=\frac{-4}{2.2}(x-2)\ ;$$

বা, $y+4=-x+2$; বা, $\mathbf{x+y+2=0}$.

দ্বিতীয় পদ্ধতি : $y^2=-8x$-এর উভয় পক্ষের অবকলনাঙ্ক লইয়া,

$$2y\cdot\frac{dy}{dx}=-8\ ;\qquad \therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{-4}{y}\ ;\qquad \therefore\ \frac{-dx}{dy}=\frac{-y}{4}\ ,$$

$(2, -4)$ বিন্দুতে, $-\dfrac{dy_1}{dx_1}=\dfrac{-4}{4}=-1$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ $y-(-4)=-1(x-2)$; বা, $x+y+2=0$.

উদা. 3. প্রমাণ কর যে $3x+9y-19=0$ সরল রেখাটি $y^2=12x$ অধিবৃত্তের একটি অভিলম্বের সমীকরণ। অধিবৃত্তটির যে-বিন্দুতে প্রদত্ত রেখাটি অভিলম্ব সেই বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

$y^2=4ax$-এর $(am^2, -2am)$ বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ,

$$y=mx+2am-am^3.$$

এখানে, $y^2=12x=4.3x$ অধিবৃত্তটির নাভিলম্বের চতুর্থাংশ, $a=3$;

$\therefore$ $y^2=12x$-এর $(3m^2, -6m)$ বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ হইবে,

$$y=mx-6m+3m^3 \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad (1)$$

এখন, $3x+9y-19=0$ রেখাটির প্রবণতা $=-\frac{3}{9}=-\frac{1}{3}$.

$m=-\frac{1}{3}$ বসাইলে (1)-এর সমীকরণটি হয়,

$$y=-\tfrac{1}{3}x-6\times-\tfrac{1}{3}-3\times-\frac{1}{3.9};$$

উভয় পক্ষকে 9 দ্বারা গুণ করিয়া,

বা, $9y=-3x+2\times9+1=-3x+19$; বা, $3x+9y-19=0$.

সুতরাং এই সমীকরণ, প্রদত্ত অধিবৃত্তের $(3m^2, -6m)$ বিন্দু

বা, $(\frac{1}{3}, 2)$ বিন্দুতে অভিলম্বটি সূচিত করিবে।

প্রশ্নমালা 21

অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর ঃ

1. $x^2+y^2=40$-এর $(2, 6)$ বিন্দুতে ;
2. $x^2+y^2+4x-6y+5=0$-এর $(-4, 5)$ বিন্দুতে ;
3. $y^2=4x$-এর $(9, 6)$ বিন্দুতে ;
4. $y^2=-12x$-এর $(-3, 6)$ বিন্দুতে ;
5. $y^2=4ax$-এর নাভিলম্বের প্রান্তবিন্দুতে ;
6. $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}==1$-এর $\left(\frac{15}{7}, -\frac{4}{7}\right)$ বিন্দুতে ;
7. $3x^2+5y^2=17$-এর $(2, 1)$ বিন্দুতে ;
8. $5x^2+9y^2=81$-এর $(3, -2)$ বিন্দুতে ;
9. $5x^2-8y^2=40$-এর $(4, -5)$ বিন্দুতে ;
10. $3x^2-4y^2-48=0$-এর $(-4, -3)$ বিন্দুতে ;

11. প্রথম পাদের যে-বিন্দুর ভুজের মান উহার কোটির মানের দ্বিগুণ, সেই বিন্দুতে $4x^2+5y^2=21$-এর অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর।

12. প্রমাণ কর যে, $5x-2y=8\sqrt{2}$ রেখাটি $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ উপবৃত্তটির একটি অভিলম্ব।

13. $5c=a^2e^2$ হইলে, প্রমাণ কর যে $\frac{ax}{3}+\frac{by}{4}=c$ রেখাটি, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$-সূচিত উপবৃত্তের একটি অভিলম্ব।

14. $lx+my=1$ রেখাটি যদি $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$-এর একটি অভিলম্ব হয়, তবে প্রমাণ কর যে,

$$\frac{a^2}{l^2}-\frac{b^2}{m^2}=(a^2+b^2)^2.$$

15. $ax+by=a+b$ রেখাটি যদি $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তটির একটি অভিলম্ব হয়, তবে প্রমাণ কর যে $a-b=\sqrt{2}$.

5·7. কনিকের উপর বহিঃস্থ বিন্দুবিশেষ হইতে অঙ্কিত স্পর্শকের সংখ্যা :

(i) $x^2+y^2=a^2$ বৃত্তের যে-কোন স্পর্শকের সমীকরণ, $y=mx+a\sqrt{1+m^2}$. স্পর্শকটি (x_1, y_1)-সূচিত বহিঃস্থ একটি বিশেষ বিন্দুগামী হইলে, সমীকরণটি হয়,

$$y_1=mx_1+a\sqrt{1+m^2}\ ;\ \text{বা},\ (y_1-mx_1)^2=a^2(1+m^2)\ ;$$

$$\text{বা},\ (x_1^2-a^2)m^2-2x_1y_1m+y_1^2-a^2=0\ ;$$

ইহা m-এর একটি দ্বিঘাত সমীকরণ বলিয়া m-এর দুইটি মান পাওয়া যাইবে। m-এর এইরূপ প্রত্যেক মানের জন্য একটি করিয়া সমীকরণ পাওয়া যাইবে বলিয়া (x_1, y_1) বিন্দু হইতে বৃত্তটির উপর **দুইটি স্পর্শক অঙ্কন করা** যাইবে।

(ii) $y=mx+a/m$ রেখাটি m-এর সকল মানের জন্য $y^2=4ax$ অধিবৃত্তের একটি স্পর্শক হইবে। উহা (x_1, y_1)-সূচিত কোন বহিঃস্থ বিন্দুগামী হইলে, সমীকরণটি হইবে

$$y_1=mx_1+a/m\ ;\ \text{বা},\ m^2x_1-my_1+a=0\ ;$$

ইহা m-এর দ্বিঘাত সমীকরণ বলিয়া m-এর দুইটি মান থাকিবে এবং m-এর এইরূপ দুইটি মানের জন্য (x_1, y_1) বিন্দু হইতে $y^2=4ax$-এর উপর দুইটি স্পর্শকের সমীকরণ পাওয়া যাইবে।

অতএব, বহিঃস্থ বিন্দু (x_1, y_1) হইতে $y^2=4ax$ **অধিবৃত্তের উপর দুইটি স্পর্শক** অঙ্কন করা যাইবে।

(iii) $y = mx + \sqrt{a^2m^2+b^2}$, রেখা m-এর সকল মানের জন্য $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তের স্পর্শক হয় বলিয়া উহা যদি বহিঃস্থ (x_1, y_1) বিন্দুগামী হয়, তবে m-সংবলিত নিম্নরূপ দ্বিঘাত সমীকরণটি পাওয়া যায়,

$$y_1 = mx_1 + \sqrt{a^2m^2+b^2}\text{ ; বা, } (y_1 - m_1x_1)^2 = a^2m^2 + b^2\text{ ;}$$

বা, $(x_1{}^2 - a^2)m^2 - 2x_1y_1m + y_1{}^2 - b^2 = 0.$

এই দ্বিঘাত সমীকরণ হইতে m-এর দুইটি মান এবং এইরূপ প্রত্যেকটি মানের জন্য একটি স্পর্শকের সমীকরণ পাওয়া যাইবে। সুতরাং, বহিঃস্থ বিন্দু (x_1, y_1) হইতে $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ **উপবৃত্তের উপর দুইটি স্পর্শক** অঙ্কন করা যাইবে।

(iv) অনুরূপে, $y = mx + \sqrt{a^2m^2-b^2}$ সমীকরণটি সর্বদা $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ পরাবৃত্তের স্পর্শক সূচিত করে বলিয়া উহা যদি বহিঃস্থ (x_1, y_1) বিন্দুগামী হয়, তবে m-সংবলিত দ্বিঘাত সমীকরণটি হয়

$$y_1 = mx_1 + \sqrt{a^2m^2-b^2}\text{ ;}$$

বা, $(y_1 - mx_1)^2 = a^2m^2 - b^2$;

বা, $(x_1{}^2 - a^2)m^2 - 2x_1y_1m + y_1{}^2 + b^2 = 0.$

ইহা হইতে m-এর দুইটি মান এবং ঐরূপ প্রত্যেকটি মানের একটি স্পর্শকের সমীকরণ পাওয়া যাইবে।

সুতরাং, বহিঃস্থ (x_1, y_1) বিন্দু হইতে $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ পরাবৃত্তের উপর দুইটি স্পর্শক অঙ্কন করা যাইবে।

অতএব, (i) হইতে (iv) পর্যন্ত আলোচনার সিদ্ধান্ত এই হয় যে, **বহিঃস্থ বিন্দু-বিশেষ হইতে প্রত্যেকপ্রকার কনিকের উপর দুইটি করিয়া স্পর্শক অঙ্কন করা যায়।**

5·8. লম্বচ্ছেদী স্পর্শক-যুগলের ছেদবিন্দুর সঞ্চারপথ (Locus of the point of intersection of two mutually perpendicular tangent) :

(i) $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তের যে-কোন স্পর্শকের সমীকরণ,

$$y = mx + \frac{a}{m}\text{ ; বা, } m^2x - my + a = 0.$$

ইহা m-সংবলিত একটি দ্বিঘাত সমীকরণ বলিয়া এই সমীকরণ হইতে m-এর

দুইটি মান এবং এইরূপ প্রত্যেকটি মানের জন্য একটি স্পর্শকের সমীকরণ পাওয়া যাইবে। m-এর মান দুইটি যদি m_1 ও m_2 হয়, তবে স্পষ্টতঃ,

$$m_1 m_2 = \frac{a}{x}.$$

কিন্তু m_1 ও m_2 প্রবণতাসম্পন্ন স্পর্শক-দুইটি যদি (h, k) বিন্দুতে লম্বচ্ছেদী হয়, তবে $m_1 m_2 = -1$ হইবে।

$$\therefore \quad m_1 m_2 = -1 = \frac{a}{h};$$

$$\text{বা,} \quad a = -h; \quad \text{বা,} \quad h + a = 0.$$

সুতরাং, অধিবৃত্তের লম্বচ্ছেদী স্পর্শক-যুগলের ছেদবিন্দু (h, k)-এর সঞ্চারপথের সমীকরণ হইবে $\mathbf{x + a = 0}$.

স্পষ্টতঃ, **ইহা অধিবৃত্তটির নিয়ামকের সমীকরণ।**

(ii) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$-সূচিত উপবৃত্তের যে-কোন স্পর্শকের সমীকরণ,

$$y = mx + \sqrt{a^2m^2 + b^2}\,; \quad \text{বা,} \quad (y - mx)^2 = a^2m^2 + b^2\,;$$

$$\text{বা,} \quad (a^2 - x^2)m^2 + 2xym + b^2 - y^2 = 0.$$

ইহা m-সংবলিত দ্বিঘাত সমীকরণ বলিয়া, m-এর দুইটি মান, ধরা যাক, m_1 ও m_2 পাওয়া যাইবে। অধিকন্তু m-এর এই দ্বিঘাত সমীকরণ হইতে দেখা যায়,

$$m_1 m_2 = \frac{b^2 - y^2}{a^2 - x^2}.$$

এখন, m_1 ও m_2 প্রবণতা-সম্পন্ন স্পর্শক-যুগল যদি (h, k) বিন্দুতে লম্বচ্ছেদী হয়, তবে, $m_1 m_2 = -1 = \frac{b^2 - k^2}{a^2 - h^2}$ হইবে।

সুতরাং, উপবৃত্তের লম্বচ্ছেদী স্পর্শক-যুগলের (h, k) ছেদবিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ হইবে $\frac{b^2 - y^2}{a^2 - x^2} = -1$;

$$\text{বা,} \quad -a^2 + x^2 = b^2 - y^2\,; \quad \text{বা,} \quad \mathbf{x^2 + y^2 = a^2 + b^2}.$$

স্পষ্টতঃ, ইহা একটি একটি বৃত্ত, যাহার কেন্দ্র উপবৃত্তের কেন্দ্রে এবং ব্যাসার্ধ $\sqrt{a^2 + b^2}$. ইহাকে **নিয়ামক বৃত্ত** বলে।

(iii) উপবৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণে b^2-এর স্থলে $-b^2$ লিখিলে, পরাবৃত্তের স্পর্শক এবং তাহার বেলায় লম্বচ্ছেদী স্পর্শক-যুগলের ছেদবিন্দুর সঞ্চারপথ $x^2 + y^2 = a^2 - b^2$ দ্বারা সূচিত হয়।

$a^2 > b^2$ হইলে $x^2+y^2=a^2-b^2$ পরাবৃত্তটির নিয়ামক বৃত্ত সূচিত করে যাহার কেন্দ্র পরাবৃত্তের কেন্দ্র এবং ব্যাসার্ধ $\sqrt{a^2-b^2}$; $a^2 < b^2$ হইলে নিয়ামক বৃত্তটি কাল্পনিক হইয়া পড়ে। আর, $a^2=b^2$ হইলে $x^2+y^2=0$ হয় বলিয়া নিয়ামক বৃত্তটির ব্যাসার্ধ শূন্য হইয়া যায় এবং সেই কারণে উহা তখন বিন্দুবৃত্তে (point-circle) পর্যবসিত হয়।

(iv) উপবৃত্তের লম্বচ্ছেদী স্পর্শক-যুগলের ছেদবিন্দুর সঞ্চারপথ-সূচক সমীকরণে b^2-এর স্থলে a^2 লিখিলে বৃত্তের লম্বচ্ছেদী স্পর্শক-যুগলে ছেদবিন্দুর সঞ্চারপথ-সূচক সমীকরণটি হয় $\mathbf{x^2+y^2=2a^2}$.

দ্রষ্টব্য : (ii)-এর নিয়মে (iii) ও (iv)-এর সমীকরণগুলি সরাসরি প্রকাশ করা যায়।

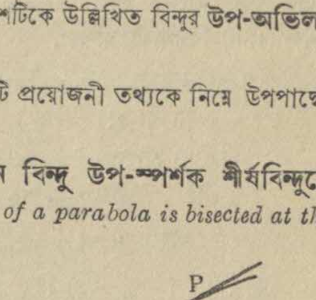
5·9. উপ-স্পর্শক ও উপ-অভিলম্ব (Subtangent and subnormal) :

সংজ্ঞা : কোন কনিকের কোন বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক এবং তাহার স্পর্শ-বিন্দুর কোটি x-অক্ষের যে-অংশ ছিন্ন করে সেই অংশটিকে উল্লিখিত বিন্দুর **উপ-স্পর্শক** (subtangent) বলে।

কোন কনিকে উপরিস্থ একটি বিন্দুতে ঐ বিন্দুগামী স্পর্শকের উপর লম্ব এবং ঐ বিন্দুর কোটি x-অক্ষের যে-অংশ ছিন্ন করে সেই অংশটিকে উল্লিখিত বিন্দুর **উপ-অভিলম্ব** (subnormal) বলে।

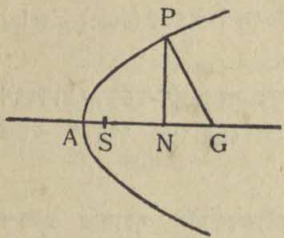
উপ-স্পর্শক ও উপ-অভিলম্ব সংক্রান্ত কয়েকটি প্রয়োজনী তথ্যকে নিম্নে উপপাদ্যের আকারে প্রমাণ করা যাইতেছে।

(1) **অধিবৃত্তের উপর অবস্থিত কোন বিন্দু উপ-স্পর্শক শীর্ষবিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হয়** (*Subtangent at a point of a parabola is bisected at the vertex*) :



P (x_1, y_1) বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক এবং P বিন্দুর $\overline{PN}$ কোটি x-অক্ষকে যথাক্রমে T ও N বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। অতএব, P বিন্দুর উপ-স্পর্শক $\overline{TN}$. অধিবৃত্তের সমীকরণ $y^2=4ax$ ধরিয়া $\overrightarrow{PT}$ স্পর্শকের সমীকরণ $yy_1=2a(x+x_1)$ এবং x-অক্ষের সমীকরণ $y=0$ হয়; ইহাদের সমাধান করিলে, $0=2a(x+x_1)$; বা, $x=-x_1$ পাওয়া যায়। সুতরাং, শীর্ষবিন্দু A হইতে $\overline{AT}=x=-x_1$ এবং $\overline{AN}=x_1$; অতএব সাংখ্যমানে AT = AN, অর্থাৎ শীর্ষবিন্দু A-তে $\overline{TN}$ উপ-স্পর্শক সমদ্বিখণ্ডিত।

(2) **অধিবৃত্তের উপরিস্থ যে-কোন বিন্দুর উপ-অভিলম্বের দৈর্ঘ্য নাভিলম্বের অর্ধেকের সমান** (*Subnormal at a point of a Parabola is equal to the semi-latus rectium*) :



$y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তে P (x_1, y_1) বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ $y - y_1 = -\frac{y_1}{2a}(x - x_1)$. অভিলম্বটি $y = 0$ বা, x-অক্ষকে G বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। $\therefore\ 0 - y_1 = -\frac{y_1}{2a}(x - x_1)$ হইতে G বিন্দুর ভুজ x পাওয়া যাইবে। স্পষ্টতঃ, $x - x_1 = 2a$; বা, $x = 2a + x_1$. P বিন্দু কোটি $\overline{\text{PN}}$ বলিয়া,

$$\text{NG} = \text{AG} - \text{AN} = 2a + x_1 - x_1 = 2a = \tfrac{1}{2} \text{ নাভিলম্ব।}$$

উদাহরণমালা

উদা. 1. (1, 6) বিন্দু হইতে $y^2 = 20x$ অধিবৃত্তটির স্পর্শকদ্বয়ের সমীকরণ নির্ণয় কর।

$y^2 = 20x = 4.5.x$; অতএব এখানে নাভিলম্বের চতুর্থাংশ, $a = 5$. স্পষ্টতঃ, m-এর সকল মানের জন্য, $y = mx + 5/m$ অধিবৃত্তটির স্পর্শকের সমীকরণ। এই স্পর্শক (1, 6) বিন্দুগামী বলিয়া,

$$6 = m + 5/m \text{ ; বা, } m^2 - 6m + 5 = 0, \text{ বা, } (m-5)(m-1) = 0.$$

$\therefore\ m = 5$ বা 1.

$\therefore$ (1, 6) হইতে $y^2 = 20x$-এর উপর অঙ্কিত স্পর্শক-দুইটির সমীকরণ হইবে,

$$y = 5x + \tfrac{5}{5} \text{ ; বা, } \mathbf{y = 5x + 1},$$

$$\text{এবং } y = 1.x + \tfrac{5}{1}, \text{ বা, } \mathbf{y = x + 5}.$$

উদা. 2. $(-2, -3)$ বিন্দু হইতে $2x^2 + 3y^2 = 5$ উপবৃত্তটিতে অঙ্কিত স্পর্শক-গুলির সমীকরণ নির্ণয় কর এবং স্পর্শবিন্দুগুলিও নির্ণয় কর।

উপবৃত্তটির সমীকরণ $\frac{x^2}{\frac{5}{2}} + \frac{y^2}{\frac{5}{3}} = 1$ রূপে লিখিলে দেখা যায়, $a^2 = \frac{5}{2}$ এবং $b^2 = \frac{5}{3}$.

এখন m-এর সকল বাস্তব মানের জন্যই $y = mx + \sqrt{\frac{5}{2}m^2 + \frac{5}{3}}$ ... (1) উপবৃত্তটির স্পর্শক। এই স্পর্শক $(-2, -3)$ বিন্দুগামী হইলে,

$$-3 = -2m + \sqrt{\tfrac{5}{2}m^2 + \tfrac{5}{3}} \text{ ; বা, } (2m-3)^2 = \tfrac{5}{2}m^2 + \tfrac{5}{3} \text{ ;}$$

$$\text{বা, } \tfrac{3}{2}m^2 - 12m + \tfrac{22}{3} = 0 \text{ ; বা, } 9m^2 - 72m + 44 = 0 \text{ ;}$$

$$\therefore\quad m=\frac{72\pm\sqrt{(-72)^2-4.9.44}}{18}=\frac{7^2\pm\sqrt{3600}}{18}$$

$$=\frac{72\pm60}{18}=\frac{22}{3},\ \frac{2}{3}. \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \quad (2)$$

$\therefore$ (1) এবং (2) হইতে $(-2, -3)$ বিন্দু হইতে উপবৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শকদ্বয়ের সমীকরণ

$$y=\tfrac{22}{3}x+\sqrt{\tfrac{5}{2}\cdot(\tfrac{22}{3})^2+\tfrac{5}{3}}=\tfrac{22}{3}x+\tfrac{35}{3},$$

বা, $\mathbf{3y=22x+35.}$ $\qquad \cdots \quad (3)$

এবং $y=\frac{2}{3}x+\sqrt{\frac{5}{2}(\frac{2}{3})^2+\frac{5}{3}}=\frac{2}{3}x+\frac{5}{3}$, বা, $\mathbf{3y=2x+5.}$ $\qquad \cdots \quad (4)$

স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক ঃ সমীকরণ (3) এবং প্রদত্ত উপবৃত্তের সমীকরণ হইতে (3)-এর স্পর্শবিন্দুর ভুজ-নির্ণায়ক $2x^2+3(\frac{22}{3}x+\frac{35}{3})^2=5$,

বা, $\frac{490}{3}x^2+\frac{1540}{3}x+\frac{1210}{3}=0$,

বা, $49x^2+154x+121=0$, বা, $(7x+11)^2=0$

সমীকরণটি পাওয়া যায়।

$$\therefore\quad x=-\tfrac{11}{7}\ ;\quad \therefore\quad y=\tfrac{22}{3}(-\tfrac{11}{7})+\tfrac{35}{3}=\tfrac{1}{7}.$$

$\therefore$ $3y=22x+35$ স্পর্শকটির স্পর্শবিন্দু $(-\frac{11}{7}, \frac{1}{7})$.

এইরূপে, $3y=2x+5$ স্পর্শকটির স্পর্শবিন্দু $\mathbf{(-1, 1)}$.

বিকল্প পদ্ধতি ঃ

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তের যে-কোন স্পর্শক $y=mx+\sqrt{a^2m^2+b^2}$-এর স্পর্শবিন্দু

$$\left(\frac{-a^2m}{\sqrt{a^2m^2+b^2}},\ \frac{b^2}{\sqrt{a^2m^2+b^2}}\right).$$

$\therefore$ (3)-চিহ্নিত সমীকরণ-সূচিত স্পর্শকের স্পর্শবিন্দু হইবে

$$\left(\frac{-\frac{5}{2}\cdot\frac{22}{3}}{\sqrt{\frac{5}{3}\cdot(\frac{22}{3})^2+\frac{5}{3}}},\ \frac{\frac{5}{3}}{\sqrt{\frac{5}{2}\cdot(\frac{22}{3})^2+\frac{5}{2}}}\right),$$

$$\text{বা,}\quad \left(\frac{-\frac{5.22}{3}}{\frac{35}{7}},\ \frac{\frac{5}{3}}{\frac{35}{7}}\right),\quad \text{বা,}\quad (-\tfrac{11}{7}, \tfrac{1}{7})\ ;$$

এবং (4) চিহ্নিত সমীকরণ স্পর্শবিন্দু হইবে

$$\left(\frac{-\frac{5}{2}.\frac{2}{3}}{\sqrt{\frac{5}{2}.(\frac{2}{3})^2+\frac{5}{3}}},\ \frac{\frac{5}{3}}{\sqrt{\frac{5}{2}.(\frac{2}{3})^2+\frac{5}{3}}}\right)\ \text{বা,}\ \left(\frac{-\frac{5}{3}}{\frac{5}{3}},\ \frac{\frac{5}{3}}{\frac{5}{3}}\right)$$

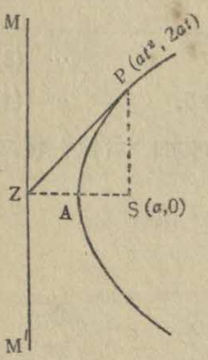
বা, $(-1, 1)$.

অতএব, $3y=22x+35$ স্পর্শকটির স্পর্শবিন্দু $(-\frac{11}{7}, \frac{1}{7})$

এবং $3y=2x+5$ স্পর্শকটির স্পর্শবিন্দু $\mathbf{(-1, 1)}$.

উদা. 3. প্রমাণ কর যে, **অধিবৃত্তের উপরিস্থ কোন বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের যে-অংশ অধিবৃত্তস্থ ঐ বিন্দু এবং নিয়ামক দ্বারা সীমাবদ্ধ, সেই অংশটি নাভিতে এক সমকোণ উৎপন্ন করে।**

ধরা যাক, $y^2=4ax$ অধিবৃত্তটি উপরিস্থ P বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(at^2, 2at)$ এবং ঐ বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকটি নিয়ামক রেখাটিকে Z বিন্দুতে ছেদ করে। স্পষ্টতঃ, নাভি S বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(a, 0)$. এখন $y^2=4ax$-এর উপরিস্থ $(at^2, 2at)$ বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের সমীকরণ



$$y.2at=2a(x+at^2);$$

বা, $ty=x+at^2$

এবং নিয়ামকে সমীকরণ $x=-a$; এই দুইটি সমীকরণ সমাধান করিলে,

$$\text{Z-এর কোটি } y=\frac{x+at^2}{t}=\frac{-a+at^2}{t}=\frac{a(t^2-1)}{t}$$

$$\text{এবং ভুজ } x=ty-at^2=\frac{t\times a(t^2-1)}{t}-at^2$$

$=at^2-a-at^2=-a$ পাওয়া যায়।

সুতরাং Z-এর স্থানাঙ্ক $\left\{-a, \frac{a(t^2-1)}{t}\right\}$ এবং S-এর স্থানাঙ্ক $(a, 0)$ বলিয়া,

$$\overline{SZ}\text{-এর প্রবণতা } m_1=\frac{\frac{a(t^2-1)}{t}-0}{-a-a}=-\frac{t^2-1}{2t}$$

এবং P-এর স্থানাঙ্ক $(at^2, 2at)$ ও S-এর স্থানাঙ্ক $(a, 0)$ বলিয়া,

$$\overline{SP}\text{-এর প্রবণতা } m_2=\frac{2at-0}{at^2-a}=\frac{2t}{t^2-1}.$$

এখন, যেহেতু, $m_1m_2=-\frac{t^2-1}{2t}\times\frac{2t}{t^2-1}=-1.$

সেইহেতু $\overline{SP}$ ও $\overline{SZ}$ পরস্পরের উপর লম্ব অর্থাৎ $\angle PSZ=90°$.

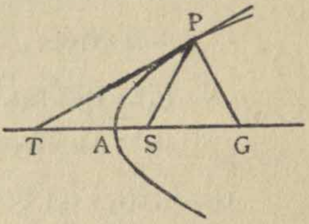
অতএব, P বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের P বিন্দু ও নিয়ামক দ্বারা সীমাবদ্ধ $\overline{PZ}$ অংশ নাভি S বিন্দুতে এক সমকোণ উৎপন্ন করে।

টীকা : বিপরীতক্রমে, **অধিবৃত্তস্থ P বিন্দু হইতে নিয়ামকে Z বিন্দু পর্যন্ত অঙ্কিত PZ রেখা যদি নাভিতে এক সমকোণ উৎপন্ন করে, তবে প্রমাণ করা যায় যে, $\overrightarrow{PZ}$ রেখা P বিন্দুতে অধিবৃত্তের স্পর্শক।** এক্ষেত্রে S হইতে নিয়ামক পর্যন্ত লম্বদূরত্ব a এবং $\overline{SP}\perp\overline{SZ}$ বলিয়া Z বিন্দুর স্থানাঙ্ক

$(-a_1 y_1)$ ধরা যায়। $\overline{SP}$ ও $\overline{SZ}$ প্রবণতার গুণফল $= -1$ বলিয়া y_1-এর মান নির্ণয় করা যাইবে এবং তাহার পর অনায়াসে $\overline{PZ}$-এর সমীকরণ নির্ণয় করিলে দেখা যাইবে যে, উহা অধিবৃত্তটির একটি স্পর্শক।

উদা. 4. প্রমাণ কর যে, **অধিবৃত্তস্থ যে-কোন বিন্দুতে অঙ্কিত অভিলম্ব ঐ বিন্দুর নাভি-দূরত্ব এবং অধিবৃত্তের অক্ষের সহিত সমান কোণ উৎপন্ন করে।**

$y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তের উপরিস্থ P চিহ্নিত (x_1, y_1) বিন্দুতে অঙ্কিত অভিলম্ব $\overleftrightarrow{PG}$ যেন অধিবৃত্তের অক্ষকে G বিন্দুতে ছেদ করে। P হইতে অধিবৃত্তটির নাভি S $(a, 0)$-এর দূরত্ব $\overline{SP}$, অধিবৃত্তটি শীর্ষবিন্দু যেন A.



প্রমাণ করিতে হইবে যে $\overline{PG}$ অভিলম্বটি $\overline{PS}$ ও $\overleftrightarrow{SG}$ অক্ষের সহিত সমান কোণ উৎপন্ন করে

অর্থাৎ $\angle SPG = \angle SGP$,

(x_1, y_1) বিন্দুতে অভিলম্ব বলিয়া

$\overleftrightarrow{PG}$-এর সমীকরণ,

$y - y_1 = -\frac{y_1}{2a}(x - x_1)$ এবং $\overleftrightarrow{SG}$ অক্ষের সমীকরণ $y = 0$.

এই দুইটিকে সহ-সমীকরণরূপে সমাধান করিলে, $0 - y_1 = -\frac{y_1}{2a}(x - x_1)$

বা, $x - x_1 = 2a$; বা, $x = 2a + x_1$ হয়।

$\therefore$ G-এর ভুজ $x = 2a + x_1$ এবং কোটি $y = 0$ এবং উহার স্থানাঙ্ক $(2a + x, 0)$.

$\therefore$ $SG = AG - AS = 2a + x_1 - a = a + x_1$.

আবার, P বিন্দুর ভুজ $= x_1$ বলিয়া, $SP = a + x_1$.

$\therefore$ $SG = SP$ এবং সেই কারণে $\angle SPG = \angle SGP$.

ইহা হইতে প্রমাণিত হয় যে P বিন্দুতে অঙ্কিত $\overleftrightarrow{PG}$ অভিলম্বটি P-এর নাভিদূরত্ব $\overline{PS}$ ও অধিবৃত্তের অক্ষ $\overleftrightarrow{SZ}$-এর সহিত সমান কোণ উৎপন্ন করে।

উদা. 5. প্রমাণ কর যে একটি অধিবৃত্তের বহিঃস্থ **কোন বিন্দু হইতে অঙ্কিত স্পর্শকযুগল নাভি বিন্দুতে সমান কোণ উৎপন্ন করে।**

$y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তের উপরিস্থ $P(at_1, 2at_1)$ এবং $Q(at_2^2, 2at_2)$ বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক-দুইটি যেন বহিঃস্থ T বিন্দুতে ছেদ করে। অধিবৃত্তটির নাভি যেন S বিন্দু।

প্রমাণ করিতে হইবে যে ∠TSP = ∠TSQ

তাহা হইলে P বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $t_1y = x + at_1^2$ ... (1)

এবং Q বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $t_2y = x + at_2^2$ ... (2)

(1) ও (2)-কে সহসমীকরণ হিসাবে সমাধান করিলে

$$(t_1 - t_2)\, y = a(t_1^2 - t_2^2) = a(t_1 - t_2)(t_1 + t_2)\,;$$

বা, $y = a(t_1 + t_2)$;

এবং $x = t_1y - at_1^2 = t_1a(t_1 + t_2) - at_1^2 = at_1t_2$ পাওয়া যায়। সুতরাং T-বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\{at_1t_2,\ a(t_1 + t_2)\}$

∴ $\overline{\text{SP}}$-এর সমীকরণ $y - 2at_1 = \dfrac{2at_1 - 0}{at_1^2 - a}(x - at_1^2)$

বা $(t_1^2 - 1)y - 2at_1^3 + 2at_1 = 2t_1x - 2at_1^3$

বা $(t_1^2 - 1)y - 2t_1x + 2at_1 = 0$ ... (3)

$\text{T}\{at_1t_2,\ a(t_1 + t_2)\}$ হইতে $\overrightarrow{\text{SP}}$ বা (3)-এর উপর লম্ব TK

$$= \frac{a(t^1 + t_2)(t_1^2 - 1) - 2t_1at_1t_2 + 2at_1}{\sqrt{(t_1^2 - 1) + 4t_1^2}}$$

$$= \frac{a(t_1^2 + t_1^2t_2 - t_1 - t_2 - 2t_1^2t_2 + 2t_1}{t_1^2 + 1}$$

$$= \frac{a(t_1^3 - t_1^2t_2 + t_1 - t_2)}{t_1^2 + 1} = \frac{a\{t_1^2(t_1 - t_2) + 1(t_1 - t_2)\}}{t_1^2 + 1}$$

$$= \frac{a(t_1 - t_2)(t_1^2 + 1)}{(t_1^2 + 1)} = a(t_1 - t_2).$$

অনুরূপে, দেখান যায় যে $\overline{\text{SQ}}$-এর সমীকরণ

$$(t_2^2 - 1)y - 2t_2x + 2at_2 = 0\,;$$

এবং T বিন্দু হইতে ইহার উপর

লম্ব $\text{TL} = a(t_2 - t_1) = -a(t_1 - t_2)$

∴ সাংখ্যমানে TK = TL. অতএব △TSK ≅ △TSL,

∴ ∠TSK = ∠TSL, অর্থাৎ ∠TSP = ∠TSQ.

সুতরাং, $\overline{\text{TP}}$ ও $\overline{\text{TQ}}$ স্পর্শক নাভিবিন্দুতে সমান কোণ উৎপন্ন করে।

উদা. 6. প্রমাণ কর যে, কোন উপবৃত্তের স্পর্শকের উপর নাভিদ্বয় হইতে অঙ্কিত লম্বদূরত্বের গুণফল উপবৃত্তটির উপাক্ষার্ধের বর্গপরিমাণ।

উপবৃত্তের সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ এবং উহার নাভিদ্বয় S$(-ae, 0)$ ও S$'(ae, 0)$ হইলে ঐ নাভিদ্বয় হইতে যে-কোন স্পর্শকের উপর লম্বদূরত্ব যেন যথাক্রমে p ও p'.

প্রমাণ করিতে হইবে যে $pp'=b^2$.

উপবৃত্তটির যে-কোন স্পর্শকের সমীকরণ $y=mx+\sqrt{a^2m^2+b^2}$

$$\text{বা,}\quad mx-y+\sqrt{a^2m^2+b^2}=0 \qquad \cdots \qquad (1)$$

$\therefore$ (1)-এর উপর S$(-ae, 0)$ হইতে লম্বের দূরত্ব $p=\frac{-mae+\sqrt{a^2m^2+b^2}}{\sqrt{1+m^2}}$.

অনুরূপে, (1)-এর উপর S$'(ac, 0)$ হইতে লম্বের দূরত্ব p'

$$=\frac{mae+\sqrt{a^2m^2+b^2}}{\sqrt{1+m^2}}.$$

$$\therefore \quad pp'=\frac{(a^2m^2+b^2)-m^2a^2c^2}{1+m^2}=\frac{m^2a^2(1-c^2)+b^2}{1+m^2}$$

$$=\frac{m^2b^2+b^2}{1+m^2}=\frac{b^2(1+m^2)}{1+m^2} \qquad [\because \; a^2(1-c^2)=b^2]$$

$$=b^2;$$

অর্থাৎ উপবৃত্তের স্পর্শকের উপর নাভিদ্বয় হইতে লম্বদূরত্ব-তুইটির গুণফল pp' = উপবৃত্তের উপাক্ষার্ধের বর্গ b^2.

উদা. 7. প্রমাণ কর, যে-কোন স্পর্শকের উপর নাভিদ্বয় হইতে অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দুর সঞ্চারপথ ঐ উপবৃত্তের সহায়ক বৃত্ত।

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তটির যে-কোন স্পর্শকের সমীকরণ

$$y=mx+\sqrt{a^2m^2+b^2} \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad (1)$$

উপবৃত্তটির নাভি $(-ae, 0)$ হইতে (1)-এর উপর লম্বের সমীকরণ

$$y-0=-\frac{1}{m}(a+ac)\;;\; \text{বা,}\quad my+x=-ae \qquad \cdots \qquad (2)$$

(1) ও (2)-এর ছেদবিন্দু অর্থাৎ স্পর্শকটির উপর নাভি হইতে অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দুটি যেন Q; তাহা হইলে (1) ও (2)-কে সহসমীকরণ হিসাবে সমাধান করিয়া Q-এর স্থানাঙ্ক পাওয়া যাইবে।

(1) হইতে, $(y-mx)^2=a^2m^2+b^2$;

$$\text{বা,}\quad y^2+m^2x^2-2mxy=a^2m^2+b^2 \qquad \cdots \qquad (3)$$

এবং (2) হইতে, $(my+x)^2=a^2e^2$;

$$\text{বা,}\quad m^2y^2+x^2+2mxy=a^2e^2 \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad (4)$$

(3) ও (4) যোগ করিয়া, $(1+m^2)y^2+(1+m^2)x^2=a^2m^2+a^2e^2+b^2$

$$=a^2m^2+a^2.\frac{a^2-b^2}{a^2}+b^2 \quad \left[\because \quad e^2=\frac{a^2-b^2}{a^2}\right]$$

$$=a^2(1+m^2)\ ;$$

$$\therefore \quad x^2+y^2=a^2.$$

স্পষ্টতঃ ইহা এমন একটি বৃত্ত, যাহার কেন্দ্র (0, 0) এবং ব্যাসার্ধ a ; এক্ষেত্রে, উপবৃত্তের কেন্দ্র (0, 0) এবং a পরাক্ষার্ধের সমান। সুতরাং, $x^2+y^2=a^2$ উপবৃত্তটির **সহায়ক বৃত্ত।**

টীকা: উপবৃত্তের কেন্দ্রকে কেন্দ্র এবং উহার পরাক্ষার্ধের সমান ব্যাসার্ধ লইয়া অঙ্কিত বৃত্তকে ঐ উপবৃত্তের সহায়ক বৃত্ত বলে।

প্রশ্নমালা 22

1. (3, 14) বিন্দু হইতে $y^2=32x$-এর উপর অঙ্কিত স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর।

2. a-এর মান কত হইলে, $y=2x+3$ রেখাটি $y^2=4ax$ অধিবৃত্তটিকে স্পর্শ করিবে?

3. দেখাও যে, $y=x+\sqrt{5/6}$ রেখাটি $2x^2+3y^2=1$ উপবৃত্তটির একটি স্পর্শক। উহার স্পর্শবিন্দু নির্ণয় কর।

4. m-এর মান কত হইলে, $4y=mx+8$ রেখাটি $15x^2+16y^2=40$ উপবৃত্তটিকে স্পর্শ করিবে? স্পর্শকবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

5. $5y=3x+25$ রেখাটি যদি $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$-কে স্পর্শ করে এবং ঐ উপবৃত্তটির উৎকেন্দ্রতা যদি $\frac{4}{5}$ হয়, তবে a ও b-এর মান নির্ণয় কর।

6. $4x^2+9y^2=72$-এর উপর (3, 6) বিন্দু হইতে অঙ্কিত স্পর্শকের সমীকরণ ও স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর।

7. $y^2=4ax$ অধিবৃত্তের উপরিস্থ একটি বিন্দু P হইতে অঙ্কিত সরল রেখা নিয়ামক রেখাকে Z বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। $\overline{PZ}$ যদি অধিবৃত্তের নাভিতে এক সমকোণ উৎপন্ন করে, তবে দেখাও যে, $\overrightarrow{PZ}$ রেখাটি ঐ অধিবৃত্তের একটি স্পর্শক।

8. প্রমাণ কর যে, অধিবৃত্তের যে-কোন স্পর্শকের উপর নাভি হইতে অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দুর সঞ্চারপথ ঐ অধিবৃত্তের শীর্ষবিন্দুগামী স্পর্শক।

[সংকেত: $y^2=4ax$-এর স্পর্শক $y=mx+\frac{a}{m}$-এর উপর লম্বরেখার প্রবণতা $=-\frac{1}{m}$; নাভি $(a, 0)$ বিন্দুগামী বলিয়া, উহার সমীকরণ $y-0=-\frac{1}{m}(x-a)$; স্পর্শক ও এই লম্বরেখার ছেদবিন্দুর ভুজ নির্ণয় করিয়া প্রশ্ন সমাধান কর।]

9. প্রমাণ কর যে, যে-কোন অধিবৃত্তের নাভিলম্বের প্রান্তদ্বয়ে অঙ্কিত স্পর্শক-যুগল ঐ অধিবৃত্তের নিয়ামক ও অক্ষের ছেদবিন্দুতে লম্বভাবে মিলিত হয়।

10. একই শীর্ষবিন্দুযুক্ত দুইটি সমান অধিবৃত্তের অক্ষ-দুইটি যদি পরস্পরের উপর লম্ব হয়, তবে প্রমাণ কর যে, উহাদের সাধারণ স্পর্শক প্রত্যেকটি অধিবৃত্তকে উহার নাভিলম্বের একপ্রান্তে স্পর্শ করে।

[সংকেত : সমান বলিয়া অধিবৃত্ত-দুইটির নাভিলম্বের মান সমান ; উহাদের অক্ষ পরস্পরের উপর লম্ব বলিয়া একটি $y^2=4ax$, অপরটি $x^2=4ay$ আকারের হইবে। প্রথমটির নাভিলম্বের একপ্রান্তের স্থানাঙ্ক $(a, -2a)$, দ্বিতীয়টির নাভিলম্বের একপ্রান্তের স্থানাঙ্ক $(-2a, a)$, $(a, -2a)$ বিন্দুতে প্রথমটির এবং $(-2a, a)$ বিন্দুটিতে দ্বিতীয়টির স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় করিয়া প্রশ্ন সমাধান কর।]

11. প্রমাণ কর যে, কোন অধিবৃত্তের উপরিস্থ যে-বিন্দুর ভুজ ও কোটির মান সমান সেই বিন্দুগামী অভিলম্ব জ্যা-টি ঐ অধিবৃত্তের নাভিতে এক সমকোণ উৎপন্ন করে।

[সংকেত : প্রদত্ত বিন্দু P-এর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর ; P-বিন্দুগামী অভিলম্বটি অধিবৃত্তকে অপর বিন্দু Q-তে ছেদ করিলে অভিলম্ব ও অধিবৃত্তের সমীকরণ হইতে Q-এর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। $\overline{SP}$ ও $\overline{SQ}$-এর প্রবণতা নির্ণয় করিয়া প্রশ্ন সমাধান কর।]

12. প্রমাণ কর যে, একটি উপবৃত্তের কোন স্পর্শকের যে-অংশ উহার স্পর্শবিন্দু ও নিয়ামক দ্বারা সীমাবদ্ধ সেই অংশ নাভিতে এক সমকোণ উৎপন্ন করে।

13. প্রমাণ কর যে, উপবৃত্তের যে-কোন বিন্দুতে অঙ্কিত অভিলম্ব ঐ বিন্দুতে উহার নাভি-দূরত্বদ্বয়ের অন্তর্গত কোণটিকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

14. যদি কোন উপবৃত্তের পরাক্ষ $2a$, উহার উপরিস্থ P-বিন্দুর ভুজ x_1 এবং P বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক ও অক্ষের ছেদবিন্দুর ভুজ x_2 হয়, তবে, প্রমাণ কর যে, $x_1 x_2=a^2$.

15. C-কেন্দ্রবিশিষ্ট কোন উপবৃত্তের উপরিস্থ P বিন্দুর কোটি $\overline{PN}$ এবং P বিন্দুতে অঙ্কিত অভিলম্বটি যদি উপবৃত্তের পরাক্ষকে G বিন্দুতে ছেদ করে, তবে, প্রমাণ কর যে, $CG=e^2CN$.

16. কোন বিন্দু হইতে কোন অধিবৃত্তের উপর যদি তিনটি অভিলম্ব অঙ্কন করা যায়, তবে প্রমাণ কর যে, ঐ অভিলম্ব-তিনটির পাদবিন্দুগুলির কোটিত্রয়ের বৈজিক সমষ্টি শূন্য হয়।

17. $y^2=4ax$-এর উপরিস্থ $(am_1^2, 2am_1)$ বিন্দুতে অভিলম্বটি যদি অধিবৃত্তটিকে পুনরায় $(am_2^2, 2am_2)$ বিন্দুতে ছেদ করে, তবে দেখাও যে, $m_1^2+m_1m_2+2=0$.

18. একটি বৃত্ত ও একটি অধিবৃত্ত চারিটি বিন্দুতে ছেদ করে। দেখাও যে, ঐ ছেদবিন্দু-চতুষ্টয়ের কোটিগুলির মানের বৈজিক সমষ্টি শূন্য হইবে।

19. যদি কোন অধিবৃত্তস্থ বিন্দু P হইতে নিয়ামকের উপর অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দু M হয় এবং P বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকটি যদি অধিবৃত্তটির x-অক্ষকে T বিন্দুতে ছেদ করে, তবে দেখাও যে, নাভি S হইতে $\overline{SM}$ রেখা ও $\overline{PT}$ স্পর্শক অধিবৃত্তের y-অক্ষের (বা শীর্ষবিন্দুগামী স্পর্শকের) উপর পরস্পরকে ছেদ করে।

[সংকেত : M বিন্দুর ভুজ $= -a$; P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x_1, y_1) হইলে, M বিন্দুর কোটি y_1 এবং স্থানাঙ্ক $(-a, y_1)$ হইবে। S-এর স্থানাঙ্ক $(a, 0)$; $\overrightarrow{PT}$ স্পর্শকের এবং x-অক্ষের সমীকরণ হইতে T-এর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। $\overline{SP}$-এর এবং y-অক্ষের সমীকরণ হইতে উহাদের ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক এবং $\overrightarrow{TP}$ ও y-অক্ষের সমীকরণ হইতে উহাদের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। এই দুইটি স্থানাঙ্কের অভিন্নতা হইতে প্রশ্ন সমাধান কর।]

20. কোন উপবৃত্তের উপাক্ষস্থিত যে বিন্দু-দুইটির প্রত্যেকটি, কেন্দ্র হইতে সাংখ্যমানে $\sqrt{a^2-b^2}$ পরিমাণ দূরে অবস্থিত, প্রমাণ কর যে, সেই বিন্দু দুইটি হইতে ঐ উপবৃত্তের যে-কোন স্পর্শকের দূরত্ব-দুইটির বর্গের বৈজিক সমষ্টি $2a^2$ পরিমাণ হইবে।

21. প্রমাণ কর যে, একটি পরাবৃত্তের যে-কোন স্পর্শকের উপর ঐ অধিবৃত্তের নাভি হইতে অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দুর সঞ্চারপথ পরাবৃত্তটির সহায়ক বৃত্ত।

22. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ পরাবৃত্তটির যে-কোন স্পর্শকের উপর নাভিদ্বয় হইতে অঙ্কিত লম্ব যদি যথাক্রমে p ও p' হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $pp'=b^2$.

23. কোন উপবৃত্তের নাভিলম্বের একটি প্রান্তবিন্দুতে অঙ্কিত অভিলম্বটি যদি ঐ উপবৃত্তের উপাক্ষের একটি প্রান্তবিন্দুগামী হয়, তবে দেখাও যে, উপবৃত্তটির উৎকেন্দ্রতা e-এর মান $e^4+e^2-1=0$ সমীকরণটি দ্বারা নির্দিষ্ট হইবে।

24. একটি উপবৃত্তের যে-কোন স্পর্শক যদি ঐ উপবৃত্তের পরাক্ষের প্রান্তবিন্দুদ্বয়ে অঙ্কিত স্পর্শক-যুগলকে T_1 ও T_2 বিন্দুতে ছেদ করে, তবে দেখাও যে, T_1T_2 ব্যাসের উপর অঙ্কিত বৃত্ত উপবৃত্তটির নাভিগামী হইবে।

[সংকেত : T_1 ও T_2-এর এবং T_1T_2-এর মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর এবং দেখাও যে ঐ মধ্যবিন্দু হইতে প্রতিটি নাভির দূরত্ব $=\frac{1}{2}T_1T_2$; ইহা হইতে প্রশ্ন সমাধান কর।]

25. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ পরাবৃত্তটির উপরিস্থ (x_1, y_1) বিন্দুতে অঙ্কিত অভিলম্বটি যদি x-অক্ষকে M বিন্দুতে এবং y-অক্ষকে N বিন্দুতে ছেদ করে এবং O বিন্দুটি যদি মূলবিন্দু হয়, তবে তবে দেখাও যে (OM, ON) সূচিত বিন্দুটি $\frac{x^2}{(k/a)^2}-\frac{y^2}{(k/b)^2}=1$ আকারের একটি পরাবৃত্তের উপর শায়িত হইবে, যেখানে $k=a^2+b^2$.

[**সংকেত :** অভিলম্ব, x-অক্ষ ও y-অক্ষের সমীকরণ

যথাক্রমে $\frac{y-y_1}{y_1/b^2}=-\frac{x-x_1}{x_1/a^2}$ ··· (1), $y=0$ ··· (2) এবং $x=0$ ··· (3) ; (1) ও (2) হইতে $x=$ OM এবং (1) ও (3) হইতে $y=$ ON-এর মান নির্ণয় করিয়া দেখাও যে, $\frac{a^2x^2}{(a^2+b^2)^2}-\frac{b^2y^2}{(a^2+b^2)^2}=\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}=1$; ইত্যাদি।]

26. (i) কোন অধিবৃত্তের কোন জ্যা যদি অধিবৃত্তটিকে $(at_1^2, 2at_1)$ এবং $(a_2t^2, 2at_2)$ বিন্দুতে ছেদ করে, তবে দেখাও যে, ঐ জ্যা-টির নাভিগামী হওয়ার শর্ত হইল $t_1t_2=-1$.

(ii) অতএব, প্রমাণ কর যে অধিবৃত্তের নাভিগামী জ্যা-এর প্রান্তবিন্দুদ্বয়ে অঙ্কিত স্পর্শক-দ্বয় ঐ অধিবৃত্তের নিয়ামকের উপর পরস্পর লম্বভাবে মিলিত হয়।

[**সংকেত :** (i) দেখাও যে $(at_1^2, 2at_1)$ ও $(at_2^2, 2at_2)$ বিন্দুগামী রেখা $y(t_1+t_2)=2(x+at_1t_2)$ নাভিগামী হইলে, $0=2(a+at_1t_2)$ বা $t_1t_2=-1$; (ii) নাভিগামী জ্যা-এর প্রান্তবিন্দুদ্বয়ে স্পর্শকের সমীকরণ $t_1y=x+at_1^2$ এবং $t_2y=x+at_2^2$ সমাধান করিলে $x=at_1t_2=-a$ হয় ; ইত্যাদি।]

27. দেখাও যে কোন অধিবৃত্তের নাভিগামী জ্যা-এর একপ্রান্তে অঙ্কিত স্পর্শকটি উহার অপর প্রান্তে অঙ্কিত অভিলম্বটির সমান্তরাল হয়।

[**সংকেত :** যে-কোন নাভিগামী জ্যা-এর প্রান্তবিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক $(at_1^2, 2at_1)$ এবং $(at_2^2, 2at_2)$ ধরিলে $t_1t_2=-1$ হইবে। ঐ প্রান্তদ্বয়ের একটিতে স্পর্শকের প্রবণতা $\frac{1}{t_1}$ এবং অপরটির অভিলম্বের প্রবণতা যে $(-t_2)$ তাহা প্রমাণ কর ; ইত্যাদি ।]

28. দেখাও যে অধিবৃত্তের যে-কোন দুইটি স্পর্শকের ছেদবিন্দুর কোটি স্পর্শবিন্দু দুইটির কোটিদ্বয়ের সমান্তর-মধ্যক (Arithmetic mean).

5·10. স্পর্শজ্যা বা বিন্দুবিশেষের পোলার (Chord of contact or polar) :

বহিঃস্থ কোন বিন্দু হইতে প্রত্যেক কণিকের উপর যে-দুইটি স্পর্শক আঁকা যায়, সেই স্পর্শকদ্বয়ের স্পর্শবিন্দু-দুইটির সংযোজক জ্যা-কে **স্পর্শ-জ্যা** বা **পোলার** এবং বহিঃস্থ বিন্দুটিকে বলে ঐ পোলারের **মেরুবিন্দু** বা **পোল**।

5·11. স্পর্শ-জ্যা বা পোলারের সমীকরণ :

(i) $x^2+y^2=a^2$ সূচিত একটি বৃত্তের উপর বহিঃস্থ বিন্দু (x_1, y_1) হইতে অঙ্কিত স্পর্শকদ্বয়ের সমীকরণ হইবে, $xx_1+yy_1=a^2$; ইহারা বৃত্তটিকে যেন (x_2, y_2)

এবং (x_3, y_3) বিন্দুতে স্পর্শ করে। স্পষ্টতঃ, এই বিন্দু-দুইটিই বৃত্তটির উপর অবস্থিত এবং ইহাদের প্রত্যেকটি বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক (x_1, y_1) বিন্দুগামী।

এখন, (x_2, y_2) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $xx_2 + yy_2 = a^2$.

এই স্পর্শক $(x_1\ y_1)$ বিন্দুগামী বলিয়া, $x_1x_2 + y_1y_2 = a^2$. ... (1)

অনুরূপে, (x_3, y_3) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ, $xx_3 + yy_3 = a^2$

এবং এই স্পর্শক (x_1, y_1) বিন্দুগামী বলিয়া, $x_1x_3 + y_1y_3 = a^2$ ... (2)

স্পষ্টতঃ, $xx_1 + yy_1 = a^2$ সমীকরণটিতে x ও y-এর স্থলে যথাক্রমে x_2 ও y_2 বসাইলে, (1)-নম্বর সমীকরণ এবং x_3 ও y_3 বসাইলে, (2)-নম্বর সমীকরণ পাওয়া যায়। অতএব (x_2, y_2) এবং (x_3, y_3) বিন্দুদ্বয় উভয়েই

$xx_1 + yy_1 = a^2$ সূচিত রেখার উপর অবস্থিত।

সুতরাং (x_2, y_2) ও (x_3, y_3) স্পর্শবিন্দুদ্বয়ের সংযোজক জ্যা বা স্পর্শ-জ্যা **অর্থাৎ (x_1, y_1) বিন্দুর পোলারের সমীকরণ,**

$$xx_1 + yy_1 = a^2.$$

অনুরূপে প্রমাণ করা যায় যে, $(x_1\ y_1)$ বিন্দুর পোলার বা স্পর্শ-জ্যা-এর সমীকরণ :

(ii) অধিবৃত্ত, $y^2 = 4ax$-এর ক্ষেত্রে $yy_1 = 2a(x + x_1)$;

(iii) উপবৃত্ত $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$-এর ক্ষেত্রে $\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1$

এবং (iv) পরাবৃত্ত $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$-এর ক্ষেত্রে $\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1$.

টীকা : লক্ষণীয় যে, (x_1, y_1) বিন্দুতে কনিকের স্পর্শক ও পোলারের সমীকরণ, উভয়ের আকার এক। **বিন্দুটি কনিকের উপর অবস্থিত হইলে ঐ সমীকরণ স্পর্শক, এবং কনিকের বহিঃস্থ হইলে পোলার বা স্পর্শ-জ্যা বুঝায়।**

5·12. জ্যা-বিশেষের মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্কে প্রকাশিত সমীকরণ *(Equation of a chord in terms of the co-ordinates of its middle point)* :

(i) $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তের একটি জ্যা-এর মধ্যবিন্দু যেন (x_1, y_1). এই জ্যা-টি যদি $y = mx + c$ দ্বারা সূচিত হয়, তবে তাহা যেন অধিবৃত্তটিকে (x', y') এবং (x'', y'') বিন্দুতে ছেদ করে।

এখন, $y^2 = 4ax$ সমীকরণে $y = mx + c$ হইতে প্রাপ্ত মান $x = \frac{y - c}{m}$ বসাইয়া

$y^2 = \frac{4a(y-c)}{m}$ বা $my^2 - 4ay + 4ac = 0$ পাওয়া যায়। y-এর এই দ্বিঘাত সমীকরণ হইতে y' ও y'', এই দুইটি মান পাওয়া যাইবে।

স্পষ্টতঃ, $y' + y'' = \frac{4a}{m}$; কিন্তু জ্যা-টির মধ্যবিন্দুর কোটি $y_1 = \frac{y'+y''}{2}$ বলিয়া,

$$\mathbf{y_1 = \frac{y'+y''}{2} = \frac{2a}{m}} \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$$

বা, $m = \frac{2a}{y_1}$, অর্থাৎ আলোচ্য জ্যাটির প্রবণতা $= \frac{2a}{y_1}$.

সুতরাং (x_1, y_1)-গামী জ্যা-এর সমীকরণ হইবে

$$y - y_1 = \frac{2a}{y_1}(x - x_1);$$

বা, $yy_1 - y_1^2 = 2ax - 2ax_1$;

বা, $yy_1 - 2ax = y_1^2 - 2ax_1$;

বা, $yy_1 - 2ax - 2ax_1 = y_1^2 - 2ax_1 - 2ax_1$;

বা, $\mathbf{yy_1 - 2a(x + x_1) = y_1^2 - 4ax_1}$ $\cdots$ (2)

টীকা 1. (x_1, y_1) বিন্দুতে $y^2 = 4ax$-এর স্পর্শক $yy_1 - 2a(x + x_1) = 0$-কে $\mathbf{T_1 = 0}$ এবং অধিবৃত্তটিতে $(x_1, y_1,)$ বসাইয়া, প্রাপ্ত $y_1^2 - 4ax_1 = 0$-কে $\mathbf{S_1 = 0}$ দ্বারা সূচিত করিলে, উপরোক্ত জ্যা-এর সমীকরণ হয় $\mathbf{T_1 = S_1}$.

(2) উপরের উপপাদ্যটির (1)-চিহ্নিত সমীকরণ হইতে দেখা যায় যে, (x_1, y_1) বিন্দু যাহার মধ্যবিন্দু এবং m যাহার প্রবণতা সেইরূপ জ্যা-এর মধ্যবিন্দুর কোটি $y_1 = \frac{2a}{m}$. সুতরাং ঐ জ্যা-এর সমান্তরাল একপ্রস্থ জ্যা-এর মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ হইবে $\mathbf{y = \frac{2a}{m}}$.

(ii) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্তটির (x', y') ও (x'', y'') বিন্দু-দুইটির সংযোজক জ্যা-এর মধ্যবিন্দু যেন (x_1, y_1). ঐ জ্যা-এর সমীকরণ যদি $y = mx + c$ হয়, তবে অধিবৃত্তের সমীকরণে $y = mx + c$ বসাইয়া, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{(mx+c)^2}{b^2} = 1$;

বা, $b^2x^2 + a^2m^2x^2 + 2a^2mcx + a^2c^2 = a^2b^2$;

বা, $(b^2 + a^2m^2)x^2 + 2a^2mcx + a^2c^2 - a^2b^2 = 0$ সমীকরণটি হইতে

$$x' + x'' = \frac{-2a^2mc}{b^2 + a^2m^2} \text{ হয়।}$$

কিন্তু জ্যা-টির মধ্যবিন্দুর ভুজ $x_1 = \frac{x' + x''}{2}$ বলিয়া $x_1 = \frac{-a^2mc}{b^2 + a^2m^2}$;

বা, $c = \frac{-x_1(b^2 + a^2m^2)}{a^2m}$. ... ... (1)

আবার, (x_1, y_1) যেহেতু $y = mx + c$-এর উপর অবস্থিত, সেইহেতু

$y_1 = mx_1 + c$; বা, $c = y_1 - mx_1$. ... ... (2)

$\therefore$ (1) ও (2) হইতে, $\frac{-x_1(b^2 + a^2m^2)}{a^2m} = y_1 - mx_1$;

বা, $-b^2x_1 + a^2m^2x_1 = a^2my_1 - a^2m^2x_1$;

বা, $m = \frac{-b^2x_1}{a^2y_1}$. ... ... (3)

সুতরাং, আলোচ্য জ্যা-টির প্রবণতা $= \frac{-b^2x_1}{a^2y_1}$ এবং উহা (x_1, y_1) বিন্দু বলিয়া, উহার সমীকরণ এইবার নিম্নরূপে লেখা যায়,

$$y - y_1 = \frac{-b^2x_1}{a^2y_1}(x - x_1);$$

বা, $\frac{yy_1}{b^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = \frac{-xx_1}{a^2} + \frac{x_1^2}{a^2}$;

বা, $\mathbf{\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2}}$.

ইহাই মধ্যবিন্দুর স্থানাঙ্কে জ্যা-টির সমীকরণ।

টীকা. 1. $\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 0$, স্পর্শকটিকে $T_1 = 0$ এবং উপবৃত্তের সমীকরণে (x_1, y_1) বসাইয়া, প্রাপ্ত মানকে $S_1 = 0$ ধরিলে, এক্ষেত্রেও (x_1, y_1) মধ্যবিন্দু-বিশিষ্ট জ্যা-এর সমীকরণ $T_1 = S_1$ হয়।

টীকা. 2. $a^2 = b^2$ ধরিলে, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্তের সমীকরণটি $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তে রূপান্তরিত হয় এবং ঐ উপবৃত্তের (x_1, y_1) মধ্যবিন্দু-বিশিষ্ট জ্যা-এর সমীকরণ $\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2}$-এ রূপান্তরিত হয়, $xx_1 + yy_1 = x_1^2 + y_1^2$ সমীকরণে।

সুতরাং, **$\mathbf{x^2 + y^2 = a^2}$ বৃত্তের একটি জ্যা-এর মধ্যবিন্দু যদি $\mathbf{(x_1, y_1)}$ হয়, তবে ঐ জ্যা-এর সমীকরণ হইবে**

$$\mathbf{xx_1 + yy_1 = x_1^2 + y_1^2}.$$

5·12. (ii)-এর পদ্ধতিতে ইহা অনায়াসে প্রমাণ করা যায়।

টীকা. 3. আবার, $b^2 = -b^2$ ধরিলে, উপবৃত্তের সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ রূপান্তরিত হয়, $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ পরাবৃত্তের সমীকরণে এবং উপবৃত্তের (x_1, y_1) মধ্যবিন্দু-বিশিষ্ট জ্যা-এর সমীকরণ রূপান্তরিত হয়, পরাবৃত্তের (x_1, y_1) মধ্যবিন্দু-বিশিষ্ট জ্যা-এর সমীকরণে $\frac{xx_1}{a^2}-\frac{yy_1}{b^2}=\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1}{b^2}$. 5·12 (ii)-এর পদ্ধতিতে ইহাকেও সহজেই প্রমাণ করা যায়।

টীকা. 4. 5·12 অনুচ্ছেদের (ii) বিভাগের (3)-চিহ্নিত সমীকরণ হইতে দেখা যায় যে, (x_1, y_1) মধ্যবিন্দু-বিশিষ্ট জ্যা-এর প্রবণতা $m=\frac{-b^2x_1}{a^2y_1}$;

$$\therefore \quad y_1=\frac{b^2}{a^2m}x_1.$$

∴ **উপবৃত্তের** একপ্রস্থ সমান্তরাল জ্যা-এর মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ $\mathbf{y=\frac{-b^2}{a^2m}x}$; ইহা একটি সরল রেখা।

অনুরূপে, $b^2=-b^2$ বসাইয়া **পরাবৃত্তের** একপ্রস্থ সমান্তরাল জ্যা-এর মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ $\mathbf{y=\frac{b^2}{a^2m}x}$ সমীকরণ-সূচিত সরল রেখা। এবং $a^2=b^2$ বসাইয়া **বৃত্তের** একপ্রস্থ সমান্তরাল জ্যা-এর মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ $\mathbf{y=\frac{-x}{m}}$ সমীকরণ-সূচিত সরল রেখা।

টীকা. 5. **লক্ষণীয়** যে, বৃত্ত, উপবৃত্ত এবং পরাবৃত্তের একপ্রস্থ সমান্তরাল জ্যা-এর সঞ্চারপথের সমীকরণ ধ্রুবক-সংখ্যা-বর্জিত বলিয়া সর্বদা কেন্দ্রগামী সরল রেখা সূচিত করে। কেবল অধিবৃত্তের ক্ষেত্রে এইরূপ একপ্রস্থ সমান্তরাল জ্যা-এর সমীকরণ $y=\frac{2a}{m}$-সূচিত সরল রেখাটি x-অক্ষের সমান্তরাল হয়।

সংজ্ঞা: (a) যে-কোন কনিকের একপ্রস্থ সমান্তরাল জ্যা-এর মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথকে সংশ্লিষ্ট কনিকের একটি **ব্যাস** (Diameter) বলে।

(b) এইরূপ একটি ব্যাস যে-সকল সমান্তরাল জ্যা-এর মধ্যবিন্দুগামী হয়, সেই-সকল জ্যা-এর যে-টি নাভিগামী হয়, তাহাকে ঐ ব্যাসের **প্যারামিটার** (Parameter) বলে।

(c) কোন কনিকের দুইটি ব্যাসের একটি যখন অপরটির সমান্তরাল জ্যা-সমূহের মধ্যবিন্দুগামী হয় তখন উহাদের একটিকে অপরটির **প্রতিযোগী ব্যাস** (Conjugate diameter) বলে।

অনুসিদ্ধান্ত ঃ টীকা (4) হইতে দেখা যায়, উপবৃত্ত, পরাবৃত্ত এবং বৃত্তের ব্যাস-সমূহের সমীকরণগুলিকে $y = \frac{k}{m}x$ আকারে লেখা যায়।

এখন $y = mx$ একপ্রস্থ সমান্তরাল জ্যা এবং উহাদের মধ্যবিন্দুগামী ব্যাসের সমীকরণ যেন $y = m_1 x$। কিন্তু যে-কোন ব্যাসের সমীকরণ

$$y = \frac{k}{m}x \text{ বলিয়া}, m_1 = \frac{k}{m}.$$

সুতরাং $mm_1 = k$ শর্তে $y = m_1 x$ যেমন $y = mx$-সূচিত সমান্তরাল জ্যা-সমূহের মধ্যবিন্দুগামী ব্যাস, $y = mx$ তেমনি $y = m_1 x$-সূচিত সমান্তরাল জ্যা-সমূহের মধ্যগামী ব্যাস।

অতএব, $mm_1 = k$ শর্তসাপেক্ষ $y = mx$ এবং $y = m_1 x$, দুইটি প্রতিযোগী ব্যাসের সমীকরণ।

এই শর্তে $k = -\frac{b^2}{a^2}$ হইলে উপবৃত্তের, $k = \frac{b^2}{a^2}$ হইলে পরাবৃত্তের

এবং $k = -1$ হইলে উহারা বৃত্তের প্রতিযোগী ব্যাস হইবে।

উদাহরণমালা

উদা. 1. $x^2 + y^2 = 169$ বৃত্ত-সাপেক্ষে $(13, -13)$ বিন্দুর স্পর্শ-জ্যা-এর সমীকরণ নির্ণয় কর।

$x^2 + y^2 = 169$ বৃত্ত-সাপেক্ষে (x_1, y_1) বিন্দুর স্পর্শ-জ্যা-এর সমীকরণ $xx_1 + yy_1 = 169$. সুতরাং একই বৃত্ত-সাপেক্ষে $(13, -13)$ বিন্দুর স্পর্শ-জ্যা-এর সমীকরণ হইবে,

$$13x - 13y = 169, \text{ বা, } \mathbf{x - y = 13}.$$

উদা. 2. $y^2 = 4ax$-এর কোন নির্দিষ্ট বিন্দু (h, k)-গামী জ্যা-সমূহের মধ্যবিন্দু-গুলির সঞ্চারপথ নির্ণয় কর। [C. U., B. A. & B. Sc., 1924]

$y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তের কোন জ্যা-এর মধ্যবিন্দু (x_1, y_1) হইলে, এই জ্যা-এর সমীকরণ হইবে,

$$yy_1 - 2ax = y_1^2 - 2ax_1.$$

জ্যা-টি (h, k) বিন্দুগামী হইলে,

$$ky_1 - 2ah = y_1^2 - 2ax_1.$$

অতএব, মধ্যবিন্দু (x_1, y_1)-এর সঞ্চারপথ,

$$ky - 2ah = y^2 - 2ax, \text{ বা, } y^2 - ky = 2a(x - h);$$

ইহা একটি অধিবৃত্ত।

উদা. 3. অধিবৃত্তের যে-কোন ব্যাসের শীর্ষবিন্দুতে স্পর্শকটি, ঐ ব্যাস দ্বারা সমদ্বিখণ্ডিত সমান্তরাল জ্যা-সমূহের সমান্তরাল।

অধিবৃত্তের ব্যাস উহার অক্ষের সমান্তরাল বলিয়া অধিবৃত্তের সমীকরণ $y^2=4ax$ হইলে, উহার যে-কোন ব্যাসের সমীকরণ $y=\frac{2a}{m}$ ধরা যায়।

এই ব্যাস $y=mx$-এর সমান্তরাল জ্যা-সমূহকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। ... (1)

$y^2=4ax$ এবং $y=\frac{2a}{m}$-কে সহ-সমীকরণরূপে সমাধান করিলে দেখা যায়,

$$y=\frac{2a}{m} \text{ এবং } x=\frac{y^2}{4a}=\frac{4a^2}{m^2.4a}=\frac{a}{m^2}.$$

অতএব, ব্যাস এবং অধিবৃত্তের ছেদবিন্দু, অর্থাৎ ব্যাসের শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক

$$\left(\frac{a}{m^2}, \frac{2a}{m}\right).$$

এই বিন্দুতে অধিবৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণ

$$y\cdot\frac{2a}{m}=2a\left(x+\frac{a}{m^2}\right),$$

বা, $$y=mx+\frac{a}{m}. \quad \cdots \quad \cdots (2)$$

(1) এবং (2) হইতে দেখা যায়, উভয় ক্ষেত্রেই প্রবণতা m ; অতএব, যে-কোন ব্যাসের শীর্ষবিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক, ঐ ব্যাস দ্বারা সমদ্বিখণ্ডিত জ্যা-সমূহের সমান্তরাল।

উদা. 4. $y^2=8x$ অধিবৃত্তের (4, 5) বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত জ্যা-টির সমীকরণ নির্ণয় কর।

$y^2=8x=4.2x$ বলিয়া, এখানে $a=2$, $y^2=4ax$-এর (x_1, y_1) বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত জ্যা-এর সমীকরণ

$$yy_1-2a(x+x_1)=y_1^2-4ax_1.$$

$\therefore$ $y^2=4.2.x$ অধিবৃত্তের (4, 5) বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত জ্যা-টির সমীকরণ হইবে

$$y.5-2.2(x+4)=5^2-4.2.4$$

বা, $5y-4x-16=25-32$; বা, $\mathbf{5y-4x=9}$.

উদা. 5. $y^2=4x$ অধিবৃত্তটির যে-সকল জ্যা $(-2, 3)$ বিন্দুগামী তাহাদের মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

$y^2=4ax$-এর (x_1, x_1) বিন্দুতে যাহার মধ্যবিন্দু সেই জ্যা-এর সমীকরণ

$$yy_1-2a(x+x_1)=y_1^2-4ax_1.$$

$\therefore$ $y^2=4x=4.1.x$ অধিবৃত্তের মধ্যবিন্দু (x_1, y_1) হইলে, উহার সমীকরণ হইবে $yy_1-2(x+x_1)=y_1^2-4x_1$. এই জ্যা $(-2, 3)$ বিন্দুগামী বলিয়া,

$$3y_1-2(-2+x_1)=y_1^2-4x_1\ ;$$

বা, $3y_1+4-2x_1=y_1^2-4x_1$; বা, $3y_1+4=y_1^2-2x_1$;

বা, $y_1^2-3y_1-2(x_1+2)=0$.

$\therefore$ (x_1, y_1)-এর সঞ্চারপথ $y^2-3y-2(x+2)=0$. ইহা দ্বিঘাত সমীকরণ বলিয়া একটি অধিবৃত্ত সূচিত করে।

উদা. 6. $5y^2=8x$-এর যে-ব্যাস $4x-5y+10=0$-এর সমান্তরাল সকল জ্যা-কে সমদ্বিখণ্ডিত করে তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

প্রদত্ত অধিবৃত্তের সমীকরণ, $5y^2=8x$; বা, $y^2=4.\frac{2}{5}.x$.

$\therefore$ এখানে, $a=\frac{2}{5}$.

প্রদত্ত সরল রেখার সমীকরণ, $4x-5y+10=0$, বা, $y=\frac{4}{5}x+2$ বলিয়া, উহার প্রবণতা $m=\frac{4}{5}$.

$\therefore$ নির্ণেয় ব্যাসের সমীকরণ, $y=\dfrac{2a}{m}=\dfrac{2\times\frac{2}{5}}{\frac{4}{5}}=1$;

বা, $y=1$ বা, $\mathbf{y-1=0}$.

উদা. 7. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তের (h, k) বিন্দুগামী জ্যা-সমূহের মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

উপবৃত্তটির যে জ্যা-এর মধ্যবিন্দু (x_1, y_1) তাহার সমীকরণ,

$\dfrac{xx_1}{a^2}+\dfrac{yy_1}{b^2}=\dfrac{x_1^2}{a^2}+\dfrac{y_1^2}{b^2}$; উহা (h, k) বিন্দুগামী বলিয়া,

$$\frac{hx_1}{a^2}+\frac{ky_1}{b^2}=\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}.$$

$\therefore$ মধ্যবিন্দুর (x_1, y_1)-এর সঞ্চারপথ হইবে

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{hx}{a^2}+\frac{ky}{b^2}.$$

উদা. 8. $3x^2+5y^2=15$-এর যে-ব্যাসটি $3x-4y+4=0$ রেখার সমান্তরাল জ্যা-সমূহের মধ্যবিন্দুগামী তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

উভয়পক্ষকে 15 দ্বারা ভাগ করিলে, প্রদত্ত সমীকরণটি হয়,

$$\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{3}=1\ ;\quad \text{সুতরাং, } a^2=5 \text{ এবং } b^2=3.$$

আবার, $3x-4y+4=0$; বা, $y=\frac{3}{4}x+1$-এর প্রবণতা $m=\frac{3}{4}$;

$\therefore$ নির্ণেয় ব্যাসের সমীকরণ, $y=m_1 x$ হইলে, এখানে $mm_1=-\frac{b^2}{a^2}$;

বা, $\frac{3}{4}m_1=-\frac{3}{5}$; বা, $m_1=-\frac{4}{5}$;

$\therefore$ নির্ণেয় ব্যাসের সমীকরণ, $y=-\frac{4}{5}x$; বা, $\mathbf{4x+5y=0.}$

উদা. 9. $3x^2+4y^2=36$-এর যে-ব্যাসটি ঐ উপবৃত্তের $2y=3x$ ব্যাসটির প্রতিযোগী, তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

36 দ্বারা ভাগ করিয়া $3x^2+4y^2=36$-কে $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{9}=1$ আকারে লিখিলে, $a^2=12.3b^2=9$ হয়।

প্রদত্ত ব্যাস, $2y=3x$, বা, $y=\frac{3}{2}x$-এর প্রবণতা $m=\frac{3}{2}$; উহার প্রতিযোগী ব্যাসের প্রবণতা m_1 হইলে,

$$mm_1=-\frac{b^2}{a^2}\text{ ; বা, } \frac{3}{2}m_1=-\frac{b^2}{a^2}=-\frac{9}{12};\quad \therefore m_1=-\frac{1}{2}.$$

$\therefore$ নির্ণেয় প্রতিযোগী ব্যাসের সমীকরণ $y=-\frac{1}{2}x$, বা, $\mathbf{x+2y=0.}$

উদা. 10. দেখাও যে, $3y+2x=0$ এবং $5x-4y=0$ রেখা-দুইটি $5x^2+6y^2=15$ উপবৃত্তটির দুইটি পরস্পর প্রতিযোগী ব্যাস।

প্রদত্ত উপবৃত্তের সমীকরণকে 15 দিয়া ভাগ করিলে $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{5/2}=1$ হয়। সুতরাং ইহার ক্ষেত্রে $a^2=3$ এবং $b^2=\frac{5}{2}$; $\therefore -\frac{b^2}{a^2}=-\frac{\frac{5}{2}}{3}=-\frac{5}{6}.$

আবার, প্রদত্ত ব্যাস-দুইটিকে $y=-\frac{2}{3}x$ এবং $y=\frac{5}{4}x$ রূপে লিখিলে উহাদের প্রবণতার গুণফল $=-\frac{2}{3}\times\frac{5}{4}=-\frac{5}{6}$; সুতরাং ব্যাস-দুইটি পরস্পরের প্রতিযোগী।

উদা. 11. $8x^2+12y^2=96$ উপবৃত্তের যে-দুইটি প্রতিযোগী ব্যাস পরস্পরের সহিত $\tan^{-1}7$ কোণে নত, তাহাদের সমীকরণ নির্ণয় কর।

উপবৃত্তের সমীকরণটির উভয় পক্ষকে 96 দ্বারা ভাগ করিলে, উহা এইরূপ হয় :

$$\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{8}=1.\quad \text{সুতরাং এখানে } a^2=12 \text{ এবং } b^2=8.$$

এখন, প্রতিযোগী ব্যাস-দুইটি যেন, $y=m_1x$ এবং $y=m_2x$ এবং তাহাদের অন্তর্গত কোণ $\tan^{-1}7$ যেন θ ; তাহা হইলে,

$$m_1m_2=-\frac{b^2}{a^2}=-\frac{8}{12}=-\frac{2}{3};\text{ বা, } 3m_1m_2=-2 \quad\cdots\quad (1)$$

আবার, $\tan^{-1} 7 = \theta$ বলিয়া,

$$\tan \theta = 7 = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} = \frac{m_1 - m_2}{1 - \frac{2}{3}} = 3(m_1 - m_2)\ ;$$

বা, $m_1 - m_2 = \frac{7}{3}$ ... ... (2)

(1) ও (2) সমাধান করিয়া,

$$m_1 + m_2 = \sqrt{(m_1 - m_2)^2 + 4m_1 m_2} = \sqrt{\tfrac{49}{9} - \tfrac{8}{3}} = \sqrt{\tfrac{25}{9}} = \pm \tfrac{5}{3}\ ;$$

বা, $m_1 + m_2 = \pm \frac{5}{3}$ ... ... (3)

(2) ও (3) হইতে, $m_1 = \frac{1}{2}(\frac{7}{3} \pm \frac{5}{3}) = 2$, বা, $\frac{1}{3}$

এবং $m_2 = \frac{1}{2}(\pm \frac{5}{3} - \frac{7}{3}) = -\frac{1}{3}$, বা, -2.

$\therefore$ নির্ণেয় ব্যাসদ্বয়ের সমীকরণ $y = 2x$ ও $y = -\frac{1}{3}x$;

অথবা, $y = \frac{1}{3}x$ ও $y = -2x$;

অর্থাৎ, $\mathbf{2x - y = 0}$ ও $\mathbf{x + 3y = 0}$, অথবা, $\mathbf{x - 3y = 0}$ ও $\mathbf{2x + y = 0}$.

উদা. 12. $3x^2 - 4y^2 = 36$ পরাবৃত্তের (6, 1) বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত জ্যা-টির সমীকরণ নির্ণয় কর।

পরাবৃত্তের সমীকরণটির দুইপক্ষকে 36 দিয়া ভাগ করিলে $\dfrac{x^2}{12} - \dfrac{y^2}{9} = 1$ হয় ;

সুতরাং ইহার ক্ষেত্রে $a^2 = 12$, $b^2 = 9$ এবং $\dfrac{b^2}{a^2} = \dfrac{9}{12} = \dfrac{3}{4}$.

এখন (6, 1) বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ হয়, $y - 1 = m(x - 6)$; রেখাটি প্রদত্ত পরাবৃত্তের জ্যা হইলে উহার মধ্যবিন্দুগামী ব্যাসের সমীকরণ হইবে,

$$y = \frac{b^2}{a^2 m} x = \frac{3x}{4m}\ ;$$

যেহেতু এই ব্যাস (6, 1) বিন্দুগামী সেইহেতু

$$1 = \frac{3 \times 6}{4m},\ \text{বা},\ m = \frac{9}{2}.$$

$y - 1 = m(x - 6)$ সমীকরণটিতে m-এর মান বসাইয়া নির্ণেয় জ্যা-এর সমীকরণটি হয় $y - 1 = \frac{9}{2}(x - 6)$; বা, $\mathbf{9x - 2y = 52}$.

প্রশ্নমালা 23

1. (i) $x^2 + y^2 = 16$-সূচিত বৃত্ত-সাপেক্ষে (3, 4) বিন্দুর এবং (ii) $x^2 + y^2 = 4$-সূচিত বৃত্ত-সাপেক্ষে (−2, 0) বিন্দুর স্পর্শ-জ্যা নির্ণয় কর।

2. $x^2 + y^2 = 81$ বৃত্তের যে-জ্যা (−2, 3) বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত সেই জ্যা-এর সমীকরণ নির্ণয় কর।

3. $y^2=6x$ অধিবৃত্তের যে-ব্যাসটি $3y+x+5=0$ রেখার সমান্তরাল জ্যা-গুলিকে সমদ্বিখণ্ডিত করে তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

4. দেখাও যে, $3y+20=0$ রেখাটি $y^2=30x$ অধিবৃত্তের যে-সকল জ্যা $9x+4y-1=0$ রেখার সমান্তরাল, তাহাদের সমদ্বিখণ্ডিত করে।

5. $y^2=10x$ অধিবৃত্তের যে-জ্যা-টি $(4, -5)$ বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হয়, তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

6. $5y^2=16x$ অধিবৃত্তের $(8, -5)$ বিন্দুগামী জ্যা-গুলির মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

7. দেখাও যে, $y^2=4ax$ অধিবৃত্তের শীর্ষগামী জ্যা-গুলির মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথটি হইবে $y^2=2ax$ অধিবৃত্ত।

8. $y^2=15x$ অধিবৃত্তের নাভিগামী যে-জ্যা x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সহিত $45°$ কোণে নত, সেই জ্যা-এর সমীকরণ নির্ণয় কর।

9. $5y^2=8x$ অধিবৃত্ত-সাপেক্ষে $(5, 4)$ বিন্দুর স্পর্শ-জ্যা-এর সমীকরণ নির্ণয় কর।

10. $3x^2+4y^2=1$ উপবৃত্তের যে-সকল জ্যা $y=3x-1$-এর সমান্তরাল তাহাদের মধ্যবিন্দুগামী ব্যাসটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

11. $5x^2+6y^2=30$ উপবৃত্তের যে-ব্যাস $5x+6y+8=0$ রেখার সমান্তরাল জ্যা-গুলিকে সমদ্বিখণ্ডিত করে তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

12. $2x^2+3y^2=24$-সূচিত অধিবৃত্তটির যে-ব্যাস $2x+3y=0$-এর প্রতিযোগী, তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

13. দেখাও যে, $5y-6x=0$ এবং $2x+3y=0$, এই রেখা-দুইটি $4x^2+5y^2=20$ উপবৃত্তের দুইটি পরস্পর-প্রতিযোগী ব্যাস।

14. দেখাও যে, $y+3x=0$ এবং $4y-x=0$, এই দুইটি রেখা $3x^2+4y^2=5$ উপবৃত্তের পরস্পর-প্রতিযোগী ব্যাস।

15. দেখাও যে, $4x-3y+4=0$ এবং $x+3y-7=0$, এই দুইটি রেখা $4x^2+9y^2=36$ উপবৃত্তের দুইটি পরস্পর-প্রতিযোগী ব্যাসের সমান্তরাল।

16. $3x^2+4y^2=12$-এর যে-দুইটি ব্যাস পরস্পরের সহিত $\tan^{-1} 13$ কোণে অবস্থিত, তাহাদের সমীকরণ নির্ণয় কর।

17. একটি উপবৃত্তের যে-দুইটি ব্যাস পরস্পরের সহিত $135°$ কোণ উৎপন্ন করে তাহাদের সমীকরণ নির্ণয় কর।

18. $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{6}=1$ উপবৃত্তের যে-জ্যা $(2, 1)$ বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত, তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

19. $3x^2+4y^2=36$-এর যে-জ্যা-এর মধ্যবিন্দু $(3, -1)$, সেই জ্যা-এর সমীকরণ নির্ণয় কর।

20. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}$-এর একটি জ্যা-এর মধ্যবিন্দু যদি $(2, -1)$ হয়, তবে দেখাও যে, ঐ জ্যা-টির সমীকরণ $8x-9y=25$.

21. দেখাও যে, $5x^2+6y^2=30$-এর জ্যা-গুলির মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{5}=\frac{x}{2}-y$.

22. দেখাও যে, $5x^2-8y^2=40$ পরাবৃত্তে $3x+16y+8=0$ রেখাটির সমান্তরাল সমস্ত জ্যা-কে $10x+3y=0$ রেখাটি সমদ্বিখণ্ডিত করে।

23. দেখাও যে, $7x-8y=0$ এবং $4x-5y=0$ রেখাদ্বয় $7x^2-10y^2=70$ পরাবৃত্তের দুইটি প্রতিযোগী ব্যাস।

24. $16x^2-9y^2=144$ পরাবৃত্তের যে-ব্যাস $x=2y$ ব্যাসের প্রতিযোগী, তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

25. $4x^2-5y^2=60$-এর যে-জ্যা $(5, 3)$ বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত, তাহার সমীকরণ নির্ণয় কর।

26. স্পর্শ-জ্যা-এর সমীকরণের সাহায্যে দেখাও যে, অধিবৃত্তের নাভিগামী জ্যা-এর প্রান্তবিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক-যুগলের ছেদবিন্দু ঐ অধিবৃত্তের নিয়ামকের উপর অবস্থিত।

উত্তরমালা

বীজগণিত

প্রশ্নমালা 1

1. $\sqrt[7]{a^5}$. 2. $\frac{1}{\sqrt{x^3}}$. 3. (Read $x^{-\frac{4}{5}}$ for $x^{\frac{4}{5}}$) $3\sqrt[5]{x^4}$.

4. $\frac{3}{\sqrt[5]{x^2}.\ \sqrt{a}}$. 5. $\frac{8}{\sqrt[3]{m^8}}$. 6. $\frac{\sqrt[4]{a^5}}{3\sqrt[5]{x^4}}$. 7. $\frac{1}{2\sqrt[6]{x}}$.

8. $\sqrt[5]{x^{2+a}}$. 9. $\sqrt[2m]{a^{11}}$. 10. $\sqrt[a]{x^4}$. 11. $x^{\frac{7}{3}}$.

12. $\frac{1}{a^{\frac{3}{2}}}$. 13. $x^{\frac{2}{3}}$. 14. $a^{\frac{2}{5}}$. 15. $x^{\frac{3}{2}}$.

16. $a^{\frac{3}{4}}$. 17. $\frac{1}{8}$. 18. 4. 19. 27.

20. 32. 21. $\frac{1}{27}$. 22. 36. 23. $\frac{1}{25}$.

24. 81. 25. 36. 26. x^{-m}.

প্রশ্নমালা 2

1. a^{-6}. 2. $a^{-\frac{1}{2}}b^{\frac{5}{8}}$. 3. ab^6. 4. $a^{-8}b^{-\frac{5}{3}}$.

5. a^8b^6. 6. $x^{-\frac{9}{2}}y^4$. 7. $x^{\frac{5}{32}}$. 8. a^{-1}.

9. y. 10. $\frac{4}{9}x^2a^2$. 11. $\frac{9}{16}x^{-2}a^{-2}$. 12. $a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{2}{3}}$.

13. $a^{-1}b^{\frac{2}{3}}c^{\frac{1}{6}}$. 14. $a^{\frac{3}{2}}b^{-\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{2}}$. 15. a^4b^2.

প্রশ্নমালা 3

1. $x-2x^{\frac{1}{2}}+1$. 2. $a-27b$. 3. a^3-64b^2.

4. $x-x^{\frac{1}{2}}$. 5. $a+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}-b$. 6. $x^{2n}-1+x^{-2n}$.

7. $x^{\frac{9}{4}}-x^{\frac{15}{8}}a^{\frac{3}{8}}+x^{\frac{9}{8}}a^{\frac{9}{8}}-x^{\frac{3}{8}}a^{\frac{15}{8}}+a^{\frac{9}{4}}$. 8. $x^{2^n}-a^{2^n}$.

9. $x^{2^{n-1}}-y^{2^{n-1}}$. 10. a^{m-1}. 11. $x^{\frac{3}{4}}+3x^{\frac{1}{2}}-1$.

12. $x^{\frac{3}{2}}-2x^{\frac{5}{4}}y^{-\frac{1}{4}}+xy^{-\frac{1}{2}}+2x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{1}{2}}-2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{4}}+y$.

13. $x^n+x^{\frac{n}{2}}a^{\frac{n}{2}}+a^n$. 14. $(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}})(x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}})$.

15. $a^{\frac{2}{3}}x^{-\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}x^{-\frac{1}{3}}+a^{-\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}}+a^{-\frac{2}{3}}x^{\frac{2}{3}}$.

16. $\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}$. 17. $\frac{2x+36x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}}{x-27y}$.

18. $\frac{a+x}{a^2+3ax+x^2}$. 19. 1. 20. $x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}}-x^{-\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}}$.

21. 1. 22. $\frac{a^2+b^2}{a(a+b)}$. 23. 2.

24. $\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^n+2$. 26. $\frac{\sqrt{a}}{b}$. 27. $\left(\frac{p}{q}\right)^{2m}$.

28. $\left(\frac{p}{q}\right)^{p+q}$. 31. 1. 32. 1.

34. $m=n^{\frac{1}{n-1}}$. 40. 3. 41. (i) $x=4$, $y=2$. (ii) $x=y=z=\frac{1}{3}a$.

প্রশ্নমালা 4

1. (i) $\sqrt{45}$. (ii) $\sqrt[3]{24}$. (ii) $\sqrt[4]{96}$. (iv) $\sqrt[4]{1280}$.
   (v) $\sqrt[n]{a^n b}$. (vi) $\sqrt[a]{x^{3a}y}$. (vii) $\sqrt[5]{a^{20}b^2}$.
2. (i) $3\sqrt{2}$. (ii) $4\sqrt{5}$. (iii) $5\sqrt[3]{2}$. (iv) $2\sqrt[5]{4}$.
   (v) $3\sqrt[4]{5}$. (vi) $7\sqrt[3]{4}$. (vii) $5\sqrt[4]{3}$. (viii) $a^2\sqrt[3]{b}$.
   (ix) $-8\sqrt[3]{5}$. (x) $-4ab\sqrt[3]{3b}$. (xi) $5a^2x\sqrt[3]{4ax}$.
3. (i) $7\sqrt{5}$. (ii) $\sqrt[3]{2}$. (iii) $5\sqrt[4]{5}$. (iv) $3\sqrt{3}$.
   (v) $6\sqrt{6}$. (vi) 0. (vii) 0. (viii) $(7x+y)\sqrt{5x}$.
   (ix) $(x^2-2y^2+3z^2)\sqrt[3]{a}$. (x) $4a\sqrt[4]{2x}$.
4. (i) $\sqrt[6]{27}$ এবং $\sqrt[6]{4}$. (ii) $\sqrt[12]{256}$ এবং $\sqrt[12]{125}$.
   (iii) $\sqrt[15]{8}$ এবং $\sqrt[15]{243}$. (iv) $\sqrt[12]{27}$ এবং $\sqrt[12]{25}$.
   (v) $\sqrt[24]{256}$ এবং $\sqrt[24]{216}$.
5. (i) শেষেরটি। (ii) প্রথমটি। (iii) প্রথমটি।
6. (i) $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[4]{6}$, $\sqrt{2}$. (ii) $\sqrt[6]{10}$, $\sqrt[4]{3}$, $\sqrt[12]{25}$.
7. $5\sqrt{2}$. 8. 9. 9. 30. 10. 5. 11. $3ax\sqrt[3]{6x}$.
12. $\sqrt[6]{864}$. 13. $\sqrt[6]{288}$. 14. $9\sqrt[6]{3}$. 15. $\sqrt[18]{32}$. 16. $40\sqrt{3}$.
17. $480\sqrt[3]{3}$. 18. $210abx\sqrt[3]{x}$. 19. $2\sqrt{\frac{2}{3}}$. 20. $\sqrt[3]{\frac{5}{4}}$.
21. $\sqrt[6]{\frac{2}{3}}$. 22. ˙577. 23. 1˙341. 24. 3˙535. 25. 26˙832.

প্রশ্নমালা 5

1. (i) $5\sqrt{3}-4\sqrt{30}+\sqrt{2}$. (ii) $\sqrt[5]{2}$. 2. $\sqrt[3]{2}$. 3. (i) $(a-b)$.
(ii) $5+2^{\frac{1}{3}}3^{\frac{2}{3}}+3\sqrt[3]{12}+2\sqrt[3]{18}$. 4. (i) $a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}$. (ii) $x^{\frac{1}{4}}-y^{\frac{1}{4}}$.

5. (i) $83+12\sqrt{35}$. (ii) $2a^2-2\sqrt{a^4-4b^4}$.

6. (i) $\frac{23-3\sqrt{21}}{10}$. (ii) $\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}$. (iii) $\frac{2+\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$.

7. (i) 5·828. (ii) 3·65. (iii) ·504.

8. $2x$. 9. $\sqrt{10}+\sqrt{5}$. 10. $2+\sqrt{3}$. 11. 198.

12. $4x\sqrt{x^2-1}$. 13. $2x^2$. 14. $\frac{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}{5}$.

15. $2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{12}+\sqrt[3]{9}$.

প্রশ্নমালা 6

1. $\sqrt{3}-1$. 2. $2+\sqrt{3}$. 3. $3-\sqrt{2}$. 4. $\sqrt{5}+\sqrt{3}$.
5. $3-\sqrt{5}$. 6. $5+\sqrt{3}$. 7. $4-\sqrt{5}$. 8. $3+2\sqrt{2}$.
9. $6+\sqrt{5}$. 10. $5-2\sqrt{3}$. 11. $2\sqrt{7}+\sqrt{3}$. 12. $3\sqrt{5}-2\sqrt{7}$.
13. $2\sqrt{11}+\sqrt{3}$. 14. $\sqrt{\frac{7}{2}}-\sqrt{\frac{1}{2}}$. 15. $\sqrt{\frac{7}{2}}-\sqrt{\frac{5}{2}}$. 16. $\sqrt[4]{2}(\sqrt{2}-1)$.
17. $\sqrt[4]{2}(\sqrt{3}-1)$. 18. $\sqrt[4]{3}(\sqrt{2}+1)$. 19. $\sqrt[4]{5}(\sqrt{3}+\sqrt{2})$.
20. $\sqrt{2}$. 21. b. 22. $x+\sqrt{a^2-x^2}$.
23. $\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}$. 24. $\sqrt{a+\frac{1}{2}x}+\sqrt{\frac{1}{2}x}$. 25. $\sqrt{x+2}+\sqrt{x-3}$.
26. $\sqrt{x+y}+\sqrt{z}$.

প্রশ্নমালা 7

1. $\sqrt{6}+1$. 2. $2-\sqrt{3}$. 3. $\sqrt{5}+\sqrt{2}$.
4. $3\sqrt{2}-\sqrt{5}$. 5. $\sqrt{3}(4+\sqrt{2})$.

প্রশ্নমালা 8

1. $\sqrt{5}+\sqrt{2}+1$. 2. $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$. 3. $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}$.
4. $2-\sqrt{5}+2\sqrt{3}$. 5. (i) ·44721. (ti) $2(\sqrt{10}-\sqrt{5}+2\sqrt{2}-3)$.
6. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. 7. $a+b$. 8. $\sqrt{3}+1$. 9. $\frac{3\sqrt{5}}{4}$.
13. 125. 14. 1692. 17. $\sqrt[5]{a^3b}$. 18. $2\sqrt{2}$.
19. $\sqrt{2}$. 20. $-2\sqrt{2}$.

প্রশ্নমালা 9

1. 9. 2. $\frac{3}{4}$. 3. $\frac{9}{20}$. 4. 8. 5. 2.
6. $\frac{a}{4}$. 7. $\frac{(a-b)^2}{2b}$. 8. 5. 9. 5. 10. 6.
11. 81. 12. $\frac{81}{a}$. 13. $\frac{1}{a}\left(b+\frac{c^2}{c-1}\right)^2$. 14. 5.
15. 0, $\frac{b^2-4a^2}{4a}$. 16. $x=0$ বা 8.

প্রশ্নমালা 10

2. $2\frac{1}{2}$. 3. 1. 4. $27x^2 = 4y^3$.
5. $y = \pm 6$. 8. $12x^2 - 25xy + 12y^2 = 0$.
10. (i) $y = 2x + \frac{2}{x}$. (ii) $y = 2x + \frac{4}{x^2}$. 11. $y = 3 + 2x - x^2$.
12. $b^2x^2 + a^4y^2 = a^2b^2$. 15. (i) $x = \frac{22}{15}z + \frac{2}{15z}$. 16. 26 টাকা 25 প.।
17. 45 সেমি.। 19. $3\frac{3}{8}$ দিন। 20. $\sqrt[3]{r^3 + r'^3}$.
23. 45 বর্গ-মিটার। 25. $d = 4$. 26. $346\frac{1}{2}$ বর্গ-মিটার।
27. 8 : 21. 28. 950 ঘন-সেমি.। 29. $1\frac{5}{9}$ মি.।
30. 10 সেমি.। 31. 1·242 সেমি. (প্রায়)। 32. $\frac{3 - \sqrt[3]{26}}{2}$ সেমি.।
33. 1610 ফুট ; 305·9 ফুট। 34. $224\frac{1}{2}$ দিন (প্রায়)।
35. 9 : 4. 36. হীরকের মূল্য $= £\,\frac{mn^2c}{a^2(m+1)}$, রুবির মূল্য $= £\left(\frac{n}{b}\right)^3 \cdot \frac{c}{m+1}$.
37. ব্যয় সর্বাপেক্ষা কম হইবে যখন গাড়ীর গতিবেগ ঘণ্টায় 12 কিলোমিটার এবং 100 কিমি. যাইতে খরচ 9 পা. 7 শি. 6 পে.।

প্রশ্নমালা 11

1. (i) 16, 40, $2n - 6$. (ii) 15, 39, $2n - 7$. (iii) $-\frac{29}{3}, -\frac{101}{3}, \frac{37}{3} - 2n$.
(iv) $-\frac{19}{7}, -\frac{67}{7}, \frac{25 - 4n}{7}$. (v) 47, 119, $6n - 19$.
2. 29 তম, 46 তম, $(3n - 10)$ তম। 3. 6. 4. 98.
5. $-48, -44, -40$; 20 তম $= 28$. 6. 13, -38. 7. 2, 3.
8. $\frac{d(p-r) - c(q-r)}{p-q}$.

প্রশ্নমালা 12

1. 325. 2. 900. 3. 504. 4. 88. 5. $-\frac{15}{2}$.
6. $1\frac{1}{7}$. 8. $52\frac{1}{2}$. 9. 0. 10. 25452. 11. $\frac{1}{2}(n-1)$.
12. $\frac{n}{(a+b)}\left\{na - \frac{n+1}{2}b\right\}$. 13. 720. 14. n.
15. $n(a+b)^2 - n(n-1)ab$. 16. 899. 17. 704.
18. $\frac{n}{2}\{(x - 2y)n + x\}$. 19. 4080. 20. $\frac{21n - 5n^2}{2}$.

প্রশ্নমালা 13

1. 3. **2.** 9. **3.** 7. **4.** 13 বা 17. **5.** পদসংখ্যা—12 বা 10; শেষপদ 3 বা −1. **6.** 18 বা 19; যেহেতু 19 তম-পদটি 0.
7. n^2. **8.** 2401. **10.** 16549. **11.** $1, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}\cdots$; 1470.
12. $1, 3, 5, 7, \ldots; n^2$. **13.** 2. **14.** 10 অথবা 4.
19. 50·5 কিলোমিটার।

প্রশ্নমালা 14

1. (i) $6\frac{1}{2}$. (ii) 8. (iii) m. (iv) a^2+x^2. **2.** (i) $9\frac{1}{3}, 10\frac{2}{3}$. (ii) $\frac{2}{3}, 7\frac{1}{3}$.
3. 207, 297, 387. **4.** −2, −6, −10, −14.
5. $1, -1\frac{1}{2}, -4, -6\frac{1}{2}\cdots -39$. **6.** 14.

প্রশ্নমালা 15

1. $\frac{n}{2}(6n^2+3n-1)$. **2.** $\frac{n(n+1)(n+2)(3n+5)}{12}$. **3.** $\frac{n}{3}\{4n^2+6n-1\}$.
4. $n^2(2n^2-1)$. **5.** $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$. **6.** $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
7. $\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$. **8.** $\frac{n}{12}(9n^3+46n^2+51n-34)$.
9. $-\frac{n}{2}$ (n যুগ্ম হইলে), $\frac{n+1}{2}$ (n অযুগ্ম হইলে).
10. $\pm\frac{n(n+1)}{2}$ (n যুগ্ম হইলে −, অযুগ্ম হইলে +).
11. $\frac{n(n+1)(4n-1)}{6}$. **12.** $\frac{n(n+1)(n^2+n+2)}{8}$.

প্রশ্নমালা 16

1. $\frac{(2n+1)(ma-nb)}{a-b}$. **2.** 9, 13, 17, 21, 25. **3.** 13, 6. **4.** 70.
5. $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$. **6.** $\frac{n}{6}(2n^2+3n+7)$. **7.** $\frac{n}{6}(2n^2+9n+1)$.
8. $\frac{n}{2}(n^2+6n-1)$. **9.** (i) $\frac{n}{3(2n+3)}$. (ii) $\frac{n}{a(a+nb)}$.
10. 8, 12, 16, 20. **11.** 3, 5, 7. **12.** 1, 3, 5, 7. **13.** 3, 5, 7, 9, 11, 13.
16. $\frac{n}{2}(4n^2+17n+21)$. **18.** 16. **21.** $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$.
22. $\frac{1}{3}(n-1)n(2n-1)$ মিটার। **23.** 16. **24.** 5. **25.** 10 মাস।

প্রশ্নমালা 17

1. 8748. 2. $\frac{4}{9}$. 3. 65536. 4. -243.

5. $\frac{8}{27}$. $\pm\frac{2^{n-3}}{3^{n-3}}$ (n যুগ্ম হইলে +, অযুগ্ম হইলে −). 6. $-\frac{448}{243}$.

7. $\frac{1}{25}$, $\frac{1}{125}$, 8. $3^{\frac{3}{2}-n}$. 9. $\sqrt[9]{\frac{1}{2}}$. 11. $\frac{1}{6561}$. 12. 2, 2.

13. 16, 24, 36, 54, 81. 14. 9.

15. (i) 6, 12, 24, 48,.... (ii) 27, 9, 3, 1, $\frac{1}{3}$,........,
অথবা, $-27, 9, -3, 1, -\frac{1}{3}$,........ (iii) $\frac{81}{2}$, -27, 18, -12,....

16. $\left(\frac{c^{n-q}}{d^{n-p}}\right)^{\frac{1}{p-q}}$. 18. p-তম পদ $=\sqrt{mn}$, q-তম পদ $=m\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{p}{2q}}$.

প্রশ্নমালা 18

1. 265720. 2. $60\frac{20}{27}$. 3. -682. 4. $\frac{181}{576}$.

5. $\frac{2}{3}\{1-2^{2r}\}$. 6. $\frac{1}{14}\left\{\frac{5^n\pm 2^n}{5^{n-2}}\right\}$ (n যুগ্ম হইলে −, অযুগ্ম হইলে +).

7. $2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$. 8. $\frac{a(a^n-1)}{a-1}-\frac{x(x^n-1)}{(x-1)}$. 9. 8. 11. 40.

প্রশ্নমালা 19

1. (i) 12; (ii) 2; (iii) 1; (iv) ab^2c^2. 2. 6, 12.

3. $\frac{3}{2}$, 1, $\frac{2}{3}$. 4. -1, $\frac{3}{2}$, $-\frac{9}{4}$, $\frac{27}{8}$. 5. $\frac{16}{3}$, 8, 12, 18, 27. 6. 3, 27.

প্রশ্নমালা 20

1. $\frac{a(1-a^n)}{(1-a)^2}-\frac{na^{n+1}}{1-a}$. 2. $4-\frac{n+2}{2^{n-1}}$. 3. $2^{n-1}(2n-1)$; $3+(2n-3).2^n$.

4. $\frac{5^{n+1}-5-4^n}{16.5^{n-1}}$. 5. $\frac{40}{81}(10^n-1)-\frac{4n}{9}$. 6. $n-\frac{1}{9}\left(1-\frac{1}{10^n}\right)$.

7. $2^{n+1}-(n+2)$. 8. $2(2^n-1-4n)$. 9. $\frac{1}{3}(4^n-1+15n)$.

10. $2n-2+\frac{1}{2^n-1}$. 14. 4, 10, 25; অথবা, 25, 10, 4.

16. 2, 5, 8; অথবা, 26, 5, -16. 17. 4, 8, 16.

18. $\frac{4}{5}$, 4, 20. 22. $n.2^{n+2}-2^{n+1}+2$.

প্রশ্নমালা 21

1. i. 2. -1. 3. i. 4. 1. 5. -1.

6. $-i$. 7. i. 8. $-i$. 9. $-i$. 10. -1.

11. i. 12. i. 13. i. 14. $-i$. 15. i.
16. 0. 17. -2. 18. 0. 19. $19i$. 20. $9i$.
21. $\sqrt{-2}$. 22. 0. 23. $5\sqrt{-5}$.

প্রশ্নমালা 22

1. $99+23\sqrt{-3}$. 2. $-6\sqrt{15}$. 3. $63+11\sqrt{21}$.
4. $\frac{28}{13}+\frac{29}{13}i$. 5. $\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$. 6. x^2-x+1.
8. $2+\sqrt{-3}$. 9. $5-3\sqrt{-2}$. 10. $2+\sqrt{-5}$. 11. $-1+2i$.
12. $1+i$. 13. বর্গমূল-এর স্থানে বর্গ পড়িতে হইবে। 100. 14. 6.
15. $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{x^2+x+1}+i\sqrt{x^2-x+1})$. 16. (i) -1, (ii) $1, -1, i, -i$.
19. -27. 25. a^2-এর পরিবর্তে a^3 পড়িতে হইবে।
34. (1) 34. (2) $25\sqrt{2}$. (3) $\sqrt{37}/\sqrt{5}$. (4) $\sqrt{2}/\sqrt{5}$.

প্রশ্নমালা 23

1. (1) বাস্তব, অমূলদ এবং অসমান। (2) কাল্পনিক এবং অসমান।
(3) বাস্তব, মূলদ এবং অসমান। (4) বাস্তব ও সমান।
(5) বাস্তব, অমূলদ এবং অসমান। (6) কাল্পনিক ও অসমান।
(7) বাস্তব, মূলদ এবং অসমান। (8) বাস্তব, অমূলদ এবং অসমান।

3. ± 12. 4. 8. 5. 0, 3.

প্রশ্নমালা 24

1. (i) $\frac{b^4-4ab^2c+2a^2c^2}{a^4}$; (ii) $\frac{(2abc-b^3)\sqrt{b^2-4ac}}{a^4}$;

(iii) $\frac{-b(b^4-5ab^2c+5a^2c^2)}{a^5}$;

(iv) $\frac{(b^4-3ab^2c+a^2c^2)\sqrt{b^2-4ac}}{a^5}$;

(v) $\frac{(b^2-2ac)(b^4-4ab^2c+a^2c^2)}{a^6}$;

(vi) $\frac{b(ac-b^2)(b^2-3ac)\sqrt{b^2-4ac}}{a^6}$; (vii) $-\frac{bc}{a^2}$;

(viii) $\frac{c(b^2-2ac)}{a^3}$; (ix) $\frac{bc(3ac-b^2)}{a^4}$;

(x) $\frac{c(b^4-4ab^2c+2a^2c^2)}{a^5}$; (xi) $\frac{bc^4}{a^7}(3ac-b^2)$;

(xii) $\frac{b^4-4ab^2c+2a^2c^2}{a^3c}$; (xiii) $\frac{bc-2ac}{a^4c^2}\cdot(b^4-4ab^2c+a^2c^2)$;

(xiv) $\frac{(b^2-2ac)(b^4-4ab^2c+a^2c^2)}{a^3c^3}$; (xv) $\frac{-3b}{ac+2b^2}$;

(xvi) $\frac{b^4-4ab^2c+2a^2c^2}{a^2c^2}$; (xvii) $\frac{b(3ac-b^2)}{a^2c}$;

(xviii) $\frac{(2abc-b^3)\sqrt{b^2-4ac}}{ac^3}$;

(xix) $\frac{b(ac-b^2)(b^2-3ac)\sqrt{b^2-4ac}}{a^2c^4}$;

(xx) $\left(\frac{c}{a}\right)^q\left\{\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^{p+1-q}+\left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^{p+1-q}\right\}$.

2. $-\frac{2}{3}$. **3.** (i) p^2-q; (ii) $-p^3+3pq+q$;

(iii) $p^4-4p^2q+3q^2$; (iv) $\frac{-p(p^2-3q)}{q^3}$;

(v) $1-p+p^2-q-pq+q^2$; (vi) $\frac{p^3-3pq}{q}$;

(vii) $-p(p^2-4q)(p^2-q)/q$.

4. (*a*) (i) $\frac{-p^3+3pq}{q^3}$; (ii) $\frac{p^4-4p^2q+2q^2}{q^2}$; (iii) $\frac{p^4-4p^2q+2q^2}{q^4}$.

(*b*) 2.

6. $\frac{b}{c}$. **9.** (i) $2(p^2-2q)+2(p'^2-2q')-2pp'$. (ii) $2q+2q'-pp'$.

10. (*b*) $2p^2=9q$. **14.** (ii) $\frac{(p+q)^2}{pq}=\frac{b^2}{ac}$. **16.** $k=0$.

18. বীজদ্বয় $\frac{\gamma+\delta\pm\sqrt{(\gamma+\delta)^2-4\alpha\beta}}{2}$.

প্রশ্নমালা 25

1. (i) $x^2-12x+35=0$. (ii) $x^2-7x-18=0$.
(iii) $x^2+8x+15=0$. (iv) $x^2-4x-77=0$.

2. (i) $x^2-7x+12=0$; $p=3, q=4$. (ii) $x^2-2x-15=0$; $p=5, q=-3$. (iii) $x^2+6x+8=0$; $p=-4, q=-2$.
(iv) $x^2-6x+2=0$; $p=3-\sqrt{7}, q=3+\sqrt{7}$.
(v) x^2-5x+6; $p=3, q=2$.

3. (i) $8x^2-65x+8=0$.
(ii) $16x^2-128x+255=0$. (iii) $4x^2+5x+1=0$.
(iv) $4x^2+4x+1=0$. (v) $4x^2-12x+5=0$.

4. (i) $qx^2-(p^2-2q)x+q=0$.

(ii) $x^2-2(p^2-2q)x+p^2\times(p^2-4q)=0.$
(iii) $x^2-p^2x+p^2q=0.$ **5.** $x^2-50x+49=0.$

6. (i) $x^2+px+9q-2p^2=0.$ (ii) $qx^2-(p+q^2)x+pq=0.$
(iii) $x^2-(m+n)px+mn(p^2-2q)+q(m^2+n^2)=0.$
(iv) $qx^2-(p^2-2q)(q+1)x+p^2+q^3-q=0.$
(v) $x^2-px+q=0$ [(3)-এর পরিবর্তে v পড়িতে হইবে]।

7. $qx^2-2px+4=0.$ **8.** (i) $a^2x^2-(b^2-2ac)x+c^2=0.$
(ii) $a^2x^2+a(b+2c)x+c(a+b+c)=0.$ (iii) $(x+a)^2=0.$
(iv) $a^2x^2+ab(1+m)x+(b^2-2ac)m+ac(1+m^2)=0.$
(v) $acx^2+b(a+c)x+(c+a)^2=0.$

11. $6x^2-5x+1=0.$ **12.** $x^2-x+1=0.$ **13.** $x^2+x+1=0.$

14. নির্ণেয় সমীকরণ ও প্রদত্ত সমীকরণ একই।

16. $\frac{1}{\alpha^2}, \frac{1}{\beta^2}.$ **19.** $x^2-6x+4=0.$

20. (i) 1. (ii) 5. (iii) 12. (iv) 3.

21. $4x^2+32x+63=0.$ **22.** $cx^2-2bx+a=0.$

প্রশ্নমালা 26

1. (a) $\frac{7}{4}, -\frac{11}{8}.$ **4.** $(bc'+b'c)(ab'+a'b)+(ca'-c'a)^2=0.$

5. $(ba'-b'c)(ab'-bc')=(cc'-aa')^2.$ **6.** $(pq'-p'q)(p'-p)=(q-q')^2.$

7. $a=0$ বা 24. **10.** $a+b=0$ যখন $m^2+1\neq0.$

14. $m=\pm10.$ **15.** $(4x+2y-3)(2x-3y+6).$

প্রশ্নমালা 27

1. (a) ধনাত্মক ; (b) ঋণাত্মক ; (c) ধনাত্মক ; (d) ধনাত্মক ;
(e) ধনাত্মক। **3.** x-এর এরূপ কোন মান নাই।

5. x-এর মান 3 এবং 5-এর মধ্যবর্তী। **7.** $-\frac{2}{3}<a<\frac{2}{3}.$

9. (a) $-\frac{1}{16}, x=\frac{9}{8}.$ (b) $\frac{23}{12}, x=\frac{5}{6}.$ (c) $\frac{7}{8}, x=\frac{13}{4}.$ **11.** (a) $8, x=3.$
(b) $7, x=\frac{1}{2}.$ (c) $6, x=\frac{1}{2}.$ **12.** $\frac{25}{12}.$ **15.** $\frac{1}{5}$ এবং 5-এর মধ্যবর্তী।

17. চরম মান = 4 এবং অবম মান = − 5. **22.** চরম ও অবম মান যথাক্রমে $\frac{5}{4}$ এবং 1.

প্রশ্নমালা 28

1. 151200 ; 19958400 ; 720 ; 40320 ; 720. **2.** 30.

3. 720. **4.** 40319. **5.** 56. **6.** 840.

7. 462. **8.** (a) 6. (b) 8. (c) 9.
(d) 4. (e) $m=8, n=2.$ **9.** 11880.

10. (i) 2016 ; (ii) 3024. **11.** 720 ; 120 ; 24 ; 600 ; 96.
12. $n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-m+1)$. **13.** 80640.
14. $2(n-1)(n-2)\cdots\cdots 3.2.1$. **15.** 576.
16. 4320. **17.** 1440. **18.** 12.
19. 90720. **20.** 4320. **21.** 864.
22. 34560. **23.** 126. **24.** (*a*) 2903040.
25. 399168000. **26.** 332640.
27. $\frac{\lfloor 16 \times \lfloor 15}{\lfloor 4}$. **28.** 6. **29.** (*a*) 210 ;
(*b*) 240. **30.** 240. **31.** 125.
32. 36. **33.** 154.

প্রশ্নমালা 29

1. 19600 ; 17550 ; 341149446. **2.** $(n-1)$.
4. $r=3$; $n=10$. **5.** $n=15, r=10$.
8. 455. **9.** 210, 84. **10.** 36.
11. 220. **12.** 190, 171. **13.** 120.
14. (i) $\frac{n(n-3)}{2}$. (ii) $n(n-1)(n-2)/6$. **15.** (i) $\frac{1}{2}.\{n(n-1)$
$-m(m-1)+2\}$. (ii) $\frac{1}{6}\{n(n-1)(n-2)-m(m-1)(m-2)\}$.
16. 1330. **17.** 25. **18.** 387600.
19. 59850. **20.** 441. **21.** (i) 792 ;
(ii) 5940. **22.** (i) 196 ; (ii) 252. **23.** 344.
24. 990. **25.** 30030 ; 20020. **26.** 68.
27. 81600. **28.** 224.
30. 40320. **31.** 8436. **32.** 144000.

প্রশ্নমালা 30

1. 4 বা 5 ; 21 বা 35. **2.** 10 ; 92378. **3.** 70 ; 35.

প্রশ্নমালা 31

1. 60. **2.** 5040. **3.** 7560 ; 60.
4. $\lfloor 39/\lfloor 5.(\lfloor 4)^2(\lfloor 6)^3$. **5.** (i) 60 ; (ii) 36. **6.** 4540535999 ;
605404800 ; 9979200. **7.** 2519. **8.** 21599.
9. 1960. **10.** 27720 ; 280. **11.** 50.
12. 8400. **13.** 7 বা 8. **14.** 343. **15.** 243.
16. 16384. **17.** 6144. **18.** 12902400.
19. 729. **20.** m^n.

প্রশ্নমালা 32

1. 362880. 2. 60. 3. 2880. 4. $(4n^2-6n+4)(2n-2)\,!$.

প্রশ্নমালা 33

1. 63. 2. 127. 3. 31. 4. 279. 5. 190.
8. 254. 9. 352716.

প্রশ্নমালা 34

2. $n=b(c-a)/(b^2-ac),\ r=a(c-b)/(b^2-ac)$. 3. n^m.
4. 13305600. 5. 4309200. 6. 256. 7. 10648.
8. 498015. 9. $\frac{(na)\,!}{(n\,!)^n}$ পরিবর্তে $\frac{(na)\,!}{(a\,!)^n}$ পড়িতে হইবে।
10. 59. 13. 60. 14. $\frac{1}{2}\cdot\frac{(m+n)!}{mn}$. 15. 42.
16. 2190. 17. 160. 18. 150, 2510. 19. 315.
20. 159. 21. (i) 60 ; (ii) 3255. 22. 76076.

প্রশ্নমালা 32 [পৃঃ 210—212]

1. (a) (i) $a^6+12a^5b+60a^4b^2+160a^3b^3+240a^2b^4+192ab^5+64b^6$.
(ii) $a^6-18a^5x+135a^4x^2-540a^3x^3+1215a^2x^4-1458ax^5+729x^6$. (iii) $a^6+6a^4+15a^2+20+\frac{15}{a^2}+\frac{6}{a^4}+\frac{1}{a^6}$.
(iv) $\frac{64}{729}x^6-\frac{32}{27}x^4+\frac{20}{3}x^2-20+\frac{135}{4x^2}-\frac{243}{8x^4}+\frac{729}{64x^6}$.
(b) $2x^5(1+10y+5y^2)$. 2. (i) $64a^6-96a^4+36a^2-2$.
(ii) -238. 3. $-220x^2y^9$. 4. $-120x^8y^{12}$.
5. $\frac{-120x^4}{a^4}$. 6. -252. 7. $84a^3b^6$.
8. $210c^{12}$. 10. ${}^nC_m y^{n-m}$, যখন $m \not> n$.
11. $(-1)^{n-r}\frac{\lfloor 2n+1}{\lfloor n-r\,\lfloor n+r+1}$. 12. $\frac{\lfloor 3n}{\lfloor n\lfloor 2n}\cdot\frac{1}{x^n}$.
14. ${}^{4n+1}C_{n+1}(-1)^{n+1}$. 15. 252. 16. (i) 25.
(ii) $\frac{\lfloor m+n}{\lfloor m\lfloor n}$. 17. 4433. 18. 150.
19. (i) (a) $70a^4b^4$. (b) $126x, \frac{-126}{x}$. (c) $(-1)^n\frac{\lfloor 2n}{\lfloor n\,\lfloor n}$. (ii) 101.

20. $\frac{a^{2n+1}}{b^{2n+1}} + {}^{2n+1}C_1 \cdot \frac{a^{2n-1}}{b^{2n-1}} + {}^{2n+1}C_2 \cdot \frac{a^{2n-3}}{b^{2n-3}} + \cdots$

$\cdots + {}^{2n+1}C_r \cdot \frac{a^{2n-2r+1}}{b^{2n-2r+1}} + \cdots + \frac{b^{2n+1}}{a^{2n+1}}$; সাধারণ পদ $= {}^{2n+1}C_r \cdot \frac{a^{2n-2r+1}}{b^{2n-2r+1}}$;

মধ্যপদদ্বয় $(n+1)$-তম এবং $(n+2)$-তম পদ যথাক্রমে ${}^{2n+1}C_n \cdot \frac{a}{b}$ এবং ${}^{2n+1}C_{n+1} \cdot \frac{b}{a}$. 21. $r=1$. 22. $r=9$. 23. $r=n$.

25. $1 - nx + \frac{n(n+1)}{2}x^2 - \frac{n(n-1)(n+4)}{6}x^3$.

প্রশ্নমালা 33 [পৃঃ 216]

1. (i) 3432. (ii) 489888. 2. $3^9 . 2^5 . \lfloor 14 / \lfloor 5 . \lfloor 9$.
3. (i) 7-তম। (ii) 5-তম এবং 6-তম। 4. (i) $\frac{15}{4}$. (ii) 56229888. (iii) $\frac{7}{144}$.

প্রশ্নমালা 34 [পৃঃ 222—225]

1. $2^{20} - 1$. 2. (a) 2^{25}. 3. 11.
6. $a=2, x=3, n=5$. 7. $x=1, a=2, n=7$.
26. (i) 96059601. (ii) ·996.

প্রশ্নমালা 35

1. 1. 2. $\frac{2}{3}$. 3. $3\frac{1}{8}$. 4. $\frac{3}{5}$. 5. $10\frac{1}{8}$.
6. $\frac{13}{24}$. 7. $\frac{11}{16}$. 8. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. 9. $\frac{1}{2}(4 + 3\sqrt{2})$.
10. $\frac{1}{11}$. 11. (i) $\frac{1}{36}$; (ii) $1\frac{8}{55}$; (iii) $\frac{358}{1665}$; (iv) $\frac{1}{7}$.
12. $\frac{1+x}{(1-x)^2}$. 13. $\frac{2x}{(1-2x)^2}$. 14. $\frac{(1+6x)3x}{(1-3x)^2}$.
15. $\frac{1-x}{(1+x)^2}$. 16. 1. 17. $\frac{1}{(1-r)(1-ar)}$.

প্রশ্নমালা 36

1. (a) $1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2.4}x^2 + \frac{1.3}{2.4.6.}x^3 - \cdots$ (b) $1 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{3^2}x^2 - \frac{5}{3^4}x^3 - \cdots$
2. (a) $1 + 6x + 24x^2 + 80x^3 + 240x^4 + \cdots\cdots$
(b) $1 + \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} + \frac{5x^3}{16} + \frac{35x^4}{128} + \cdots\cdots$
(c) $1 + x + 2x^2 + \frac{14}{3}x^3 + \frac{35}{3}x^4 + \cdots$ 3. $1 + x + \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{54}x^3 + \cdots$
4. $\frac{1}{27}(1 + x + \frac{5}{6}x^2 + \frac{35}{54}x^3 + \cdots)$.

5. (a) $\frac{1}{3}a^2 + \frac{2}{9}a^4x + \frac{4}{27}a^6x^2 + \frac{8}{81}a^8x^3 + \frac{16}{243}a^{10}x^4 + \cdots$

(b) $1 - \frac{1}{6}x^{\frac{1}{3}} + \frac{7}{72}x^{\frac{2}{3}} - \frac{91}{1296}x + \frac{1729}{31104}x^{\frac{4}{3}} - \cdots$

6. $1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} + \frac{3}{8}x^4 - \frac{3}{8}x^5 + \frac{5}{16}x^6 - \cdots$

7. (a) $\frac{3.7.11.15.19.23.27.5^7}{4^7.\lfloor 7}$. (b) 2^r.

8. (a) $1 - 2x - 2x^2 - 4x^3 - \cdots$ (b) $1 + \frac{1}{4}x + \frac{3}{32}x^2 + \frac{5}{128}x^3 + \cdots$

9. $\frac{1}{2^{\frac{9}{2}}}.\frac{77}{256}x^{10}$. 10. $-\frac{(p-1)(2p-1)(3p-1)\cdots(\overline{r-1}.p-1)}{\lfloor r}x^r$.

11. $\frac{1.5.9\cdots(4r-3)}{4^r\lfloor r}x^r$. 12. $\frac{7.9.11\ldots.(2r+5)}{\lfloor r}x^r$.

13. $(-1)^{r-1}.r.\frac{x^{2r-2}}{a^{2r+2}}$; $\frac{1.4.7.10\ldots.(3r-5)}{3^{r-1}.\lfloor r-1}x^{2r-1}$.

14. $-\frac{5}{1024}a^{-\frac{35}{2}}b^{18}$. 15. $-1848x^{13}$.

16. $3\left\{1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{x^2}{a^3} + \frac{2}{9}\cdot\frac{x^4}{a^6} + \frac{14}{81}\cdot\frac{x^6}{a^9} + \cdots\right\}$; $\frac{1.4.7.\cdots(3r-2)}{3^{r-1}.\lfloor r}\cdot\frac{x^{2r}}{a^{3r}}$.

17. (a) $\frac{(n+1)(2n+1)(3n+1)\cdots(\overline{r-2}.n+1)}{n^{r-1}\lfloor r-1}\cdot\frac{x^{r-1}}{a^{\frac{1}{n}+r-1}}$.

(b) $\frac{(n+1)(2n+1)(3n+1)\cdots\{(r-1)n+1\}}{\lfloor r}x^r$.

18. $\frac{2.5.8.11\ldots.(3r-1)}{\lfloor r}.\left(\frac{2x}{3}\right)^r$. 22. চতুর্থ।

প্রশ্নমালা 37

1. তৃতীয়। 2. 13-তম। 3. দ্বিতীয়। 4. চতুর্থ এবং পঞ্চম।
5. তৃতীয়। 6. (i) ষষ্ঠ। (ii) নবম।
7. প্রথম ও তৃতীয়।

প্রশ্নমালা 38

1. 1·99776. 2. 1·0099. 3. (i) 1·952. (ii) 9·997.
(iii) ·990. 4. 3·14138. 5. 5·01329. 6. 9·99333.
7. $1 - \frac{41}{24}x$. 8. $1 - \frac{989}{192}x$.

প্রশ্নমালা 39

1. -1. 2. 0. 3. 25. 4. $\frac{1}{6}(r+1)(r+2)(r+3)$.
5. (i) 121 ; (ii) $-\frac{1}{4}\left(3 + \frac{5}{3^8}\right)$. 6. 2.

7. (i) 5 ; (ii) $(-1)^n$; (iii) $(-1)^r \cdot \frac{1}{2}(r+1)(r+2)$.

9. (i) $\frac{1}{2}y - \frac{3}{2^2}\cdot\frac{y^2}{\lfloor\underline{2}} + \frac{15}{2^3}\cdot\frac{y^3}{\lfloor\underline{3}} - \cdots$. **10.** $\sqrt[3]{4}$. **11.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

15. $(\frac{9}{4})^{\frac{1}{3}}$. **16.** $\frac{19}{8}$. **17.** $4(2)^{\frac{1}{3}} - 2$. **18.** $\frac{2}{\sqrt{5}}$.

19. $\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}$. **20.** $3\sqrt{3}$. **21.** $\sqrt[4]{64}$.

31. (a) $\frac{(-1)^n}{2}(9n^2+3n+2)$. (b) $4^n - 3^n$. **33.** $4n$.

34. $(n+1)(n+2)$. **35.** -1. **38.** (a) $\sqrt[5]{6}$. (b) $\frac{3}{\sqrt{7}}$.

42. x^{2r}-এর সহগ $= \frac{1.3.5.\cdots(2r-1)}{2^r a^{2r}\lfloor\underline{r}}$;

x^{2r+1}-এর সহগ $= \frac{1.3.5.\cdots(2r-1)}{2^r a^{2r+1}\lfloor\underline{r}}$.

প্রশ্নমালা 40

1. 6. **2.** 6. **3.** 9. **4.** -4. **5.** $\frac{5}{3}\log m + \frac{3}{8}\log n$.

6. $\frac{1}{4}(17\log a - 19\log b)$. **7.** $\frac{41\log 3 + \log 2}{12}$.

8. $\frac{4\log c - 3\log b}{\log a + 2\log b + \log c}$. **9.** $\frac{3\log 3 + 4\log 5 - 3\log 2}{\log 2 + \log 5}$.

11. $\bar{1}\cdot67779433$. **12.** 4·226.

প্রশ্নমালা 41

1. 5 ; 3 ; -6 ; 0 ; -1. **2.** ·7283375 ; $\bar{2}\cdot7283375$; $\bar{1}\cdot7283375$; 8·7283375. **3.** 15.

প্রশ্নমালা 42

1. 15. **2.** $\bar{3}\cdot8515933$. **3.** $\bar{2}\cdot88869495$. **4.** ·005942.

5. 1·442, 19·91, 1·470, ·1544. **6.** ·6933. **7.** 12440.

8. ·5555, 62·34, 11140, 845·7. **9.** 5·838, 1·395.

10. 15·8104. **11.** 23·15, 11·03. **12.** ·3912, ·2446, ·7909, ·8553.

13. 20·43. **14.** 11, 18, 22. **15.** ·8964 সেমি.। **16.** 19.

18. (i) 3 ; (ii) 12 ; (iii) 6. **19.** 3. **21.** 1.

22. যেহেতু $1+2+3 = 1\times2\times3$. **24.** $m = \frac{n}{n-1}$. **34.** 3.

37. (i) $\frac{a^2}{100}$. (ii) 1·206. (iii) ·65 (প্রায়)। (iv) 1, $\log_a b$.

(v) $\log a / \log\left(\frac{b}{a}\right)$. (vi) 1·77. (vii) ·63 (প্রায়)। (viii) 1·59 (প্রায়)।

38. (i) $\left.\begin{array}{l}x=0\\y=0\end{array}\right\}$ বা $\left.\begin{array}{l}x=4\\y=2\end{array}\right\}$.

(ii) প্রদত্ত লগারিদ্‌মগুলি একই প্রকারের ধরিয়া লইলে, $x=10^{\frac{1}{5}(a+3b)}$ এবং $y=10^{\frac{1}{5}(a-2b)}$.

(iii) $\left.\begin{array}{l}x=-3k\log b\\y=\ \ 2k\log a\end{array}\right\}$ যখন $k=\dfrac{\log c}{2\log a.\log(ab)-3\log b.\log ab^2}$.

(iv) $x=\dfrac{\log 5}{\log \dot{}3}$, $y=\dfrac{\log 5.\log 1\dot{}5}{\log \dot{}3.\log 6}$.

(v) $x=\dfrac{abm}{a+bm}$, $y=\dfrac{ab}{a+bm}$.

(vi) $x=0, y=0$. (vii) $x=y=z=\dot{}64$ (প্রায়) ।

(viii) $x=k[(\log a)^2\log m+(\log b)^2\log n+(\log c)^2\log p$
$-\log b\log c\log m-\log c\log a\log n-\log a\log b\log p]$,
$y=k[(\log a)^2\log p+(\log b)^2\log m+(\log c)^2\log n$
$-\log b\log c\log p-\log c\log a\log m-\log a\log b\log n]$,
$z=k[(\log a)^2\log n+(\log b)^2\log p+(\log c)^2\log m$
$-\log b\log c\log n-\log c\log a\log p-\log a\log b\log m]$,

যখন $k=\dfrac{1}{\log(abc)\{(\log a)^2+(\log b)^2+(\log c)^2-\log b\log c-\log c\log a-\log a\log b\}}$.

প্রশ্নমালা 43

1. 5624 টা. । 2. 21673·31 টা. । 3. 139 টা. ।
4. 17 ব. 6 মা. 6 দি. । 5. 14 বৎ. 2·5 মাস (প্রায়) ।
6. 4%. 7. 5%. 8. 10650. 9. $2\frac{1}{2}$%.

প্রশ্নমালা 44

1. 766 টা. 32 প. । 2. 1335 টা. 75 প. । 3. 1979 টা. 27 প. ।
4. 1741 টা 31 প. । 5. $28\frac{4}{7}$ বৎসর । 6. 4%.
7. 6400 টাকা । 8. 6% 9. 9 টাকা 78 পয়সা ক্ষতি হয় ।
11. ['কস্তিতে'র পরিবর্তে 'কিস্তিতে' পড়িতে হইবে ।] .

প্রশ্নমালা 45

21. (a) $e-2+e^{-1}$. (b) $\frac{1}{2}e$. (c) $e^{27}-e^8$. 23. $3e$.
24. $4e$. 25. $2e-\frac{7}{2}$. 26. $2e$. 27. $12e-5$.
28. $11e$. 29. $\frac{7}{12}$. 30. $2\left[1+\dfrac{(2x)^2}{\lfloor 2}+\dfrac{(2x)^4}{\lfloor 4}+\cdots\right]$.

31. $\dfrac{e}{\lfloor\underline{r}}$. **32.** $\dfrac{(-1)^r}{\lfloor\underline{r}}\{a + a.r - r.(r-1)\}$.

33. (a) $(-1)^n \dfrac{(n-1)^2}{\lfloor\underline{n}}$. (b) $\dfrac{(-1)^n}{\lfloor\underline{n-2}}\left\{\dfrac{a}{n(n-1)} - \dfrac{b}{(n-1)} + c\right\}$.

(c) $\dfrac{(-1)^n}{2^n \lfloor\underline{n}}\{3 + 4n\}$.

35. (a) (i) $1 - \dfrac{x^2}{\lfloor\underline{2}} + \dfrac{x^4}{\lfloor\underline{4}} - \cdots$ (ii) $x - \dfrac{x^3}{\lfloor\underline{3}} + \dfrac{x^5}{\lfloor\underline{5}} - \cdots$

36. (i) $1 - 2x + \dfrac{2^2x^2}{\lfloor\underline{2}} - \dfrac{2^3x^3}{\lfloor\underline{3}} + \cdots$

(ii) $\dfrac{(2^2-2)x^2}{\lfloor\underline{2}} - \dfrac{(2^3-2)x^3}{\lfloor\underline{3}} + \dfrac{(2^4-2)x^4}{\lfloor\underline{4}} - \cdots$

(iii) $\dfrac{1}{4} \times 2\left(\dfrac{(2x)^2}{\lfloor\underline{2}} + \dfrac{(2x)^4}{\lfloor\underline{4}} + \dfrac{(2x)^6}{\lfloor\underline{6}} + \cdots\right)$.

37. $(x^3 + 6x^2 + 7x + 1)e^x$. **39.** (a) $e[1 + x + 2\cdot\dfrac{x^2}{\lfloor\underline{2}} + 5\cdot\dfrac{x^3}{\lfloor\underline{3}} + 15\dfrac{x^4}{\lfloor\underline{4}}$.

প্রশ্নমালা 46

15. $x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{7}x^7 - \frac{3}{8}x^8 + \cdots$.

x^{2n}-এর সহগ $\dfrac{1}{2n}$ যখন n অযুগ্ম সংখ্যা ; $-\dfrac{3}{2n}$ যখন n যুগ্ম সংখ্যা,

x^{2n+1}-এর সহগ $\dfrac{1}{2n+1}$.

18. $2\left(x - \dfrac{2}{3}x^3 + \dfrac{x^5}{5} + \dfrac{x^7}{7} - \dfrac{2}{9}x^9 + \cdots\right)$.

20. $\dfrac{a+b}{x} - \dfrac{a^2+b^2}{2x^2} + \dfrac{a^3+b^3}{3x^3} - \cdots$

21. $\log_e 3 - \log_e 2$. **22.** $-\frac{1}{3}\log_e(1 - x^3)$. **23.** $\log_e \dfrac{4}{3}$.

24. $\log_e 3$. **25.** $\frac{3}{2}\log_e 2$.

26. $(1-x)\log_e(1-x) + x$.

27. $\dfrac{x}{1-x}$ [$\because$ $|x| < 1$] $+ \log_e(1-x)$.

28. $2\log_e 2$. **29.** $3\log_e 2 - 1$. **30.** 28.

ত্রিকোণমিতি

প্রশ্নমালা 1

1. (a) 60°, 240°, 144°. (b) $\frac{\pi}{3}$, $\frac{79}{36}\pi$, $\frac{221}{360}\pi$, $\frac{703}{720}\pi$.

2. $\frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{10}$. 8. 33 মিটার। 9. 132° 15·2′.

10. 25°. 11. 100°. 12. 34° 21·$\dot{8}\dot{1}$′.

13. 81°, 9°. 14. $\frac{2\pi}{9}, \frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{9}$. 15. $\frac{1}{240}$ রেডিয়ান।

16. 30°, 60°, 90°. 17. 2° 51′ 49″.

প্রশ্নমালা 5

1. (i) -1. (ii) $-\frac{1}{2}$. (iii) $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

11. $-\cos 23°$. 12. $\sin 4°$. 13. $-\tan 41°$.
14. $\sin 20°$. 15. $\sin 18°$. 16. $-\cot 7°$.
17. $\text{cosec } 33°$. 18. $-\sec 30°$. 19. $\cot 7°$.
20. $\cot 24°$. 21. 0. 22. $-\frac{4}{\sqrt{3}}$.

23. প্রথম ক্ষেত্রে ঋণাত্মক ; দ্বিতীয় ক্ষেত্রে রাশিমালার মান = 0.

24. ধনাত্মক, ঋণাত্মক। 25. $\frac{7}{24}$. 36. 60°, 300°.

37. 45°, 225°. 38. 30°, 150°. 39. 0°, 180°.

40. 30°, 150°, 210°, 330° (অর্থাৎ, $n \times 180° \pm 30°$).

41. 30°, 150°. 43. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

প্রশ্নমালা 7

2. $\frac{\pi}{4}$. 3. $-$·368 (প্রায়)। 4. $x = 38° 10′$ (প্রায়)।

6. 17° 20′ (প্রায়)। 7. লেখ-অঙ্কনে x-এর মান রেডিয়ানে লইতে হইবে ; লেখগুলি পরস্পরকে মূলবিন্দুতে স্পর্শ করিবে।

প্রশ্নমালা 8

1. (i) $n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6}$. (ii) $2n\pi \pm \frac{\pi}{6}$. (iii) $n\pi + \frac{\pi}{6}$.

(iv) $n\pi - (-1)^n \frac{\pi}{3}$. (v) $2n\pi \pm \frac{3\pi}{4}$. (vi) $n\pi + \frac{2\pi}{3}$.

(vii) $n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{4}$. (viii) $2n\pi\pm\frac{5\pi}{6}$. (ix) $n\pi+\frac{3\pi}{4}$.

2. (i) $2n\pi+\frac{7\pi}{6}$. (ii) $2n\pi-\frac{\pi}{6}$. **3.** $n\pi+(-1)^n\left(\frac{\pi}{2}-A\right)$.

4. $n\pi\pm\frac{\pi}{6}$. **5.** (i) $n\pi\pm\frac{\pi}{4}$. (ii) $n\pi\pm\frac{\pi}{4}$. **6.** $n\pi\pm\frac{\pi}{3}$.

7. $n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{4}$. **8.** $n\pi+\frac{\pi}{4}$ বা $n\pi+\alpha$, যখন $\cot\alpha=\frac{1}{2}$.

9. $n\pi\pm\frac{\pi}{4}$. **10.** (i) $\frac{1}{2}n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{12}$. (ii) $(2n+1)\frac{\pi}{14}$.

11. $n\pi+\frac{5\pi}{12}$ বা $n\pi+\frac{\pi}{12}$. **12.** $(2n+1)\frac{\pi}{6}$ বা $(2n+1)\frac{\pi}{4}$.

13. $(2n+1)\frac{\pi}{6}$ বা $n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}$. **14.** $n\pi$ বা $\frac{n\pi}{4}+(-1)^n\frac{\pi}{24}$.

15. (i) $(2n+1)\frac{\pi}{2}$ বা $n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}$. (ii) $(2n+1)\frac{\pi}{5}$ বা $\frac{2n\pi}{3}$.

16. $\frac{2r\pi}{m+n}$ বা $\frac{2r+1}{m-n}\pi$. **17.** $(2n+1)\frac{\pi}{4}$ বা $2n\pi\pm\frac{2\pi}{3}$.

18. $\frac{n\pi}{3}$ বা $\frac{n\pi}{2}\pm\frac{\pi}{12}$. **19.** (i) $(2n+1)\frac{\pi}{5}$ বা $(2n+1)\frac{\pi}{2}$ বা $(2n+1)\pi$.

(ii) $(2n+1)\frac{\pi}{8}$ বা $(2n+1)\frac{\pi}{4}$ বা $(2n+1)\frac{\pi}{2}$.

20. $2n\pi$ বা $(4n+1)\frac{\pi}{6}$. **21.** $2n\pi-\alpha$ বা $(4n-1)\frac{\pi}{2}+\alpha$.

22. $n\pi$ বা $\frac{n\pi}{3}$. **23.** $m\pi$, বা $(2m+1)\frac{\pi}{2n}$ বা $\frac{m\pi}{n-1}$.

24. $(2n+1)\frac{\pi}{24}$ বা $\frac{n\pi}{4}$. **25.** $n\pi+\frac{3\pi}{4}$ বা $\frac{n}{2}\pi+(-1)^n\frac{\pi}{12}$.

26. $2n\pi+\frac{5\pi}{12}$ বা $2n\pi+\frac{\pi}{12}$. **27.** $2n\pi+\frac{\pi}{3}$.

28. $2n\pi+\frac{5\pi}{12}$ বা $2n\pi-\frac{\pi}{12}$. **29.** $2n\pi+\frac{7\pi}{12}$ বা $2n\pi+\frac{\pi}{12}$.

30. $2n\pi+\frac{\pi}{2}$ বা $2n\pi-\frac{\pi}{2}+2\alpha$. **31.** $n.360°+112°40'$ বা $n.360°$.

32. $\frac{n\pi}{3}+\frac{\pi}{12}$. **33.** $\frac{n\pi}{3}$. **34.** $n\pi\pm\frac{\pi}{6}$. **35.** $\frac{n\pi}{3}$ বা $n\pi$.

36. $\frac{n\pi}{3}$ বা $n\pi$ বা $\frac{n\pi}{2}$. **37.** $\frac{2n\pi}{3}$ বা $n\pi+\frac{\pi}{4}$ বা $2n\pi-\frac{\pi}{2}$.

38. $\frac{n\pi}{3}+\frac{\pi}{9}$. **39.** $2m\pi$ বা $\frac{4m\pi}{n\mp 1}$.

40. $2n\pi \pm \frac{\pi}{3}\cdot$ **41.** $\frac{n\pi}{4} + (-1)^n \frac{\pi}{40}.$ **43.** $\frac{n\pi + (-1)^n a}{4 - 2(-1)^n}.$

44. (i) $\frac{\pi}{3}$, যখন $n = 0$. (ii) $\frac{\pi}{12}, -\frac{7\pi}{12}$, যখন $n = 0$.

(iii) $\frac{5\pi}{12}, \frac{23\pi}{12}$, প্রথমটিতে যখন $n = 0$ এবং দ্বিতীয়টিতে $n = 1$.

45. $\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$, প্রথমটিতে যখন $n = 1, 2, 3$.

$\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$, দ্বিতীয়টিতে যখন $n = 0, 1$, ঋণাত্মক মান বাদ দিয়া।

46. $\frac{\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}$, যখন $n = 0, 1$. **47.** $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}$, যখন $n = 0, 1$.

48. $\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}$, যখন $n = 0$ এবং 1.

49. $\theta = \left(n + \frac{m}{2}\right)\pi \pm \frac{\pi}{6} + (-1)^m \frac{\pi}{12}$, $\phi = \left(\frac{m}{2} - n\right)\pi \mp \frac{\pi}{6} + (-1)^m \frac{\pi}{12}.$

50. $x = y = \frac{\pi}{4}\cdot$

প্রশ্নমালা 9

1. (i) $\frac{\pi}{3}$, $n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{3}\cdot$ (ii) $-\frac{\pi}{6}$, $n\pi - (-1)^n \frac{\pi}{6}\cdot$

(iii) $0, 2n\pi$. (iv) $\frac{3\pi}{4}, 2n\pi \pm \frac{3\pi}{4}.$

(v) $\frac{\pi}{3}$, $n\pi + \frac{\pi}{3}\cdot$ (vi) $\frac{2\pi}{3}, n\pi + \frac{2\pi}{3}.$

2. (i) $\sin^{-1}\sqrt{1-x^2}$, $\tan^{-1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$, $\cot^{-1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $\sec^{-1}\frac{1}{x}$,

$\operatorname{cosec}^{-1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$

(ii) $\sin^{-1}\frac{1}{x}$, $\cos^{-1}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$, $\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$, $\cot^{-1}\sqrt{x^2-1}$,

$\sec^{-1}\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}.$

(iii) $\sin^{-1}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, $\cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$, $\cot^{-1}\frac{1}{x}$,

$\operatorname{cosec}^{-1}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$, $\sec^{-1}\sqrt{x^2+1}.$

3. (i) 1. (ii) 0.

40. (i) $\frac{1}{\sqrt{2}}$. (ii) 1. **41.** 13.

42. $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. **43.** $-\frac{2}{3}$, 3. **44.** $\frac{a+b}{1-ab}$.

45. $-\frac{461}{9}$. **46.** 2. **47.** $x=\frac{1}{2}$, $y=1$

48. $\pm\sqrt{\sin 2\beta}$. **49.** $\frac{ab}{\sqrt{a^2-1}+\sqrt{b^2-1}}$.

প্রশ্নমালা 10

1. 60° বা 120°. **2.** $A=90°$, $B=30°$, $c=10\sqrt{3}$.

3. $\sqrt{\frac{2947}{2373}}$. **4.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **5.** (i) 210 বর্গ-একক।

(ii) $12\sqrt{15}$ বর্গ-একক। **41.** $A=90°$, $B=60°$, $C=30°$.

প্রশ্নমালা 11

1. $455000\sqrt{3}$ বর্গ-সেমি.। **2.** 4 বা $2\sqrt{13}$ কিলোমিটার।

3. $a=6$ সেমি., $b=8$ সেমি., $c=10$ সেমি.। **4.** $\sqrt{\frac{3}{2}}$.

প্রশ্নমালা 12

1. 0·87006. **2.** 0·78042. **3.** 0·47520. **4.** 0·45048.

5. 1·11589. **6.** 1·21707. **7.** 9·77525. **8.** 9·47894.

9. (*a*) 10·00885 ; (*b*) 10·37889. **10.** 25° 13′. **11.** 5·37130064.

12. 4·63849928, $\bar{1}$·6384893.

13. 2·37020915. **14.** ·00338134766.

15. ·7400825. **16.** 0·8862934. **17.** 1·1740732.

18. 40° 47′ 36″. **19.** 34° 27′ 45″. **20.** 8·97580486.

21. 9·78673152. **22.** 42° 25′ 24·9″. **23.** 79° 51′ 47·2″.

24. 68° 52′ 42·6″. **27.** 10·0940753. **28.** 10·27279.

29. ·6642. **30.** 44° 27′ 2·4.″

প্রশ্নমালা 13

1. 9·6733937. **2.** 48° 11′ 23″, 58° 24′ 43″, 73° 23′ 54″ (প্রায়)।

3. 104° 28′ 39″ (প্রায়)। **4.** 52° 15′ 14·86″. **5.** 132° 34′ 32″ (প্রায়)।

6. 55° 46′ 16·14″ (প্রায়)। **7.** 78° 28′ 13″. **8.** 71° 42′ (প্রায়)।

9. 48° 11′ 22·86″, 58° 24′ 42·7″, 73° 23′ 54·44″.

10. 104° 28′ 39″ (প্রায়), 46° 34′ 17″, 28° 57′ 4″.

প্রশ্নমালা 14

1. 27·0375. 2. 7·698622. 3. 172·6436 মিটার।
4. 14·35948 মিটার। 5. $70° 53' 37''$, $49° 6' 23''$.
6. $78° 17' 39·6''$, $49° 36' 20·4''$. 7. $94° 42' 54''$, $25° 17' 6''$.
8. $71° 44' 29·5''$, $48° 15' 30·5''$. 9. $119° 16' 51''$, $5° 43' 9''$.
10. $a=1$, $B=120°$, $C=30°$.

প্রশ্নমালা 15

1. যথাক্রমে $B=75°$ বা $105°$, $C=60°$ বা $30°$, $c=\sqrt{6}$ বা $\sqrt{2}$.
2. $B=34° 27'$ (প্রায়), $C=100° 33'$ (প্রায়)।
3. $B=67° 22' 48·5''$ বা $112° 37' 11·5''$, $C=75° 45'$ বা $33° 30' 37''$;
$c=21$ বা 11. 4. $B=66° 52' 11·6''$ বা $113° 7' 47·1''$,
$C=83° 7' 48·4''$ বা $36° 52' 12·9''$; $c=10$ সে.মি. (প্রায়) বা 4 সে.মি. (প্রায়)।
5. 4·56706 মিটার। 9. $(\sqrt{3}+1):2:\sqrt{2}$. 10. 64279 : 86603 : 98481.

প্রশ্নমালা 16

5. 1 বা 2. 10. 339·4 মি.।

বিশ্লেষণমূলক দ্বিমাত্রিক জ্যামিতি

প্রশ্নমালা 1

1. (i) (4, 3); (ii) (4, 3) বা (4, −3) বা (−4, 3) বা (−4, −3).
2. (i) $\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$; (ii) $\left(\sqrt{2}, \frac{7\pi}{4}\right)$; (iii) $\left(2, \frac{4\pi}{3}\right)$; (iv) $(4, \pi)$; (v) $\left(2\sqrt{3}, \frac{7\pi}{6}\right)$.
3. (i) (0, 2); (ii) $(1, -\sqrt{3})$; (iii) (1, 1); (iv) $(-2, 2\sqrt{3})$;
(vi) $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

প্রশ্নমালা 2

1. (i) (3, 5); (ii) (−4, −3); (iii) (−5, 2).
2. (i) (−3, −5); (ii) (4, 3); (iii) (5, −2).
3. (i) (−6, 3); (ii) (−1, 2); (iii) (0, 3); (iv) (−8, −2); (v) (−3, −1).
4. (i) (2, −1); (ii) (−3, 0); (iii) (−4, −1); (iv) (4, 4); (v) (−1, 3).
5. (i) (3, 2); (ii) (2, −3); (iii) (3, −4); (iv) (−2, 4); (v) (−1, −1).

6. (i) $(-3, -2)$; (ii) $(-2, 3)$; (iii) $(-3, 4)$; (iv) $(2, -4)$; (v) $(1, 1)$.
7. (i) $(-3, -5)$; (ii) $(-3, -5)$. 8. $(3, -4)$. 9. $(9, 7)$.
10. $(7, -1)$. 11. $(2, 5)$.

প্রশ্নমালা 3

1. (i) $(4, -3)$; (ii) $(0, 0)$; (iii) $(6, -6)$; (iv) $(1, 1)$; (v) $(-1, -1)$.
2. (i) $(1, 1)$; (ii) $(0, -1)$; (iii) $(1, -1)$; (iv) $(0, 0)$; (v) $(-5, -5)$.
3. $(1, 6)$. 4. $(8, 9)$. 5. $\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$. 6. $\begin{pmatrix}0\\-10\end{pmatrix}$. 7. $\begin{pmatrix}6\\0\end{pmatrix}$. 8. $\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}$.
9. ["$x+y=0$-এর উপর প্রতিফলন ও $\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}$ চলন $(-7, -9)$ বিন্দুকে $(3, 2)$ বিন্দুতে চিত্রিত করে"—এইরূপ পড়।] $\begin{pmatrix}-6\\-5\end{pmatrix}$. 10. $\begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix}$.

প্রশ্নমালা 4

1. (i) $(-3, 2)$; (ii) $(-2, -3)$; (iii) $(5, 4)$.
2. (i) $(3, 2)$; (ii) $(-1, -1)$; (iii) $(-5, 3)$.
3. 1 (i) $(-2, -3)$; (ii) $(3, -2)$; (iii) $(-4, 5)$;
   2 (i) $(2, -3)$; (ii) $(-1, 1)$; (iii) $(3, 5)$.
4. (i) $(-1, 7)$; (ii) $(-9, 15)$; (iii) $(-7, -1)$.
5. $O_{-90°}$ আবর্তন।

প্রশ্নমালা 5

1. 5; 5; 10; 13. 2. 5. 3. 13. 4. $\sqrt{a^2+b^2}$.
5. $\sqrt{a^2+2b^2+c^2-2ab-2bc}$. 6. $a(m_1-m_2)\sqrt{(m_1+m_2)^2+4}$.
7. $3\pm2\sqrt{15}$. 10. $3, -9$. 25. (i) $(\frac{10}{7}, \frac{33}{7})$; (ii) $(-2, -9)$.
29. $(6, 6)$. 30. $(3, 6)$. 31. $x+y=12$. 32. $(-\frac{1}{3}, 0), (-\frac{5}{3}, 2)$.

প্রশ্নমালা 6

1. 10. 2. 1. 3. 5. 4. 0.
5. $a^2(m_2-m_3)(m_3-m_1)(m_1-m_2)$. 12. $3x-2y+60=0$.
13. $3x-2y=0$.

প্রশ্নমালা 7

1. $x^2+y^2=K^2-a^2$. 2. $2ax+K^2=0$. 3. $(K^2-1)(x^2+y^2+a^2)+2ax(K^2+1)=0$.
4. $4x^2(K^2-4a^2)+4K^2y^2=k^2(K^2-4a^2)$.

5. $(6a-2c)x=a^2-c^2$. 6. $x=0$. 7. $x+y=49$.
8. $x^2+y^2=25$. 9. $y^2-4x-4y+8=0$.
10. $8(x^2+y^2)-2x-36y+35=0$. 11. $x-2y+30=0$.
12. $4x^2+3y^2-8x-8y+8=0$. 13. $x=\frac{k}{4a}$ (k, ধ্রুবক).

প্রশ্নমালা 8

1. (i) $2x+3y+7=0$. (ii) $4x^2+20x+y^2-8y+24=0$.
(iii) $ax+by+(b+2)c=0$. (iv) $x^2+16x+y^2+32=0$.
2. $12x^2-10xy+2y^2=0$ [যখন $h=-\frac{3}{2}, k=-\frac{5}{2}$].
3. (i) -1. (ii) $-\frac{14}{5}$. (iii) -3.
4. $y=x+5$. 5. $x-y\sqrt{3}-2\sqrt{3}=0$. 6. (i) $2x+3y=6$.
(ii) $6x-5y+30=0$. 7. (i) $x+y=11$. (ii) $y-x=1$.
8. $x+y+1=0, x-y=3$. 11. $5x\pm12y=\pm60, 12x\pm5y=\pm60$.
13. $6x-5y=0$. 14. $5x+7y=35$. 15. $x+y+2=0$.
16. $21x-5y+124=0$. 17. $5x+9y+55=0$.
18. $y(t+t_1)=2x+2att_1$. 19. $x+t_1t_2y=a(t_1+t_2)$.
20. $x\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2}+y\sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2}=a\cos\frac{\theta_1-\theta_2}{2}$.
21. $\frac{x}{a}\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2}+\frac{y}{b}\sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2}=\cos\frac{\theta_1-\theta_2}{2}$.
22. (i) $x+3y+7=0$; $y-3x=1$; $y+7x=11$.
(ii) $2x-3y=4$; $y-3x=1$; $x+2y=2$.
23. $x+2y=2$. 25. $x+y=3$; $3\sqrt{2}$ একক।
27. $2ay-2b'x=ab-a'b'$. 28. $y(a'-a)-x(b'-b)=a'b-ab'$;
$y(a'-a)+x(b'-b)=a'b'-ab$. 29. $y=6x$; $2y=3x$.

প্রশ্নমালা 9

1. $90°$. 2. $\frac{4}{3}$. 3. $x=2, 2y+x=4$; কোণের পরিমাণ $=\theta$,
যেখানে $\tan\theta=2$. 4. $4y+3x=18$. 5. $ax+by=ax_1+by_1$.
6. $4y+11x=10$. 7. $ax+by=a^2$.
8. $x(a-c)+y(b-d)=a^2-c^2+b^2-d^2$.
9. $a^2xy'-b^2x'y=(a^2-b^2)x'y'$. 10. $121y-88x=371$.

প্রশ্নমালা 10

1. $\left(\frac{ab}{a+b}, \frac{ab}{a+b}\right)$. 2. $\frac{20}{9}, \frac{20}{9}$. 5. 5. 8. $a=\frac{17}{4}, b=\frac{17}{3}$.

প্রশ্নমালা 11

1. $43x - 29y = 71.$ 2. $a^2y - b^2x = ab(a - b).$ 3. $3x + 4y = 5a.$
4. $x + y + 2 = 0.$ 5. $13x - 23y = 64.$

প্রশ্নমালা 12

1. (0, 0) ধনাত্মক দিকে এবং (5, 7) ঋণাত্মক দিকে অবস্থিত। 2. ধনাত্মক দিকে অবস্থিত। 5. (i) ঋণাত্মক দিকে ; (ii) ধনাত্মক দিকে ; (iii) ঋণাত্মক দিকে।

প্রশ্নমালা 13

1. (a) $4\frac{2}{5}$; (b) $2\frac{2}{5}$. 2. $\left\{\frac{a}{b}\left(b \pm \sqrt{a^2 - b^2}\right), 0\right\}$.
5. $99x + 77y + 71 = 0$; $7x - 9y - 37 = 0.$
6. $\frac{7}{\sqrt{2}}, \frac{21}{\sqrt{29}}, -\frac{21}{\sqrt{29}}.$ 7. $\frac{11}{5}$.
8. (i) মূলবিন্দুর একই পার্শ্বে। (ii) মূলবিন্দুর বিপরীত পার্শ্বে।

প্রশ্নমালা 14 (বিবিধ)

1. $(-\frac{11}{29}, \frac{41}{29}).$ 2. $3x + 4y - 25 = 0.$ 3. $3x + 7y = 0.$
4. $12x + 18y + 11 = 0.$ 6. $x(c - a) + y(d - b) = c^2 + d^2 - a^2 - b^2.$
7. $x + y = 7$ এবং $17x + 31y = 175.$ 8. $4x - 3y + 3 = 0.$
12. $(3l - 2m + n)^2 = 25(l^2 + m^2).$ 13. (8, 8).

প্রশ্নমালা 15

1. $x^2 + y^2 = 64.$
2. (i) $x^2 + y^2 + 4x - 12 = 0.$
(ii) $x^2 + y^2 - 8x - 10y + 16 = 0.$
(iii) $x^2 + y^2 + 8x + 10y - 8 = 0.$
(iv) $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + 2ab = 0.$
(v) $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 20 = 0.$
3. (i) $x^2 + y^2 = 5$;
(ii) $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$;
(iii) $x^2 + y^2 + 4x - 10y + 19 = 0$;
(iv) $x^2 + y^2 + 6x + 4y - 13 = 0.$
4. (a) $x^2 + y^2 - 10x = 0$;
(b) $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy = 0.$
5. $x^2 + y^2 - 14y + 12 = 0.$
6. (i) (0, 0), 4 ;
(ii) (0, 0), $\sqrt{3}$;
(iii) (5, 0), 3 ;
(iv) (0, − 4), 6 ;
(v) (5, 6), 7 ;
(vi) (3, − 7), 5 ;
(vii) $(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$, 1 ;
(viii) $\left(-\frac{b}{a}, -\frac{c}{a}\right), \frac{\sqrt{b^2 + c^2}}{a}.$
7. (i) $x^2 + y^2 + 5x - 5y = 0.$
(ii) $x^2 + y^2 - 2x - 3y = 0.$
(iii) $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 5 = 0.$
8. $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 11 = 0.$

9. 15 বর্গ-একক। 10. কেন্দ্র : (1, −1), (3, 1), (4, 2) ; ব্যাসার্দ্ধ : 3, 4, 5 ; $x-y=2$. 12. $x^2+y^2-2x+4y-20=0$.
13. $x^2+y^2-4x+5y=0$. 14. (a) $x^2+y^2=36$; (b) $x^2+y^2=9$. 15. $x^2+y^2-2x-2y+1=0$.
16. $n(x^2+y^2-a^2)=(m^2+n^2-a^2)y$.
17. $x^2+y^2-2x+2y-3=0$. 18. $x^2+y^2-4x+2y=60$.
19. যদি বিন্দুগুলি A, B ও C দ্বারা যথাক্রমে সূচিত হয়, তাহা হইলে AB, BC, CA সরল রেখাত্রয়ের সমীকরণ যথাক্রমে

$$x-2y+2=0,\ y=0,\ x+y=1\ ;\ x^2+y^2=x+y.$$

20. (a) $x^2+y^2-5x-3y=0$; (b) বৃত্তের বাহিরে।
21. $x^2+y^2-17x-19y+50=0$. 22. $x^2+y^2\pm 6y-16=0$.
23. (a) $x^2+y^2-6x+8y+25=0$; (b) বৃত্তের বাহিরে।
24. (a) $9(x^2+y^2)+12x-6y+4=0$; (b) বিন্দুটি পরিধির উপর।
26. $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}(g^2+f^2-c)$.

প্রশ্নমালা 16

1. (i) 8, (2, 0), $x+2=0$. (ii) 12, (−3, 0), $x-3=0$.
(iii) 20, (0, 5), $y+5=0$. (iv) 16, (0, −4), $y-4=0$.
(v) 10, $(0, -2\frac{1}{2})$, $2y-5=0$. (vi) $\frac{7}{8}$, $(\frac{7}{20}, 0)$, $20x+7=0$.
(i) উপর ; (ii) ভিতর ; (iii) ভিতর ; (iv) ভিতর ;
(v) ভিতর ; (vi) বাহির।
2. (i) $y^2=2x$; (ii) $3x^2+4y=0$.
3. (i) $y^2=16x$; (ii) $y^2=-8x$; (iii) $x^2=3y$; (iv) $x^2+20y=0$.
(i) $x+4=0$; (ii) $x=2$; (iii) $4y+3=0$; (iv) $y=5$.
4. (i) $y^2=16(x-4)$; (ii) $y^2=-16(x+4)$.
5. (i) $y^2=10x+25$; নিয়ামক : $x+5=0$;
(ii) $y^2+10x=25$; নিয়ামক : $x=5$.
6. (i) $x^2=6y+9$; নিয়ামক : $y+3=0$;
(ii) $x^2+6y=9$; নিয়ামক : $y=3$.
7. $x^2=12y$. 8. $\frac{4}{3}$, $(\frac{1}{3}, 0)$. 9. $x=20$, (5, 10), (5, −10).
10. (i) $y^2=16x$; নাভি : (4, 0) ; (ii) $y^2=-16x$; নাভি : (−4, 0).
11. (i) $x^2=16y$; নাভি : (0, 4) ; (ii) $x^2=-5y$; নাভি : $(0, -\frac{5}{4})$.
12. (i) 4, (4, 0), $x+2=0$; (ii) 8, (−3, 0), $x=1$;
(iii) 2, (−1, 0), $x+2=0$; (iv) 4, $(\frac{1}{2}, 0)$, $2x-5=0$;
(v) 1, $(0, \frac{7}{4})$, $4y-5=0$. (vi) 3, $(0, \frac{1}{2})$, $y=2$;
(vii) 4, (4, 2), $x=2$; (viii) 8, (−4, −3), $x=0$

13. $(-2, -3), (-\frac{3}{2}, -3), 2x+5=0.$ **14.** (*a*) $(1, 2), (0, 2), 4$;

(*b*) $\left(-\dfrac{b}{2a}, -\dfrac{b^2-4ac}{4a}\right), \left(-\dfrac{b}{2a}, -\dfrac{b^2-4ac-1}{4a}\right), \dfrac{1}{a}$.

15. $x^2-2xy+y^2+2x-6y+3=0.$

16. $4x^2+y^2+4xy+14x-18y+56=0.$ **17.** $(\frac{3}{10}, 0).$

18. (i) $(8, 4), (2, -2)$; (ii) $(9, 3), (4, 2)$;

(iii) $(2, -3), (-4, -12)$; (iv) $(\frac{5}{27}, \frac{2}{3}), (\frac{5}{3}, -2).$

19. $\frac{4}{3}, (\frac{1}{3}, 0)$, ছেদবিন্দুদ্বয় : $(0, 0), (3, 2).$

প্রশ্নমালা 17

1.

অক্ষদ্বয়	উৎকেন্দ্রতা	নাভিলম্ব	কেন্দ্র	নাভি	নিয়ামকদ্বয়
(i) $8, 6$;	$\sqrt{7}/4$;	$9/2$;	$(0, 0)$;	$(\pm\sqrt{7}, 0)$;	$x=\pm 16\sqrt{7}/7.$
(ii) $20, 12$;	$4/5$;	$36/5$;	$(0, 0)$;	$(\pm 8, 0)$;	$x=\pm 25/2.$
(iii) $10, 6$;	$4/5$;	$18/5$;	$(0, 0)$;	$(\pm 4, 0)$;	$x=\pm 25/4.$
(iv) $2\sqrt{2}, 2$;	$1/\sqrt{2}$;	$\sqrt{2}$;	$(0, 0)$;	$(\pm 1, 0)$;	$x=\pm 2.$
(v) $\sqrt{2}, 2/\sqrt{3}$;	$1/\sqrt{3}$;	$2\sqrt{2}/3$;	$(0, 0)$;	$(\pm 1/\sqrt{6}, 0)$;	$x=\pm\sqrt{6}/2.$
(vi) $6, 4$;	$\sqrt{5}/3$;	$8/3$;	$(0, 0)$;	$(0, \pm\sqrt{5})$;	$y=\pm 9\sqrt{5}/5.$
(vii) $4, 4\sqrt{\frac{2}{3}}$;	$1/\sqrt{3}$;	$2\sqrt{6}$;	$(0, 0)$;	$(0, \pm 2/\sqrt{3})$;	$y=\pm 2\sqrt{2}.$
(viii) $8, 4\sqrt{3}$;	$1/2$;	6 ;	$(4, 0)$;	$(6, 0), (2, 0)$;	$x=12, x+4=0.$
(ix) $2\sqrt{3}, 2\sqrt{2}$;	$1/\sqrt{3}$;	$4/\sqrt{3}$;	$(1, 0)$;	$(2, 0), (0, 0)$;	$x=4, x+2=0$
(x) $20, 12$;	$4/5$;	$36/5$;	$(4, -2)$;	$(12, -2), (-4, -2)$;	$x=33/2, 2x+17=0.$

2. $\frac{14}{3}$. **3.** 10. **4.** $4x^2+9y^2=9.$

5. (i) $x^2/25+y^2/16=1$; (ii) $3x^2+5y^2=32$;

(iii) $x^2/5+y^2/4=1$; (iv) $x^2/64+y^2/28=1.$

6. $a=1/5, e=4/5.$ **7.** $x^2/49+y^2/25=1, 2\sqrt{6}/7, (\pm 2\sqrt{6}, 0).$

8. $3x^2+5y^2=32.$ **9.** $a=5\sqrt{2}, b=4\sqrt{2}.$

10. 30 সেমি., 24 সেমি.। **11.** $1/3.$ **12.** (*a*) $1/\sqrt{2}$; (*b*) $\sqrt{3}/2.$

13. (i) $x^2/25+y^2/24=1$; (ii) $4x^2/81+4y^2/45=1$;

(iii) $x^2/9+y^2/8=1.$ **14.** $20x^2+4y^2=5.$

15. (i) $7x^2+2xy+7y^2+10x-10y+7=0$;

(ii) $25(x^2+y^2)+2xy-130(x+y)+169=0.$

প্রশ্নমালা 18

1. (i) $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{4y^2}{25}=1$; (ii) $x^2-4y^2=4$; (iii) $4x^2-5y^2=11$;

(iv) $x^2-8y^2=64$; (v) $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$; (vi) $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{7}=1$;

(vii) $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{4y^2}{25}=1$; (viii) $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{4y^2}{9}=1$; (ix) $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{12}=1.$

2. উৎকেন্দ্রতা	নাভিলম্ব	নাভি	নিয়ামক
(i) $\sqrt{5}/2$	2	$(\pm 2\sqrt{5}, 0)$	$x = \pm 8/\sqrt{5}$;
(ii) 3/2	5	$(\pm 3, 0)$	$x = \pm \frac{4}{3}$;
(iii) 6/5	22/5	$(\pm 6, 0)$	$x = \pm \frac{25}{6}$.

3. (i) 16 ; (ii) 12 ; (iii) 5/4 ; (iv) $(1, -2)$; (v) $(11, -2), (-9, -2)$; (vi) $5x = 37$, $5x + 27 = 0$.
4. $a = 4$, $b = 2\sqrt{3}$. 5. $A = 1$; (i) $\frac{4}{5}$; (ii) 4, $4/\sqrt{5}$. (iii) $\frac{1}{5}\sqrt{30}$.
6. $20x^2 - 16y^2 = 5$. 7. $(2, -1), (-4, 3)$; $(-1, 1)$.
8. $27x^2 + 55y^2 - 96xy - 6x + 8y = 200$.

প্রশ্নমালা 19

1. (i) $x - 2y + 10 = 0$; (ii) $8x + 3y + 15 = 0$; (iii) $x + 3y + 9 = 0$; (iv) $x + y = 3$; (v) $x = 4$; (vi) $y = 4$; (vii) $2x + 3y = 12$; (viii) $x - 2y = 2$; (ix) $x - y + 4 = 0$; (x) $x + y = 1$.
2. 3. 3. $20x - 4y + 1 = 0$; $(\frac{1}{20}, \frac{1}{2})$; $4x + 4y + 9 = 0$. 4. $4x - 4y + 9 = 0$; 5. $(-3, 2)$. 6. $x - y - 7 = 0$ এবং $x + y + 7 = 0$. 7. $x - 2y + 8 = 0$. 8. $(54, 20)$.
9. ± 4. 10. $a = 3$, $b = \sqrt{7}$. [উৎকেন্দ্রতা $\frac{4}{3}$ পড়]

প্রশ্নমালা 20

1. $(-3, 1)$. 2. $(2, 2\sqrt{3})$. 4. $2(1 \pm \sqrt{1 + m^2})$. 5. $\pm x - 2y = 15$.
6. $x - 2y \pm 5 = 0$. 12. $(\frac{2}{3}, 4)$; $(\frac{5}{12}, \frac{5}{2})$; $(4ab, 2b)$; $\left(\frac{a}{m^2} - a, \frac{2a}{m}\right)$; $(am^2, -2am)$. 13. $m = -\frac{3}{5}$; $c = -\frac{25}{12}$. 14. $y = 3x + 2$.
15. $4\sqrt{3}y = 12x + b$; $\left(\frac{b}{12}, \frac{b}{2\sqrt{3}}\right)$. 16. $y + 2x + 1 = 0$; $(\frac{1}{2}, -2)$; $2y = x + 8$; $(8, 8)$. 17. $ty = x + at^2$. 18. $y = 4x \pm 7$; $(-\frac{12}{7}, \frac{1}{7})$; $(\frac{12}{7}, -\frac{1}{7})$. 19. $4y = 3x + 12$; $(-\frac{8}{3}, 1)$; $4y = 3x - 12$; $(\frac{8}{3}, -1)$.
20. $6y = 5x \pm 14$; $(-\frac{10}{7}, \frac{8}{7})$; $(\frac{10}{7}, -\frac{8}{7})$. 21. $5y = 3x \pm 16$; $(-2, 2)$; $(2, -2)$. 22. $y = \sqrt{3}x \pm \sqrt{33}$; $\left(\frac{9\sqrt{11}}{11}, \frac{20\sqrt{33}}{11}\right)$; $\left(-\frac{9\sqrt{11}}{11}, -\frac{2\sqrt{33}}{11}\right)$. 23. $9y = 5x \pm 12$. 24. $2y = 3x \pm 7$.
25. $y = \sqrt{3}x \pm 4$. 27. $(-2, 3)$. 28. $(11, -6)$.
29. $a^2(x^2 + y^2) = 1$. 30. $x + y = 5$. 31. $\left(\frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)$.
32. $x + y = \pm\sqrt{a^2 + b^2}$.

প্রশ্নমালা 21

1. $3x-y=0$. 2. $x+y-1=0$. 3. $3x+y=33$. 4. $y=x+9$.
5. $x+y=3a,\ x-y=3a$. 6. $7x+21y=3$. 7. $5x-6y=4$.
8. $6x+5y=8$. 9. $2x-y=13$. 10. $x+y+7=0$.
11. $5x-8y-2=0$.

প্রশ্নমালা 22

1. $y=4x+2,\ 2x-3y+36=0$. 2. $a=6$. 3. $\left(-\frac{\sqrt{30}}{10}, \frac{\sqrt{30}}{15}\right)$.
4. $m=\pm 3$; $(-1, \frac{5}{4})$; $(1, \frac{5}{4})$. 5. $a=5,\ b=4$. 6. $2x-3y+12=0$, $14x+3y=60$; $(-3, 2)$; $(\frac{21}{5}, \frac{2}{5})$.

প্রশ্নমালা 23

1. (i) $3x+4y=16$; (ii) $x+2=0$. 2. $2x-3y+13=0$. 3. $y+9=0$.
5. $x+y+1=0$. 6. $5y^2=8x-25y-64$. 8. $4(x-y)=15$.
9. $5y=x+5$. 10. $x+4y=0$. 11. $x=y$.
12. $x=y$. 16. $y=3x,\ x+4y=0,\ y+3x=0,\ 4y-x=0$.
17. প্রদত্ত শর্ত সিদ্ধ করে এরূপ কোন বাস্তব ব্যাস-যুগলের অস্তিত্ব নাই।
18. $3x+2y=8$. 19. $9x-4y=31$. 24. $9y=32x$.
25. $4x-3y=11$.

লগারিদ্‌ম ও অ্যান্টি-লগারিদ্‌ম-এর তালিকা

Table I

লগারিদ্‌ম-এর তালিকা

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Mean Differences 1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170						5	9	13	17	21	26	30	34	38
						0212	0253	0294	0334	0374	4	8	12	16	20	24	28	32	36
11	0414	0453	0492	0531	0569						4	8	12	16	20	23	27	31	35
						0607	0645	0682	0719	0755	4	7	11	15	18	22	26	29	33
12	0792	0828	0864	0899	0934						3	7	11	14	18	21	25	28	32
						0969	1004	1038	1072	1106	3	7	10	14	17	20	24	27	31
13	1139	1173	1206	1239	1271						3	6	10	13	16	19	23	26	29
						1303	1335	1367	1399	1430	3	7	10	13	16	19	22	25	29
14	1461	1492	1523	1553	1584						3	6	9	12	15	19	22	25	28
						1614	1644	1673	1703	1732	3	6	9	12	14	17	20	23	26
15	1761	1790	1818	1847	1875						3	6	9	11	14	17	20	23	26
						1903	1931	1959	1987	2014	3	6	8	11	14	17	19	22	25
16	2041	2068	2095	2122	2148						3	6	8	11	14	16	19	22	24
						2175	2201	2227	2253	2279	3	5	8	10	13	16	18	21	23
17	2304	2330	2355	2380	2405						3	5	8	10	13	15	18	20	23
						2430	2455	2480	2504	2529	3	5	8	10	12	15	17	20	22
18	2553	2577	2601	2625	2648						2	5	7	9	12	14	17	19	21
						2672	2695	2718	2742	2765	2	4	7	9	11	14	16	18	21
19	2788	2810	2833	2856	2878						2	4	7	9	11	13	16	18	20
						2900	2923	2945	2967	2989	2	4	6	8	11	13	15	17	19

20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201	2	4	6	8	11	13	15	17	19
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404	2	4	6	8	10	12	14	16	18
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598	2	4	6	8	10	12	14	15	17
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	7784	2	4	6	7	9	11	13	15	17
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962	2	4	5	7	9	11	12	14	16
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133	2	3	5	7	9	10	12	14	15
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298	2	3	5	7	8	10	11	13	15
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456	2	3	5	6	8	9	11	13	14
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609	2	3	5	6	8	9	11	12	14
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757	1	3	4	6	7	9	10	12	13
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900	1	3	4	6	7	9	10	11	13
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038	1	3	4	6	7	8	10	11	12
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172	1	3	4	5	7	8	9	11	12
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302	1	3	4	5	6	8	9	10	12
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428	1	3	4	5	6	8	9	10	11
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551	1	2	4	5	6	7	9	10	11
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670	1	2	4	5	6	7	8	10	11
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786	1	2	3	5	6	7	8	9	10
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899	1	2	3	5	6	7	8	9	10
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010	1	2	3	4	5	7	8	9	10
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117	1	2	3	4	5	6	8	9	10
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222	1	2	3	4	5	6	7	8	9
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325	1	2	3	4	5	6	7	8	9
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425	1	2	3	4	5	6	7	8	9
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522	1	2	3	4	5	6	7	8	9
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618	1	2	3	4	5	6	7	8	9
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712	1	2	3	4	5	6	7	7	8
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803	1	2	3	4	5	5	6	7	8
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893	1	2	3	4	4	5	6	7	8
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981	1	2	3	4	4	5	6	7	8
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Mean Differences 1	2	3	4	5	6	7	8	9
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067	1	2	3	3	4	5	6	7	8
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152	1	2	3	3	4	5	6	7	8
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235	1	2	2	3	4	5	6	7	7
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316	1	2	2	3	4	5	6	6	7
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396	1	2	2	3	4	5	6	6	7
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474	1	2	2	3	4	5	5	6	7
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551	1	2	2	3	4	5	5	6	7
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627	1	2	2	3	4	5	5	6	7
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701	1	1	2	3	4	4	5	6	7
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774	1	1	2	3	4	4	5	6	7
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846	1	1	2	3	4	4	5	6	6
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917	1	1	2	3	4	4	5	6	6
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987	1	1	2	3	3	4	5	6	6
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055	1	1	2	3	3	4	5	5	6
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122	1	1	2	3	3	4	5	5	6
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189	1	1	2	3	3	4	5	5	6
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254	1	1	2	3	3	4	5	5	6
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319	1	1	2	3	3	4	5	5	6
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382	1	1	2	3	3	4	4	5	6
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445	1	1	2	2	3	4	4	5	6
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506	1	1	2	2	3	4	4	5	6
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567	1	1	2	2	3	4	4	5	5
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627	1	1	2	2	3	4	4	5	5
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686	1	1	2	2	3	4	4	5	5
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745	1	1	2	2	3	4	4	5	5

75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802	1	1	2	2	3	3	4	5	5
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859	1	1	2	2	3	3	4	5	5
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915	1	1	2	2	3	3	4	5	5
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971	1	1	2	2	3	3	4	4	5
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025	1	1	2	2	3	3	4	4	5
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079	1	1	2	2	3	3	4	4	5
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133	1	1	2	2	3	3	4	4	5
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186	1	1	2	2	3	3	4	4	5
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238	1	1	2	2	3	3	4	4	5
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289	1	1	2	2	3	3	4	4	5
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340	1	1	2	2	3	3	4	4	5
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390	1	1	2	2	3	3	4	4	5
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440	0	1	1	2	2	3	3	4	4
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489	0	1	1	2	2	3	3	4	4
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538	0	1	1	2	2	3	3	4	4
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586	0	1	1	2	2	3	3	4	4
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633	0	1	1	2	2	3	3	4	4
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680	0	1	1	2	2	3	3	4	4
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727	0	1	1	2	2	3	3	4	4
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773	0	1	1	2	2	3	3	4	4
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818	0	1	1	2	2	3	3	4	4
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863	0	1	1	2	2	3	3	4	4
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908	0	1	1	2	2	3	3	4	4
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952	0	1	1	2	2	3	3	4	4
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996	0	1	1	2	2	3	3	3	4
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9

v

TABLE II

অ্যান্টি-লগারিদ্‌ম-এর তালিকা

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Mean Differences 1	2	3	4	5	6	7	8	9
·00	1000	1002	1005	1007	1009	1012	1014	1016	1019	1021	0	0	1	1	1	1	2	2	2
·01	1023	1026	1028	1030	1033	1035	1038	1040	1042	1045	0	0	1	1	1	1	2	2	2
·02	1047	1050	1052	1054	1057	1059	1062	1064	1067	1069	0	0	1	1	1	1	2	2	2
·03	1072	1074	1076	1079	1081	1084	1086	1089	1091	1094	0	0	1	1	1	1	2	2	2
·04	1096	1099	1102	1104	1107	1109	1112	1114	1117	1119	0	1	1	1	1	2	2	2	2
·05	1122	1125	1127	1130	1132	1135	1138	1140	1143	1146	0	1	1	1	1	2	2	2	2
·06	1148	1151	1153	1156	1159	1161	1164	1167	1169	1172	0	1	1	1	1	2	2	2	2
·07	1175	1178	1180	1183	1186	1189	1191	1194	1197	1199	0	1	1	1	1	2	2	2	2
·08	1202	1205	1208	1211	1213	1216	1219	1222	1225	1227	0	1	1	1	1	2	2	2	3
·09	1230	1233	1236	1239	1242	1245	1247	1250	1253	1256	0	1	1	1	1	2	2	2	3
·10	1259	1262	1265	1268	1271	1274	1276	1279	1282	1285	0	1	1	1	1	2	2	2	3
·11	1288	1291	1294	1297	1300	1303	1306	1309	1312	1315	0	1	1	1	2	2	2	2	3
·12	1318	1321	1324	1327	1330	1334	1337	1340	1343	1346	0	1	1	1	2	2	2	2	3
·13	1349	1352	1355	1358	1361	1365	1368	1371	1374	1377	0	1	1	1	2	2	2	3	3
·14	1380	1384	1387	1390	1393	1396	1400	1403	1406	1409	0	1	1	1	2	2	2	3	3
·15	1413	1416	1419	1422	1426	1429	1432	1435	1439	1442	0	1	1	1	2	2	2	3	3
·16	1445	1449	1452	1455	1459	1462	1466	1469	1472	1476	0	1	1	1	2	2	2	3	3
·17	1479	1483	1486	1489	1493	1496	1500	1503	1507	1510	0	1	1	1	2	2	2	3	3
·18	1514	1517	1521	1524	1528	1531	1535	1538	1542	1545	0	1	1	1	2	2	2	3	3
·19	1549	1552	1556	1560	1563	1567	1570	1574	1578	1581	0	1	1	1	2	2	3	3	3
·20	1585	1589	1592	1596	1600	1603	1607	1611	1614	1618	0	1	1	1	2	2	3	3	3
·21	1622	1626	1629	1633	1637	1641	1644	1648	1652	1656	0	1	1	2	2	2	3	3	3
·22	1660	1663	1667	1671	1675	1679	1683	1687	1690	1694	0	1	1	2	2	2	3	3	3
·23	1698	1702	1706	1710	1714	1718	1722	1726	1730	1734	0	1	1	2	2	2	3	3	4
·24	1738	1742	1746	1750	1754	1758	1762	1766	1770	1774	0	1	1	2	2	2	3	3	4

·25	1778	1782	1786	1791	1795	1799	1803	1807	1811	1816	0	1	1	2	2	2	3	3	4
·26	1820	1824	1828	1832	1837	1841	1845	1849	1854	1858	0	1	1	2	2	3	3	3	4
·27	1862	1866	1871	1875	1879	1884	1888	1892	1897	1901	0	1	1	2	2	3	3	3	4
·28	1905	1910	1914	1919	1923	1928	1932	1936	1941	1945	0	1	1	2	2	3	3	4	4
·29	1950	1954	1959	1963	1968	1972	1977	1982	1986	1991	0	1	1	2	2	3	3	4	4
·30	1995	2000	2004	2009	2014	2018	2023	2028	2032	2037	0	1	1	2	2	3	3	4	4
·31	2042	2046	2051	2056	2061	2065	2070	2075	2080	2084	0	1	1	2	2	3	3	4	4
·32	2089	2094	2099	2104	2109	2113	2118	2123	2128	2133	0	1	1	2	2	3	3	4	4
·33	2138	2143	2148	2153	2158	2163	2168	2173	2178	2183	0	1	1	2	2	3	3	4	4
·34	2188	2193	2198	2203	2208	2213	2218	2223	2228	2234	1	1	2	2	3	3	4	4	5
·35	2239	2244	2249	2254	2259	2265	2270	2275	2280	2286	1	1	2	2	3	3	4	4	5
·36	2291	2296	2301	2307	2312	2317	2323	2328	2333	2339	1	1	2	2	3	3	4	4	5
·37	2344	2350	2355	2360	2366	2371	2377	2382	2388	2393	1	1	2	2	3	3	4	4	5
·38	2399	2404	2410	2415	2421	2427	2432	2438	2443	2449	1	1	2	2	3	3	4	4	5
·39	2455	2460	2466	2472	2477	2483	2489	2495	2500	2506	1	1	2	2	3	3	4	5	5
·40	2512	2518	2523	2529	2535	2541	2547	2553	2559	2564	1	1	2	2	3	4	4	5	5
·41	2570	2576	2582	2588	2594	2600	2606	2612	2618	2624	1	1	2	2	3	4	4	5	5
·42	2630	2636	2642	2649	2655	2661	2667	2673	2679	2685	1	1	2	2	3	4	4	5	6
·43	2692	2698	2704	2710	2716	2723	2729	2735	2742	2748	1	1	2	3	3	4	4	5	6
·44	2754	2761	2767	2773	2780	2786	2793	2799	2805	2812	1	1	2	3	3	4	4	5	6
·45	2818	2825	2831	2838	2844	2851	2858	2864	2871	2877	1	1	2	3	3	4	5	5	6
·46	2884	2891	2897	2904	2911	2917	2924	2931	2938	2944	1	1	2	3	3	4	5	5	6
·47	2951	2958	2965	2972	2979	2985	2992	2999	3006	3013	1	1	2	3	3	4	5	5	6
·48	3020	3027	3034	3041	3048	3055	3062	3069	3076	3083	1	1	2	3	4	4	5	6	6
·49	3090	3097	3105	3112	3119	3126	3133	3141	3148	3155	1	1	2	3	4	4	5	6	6
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9

অ্যান্টি-লগারিদ্ম-এর তালিকা

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Mean Differences 1	2	3	4	5	6	7	8	9
·50	3162	3170	3177	3184	3192	3199	3206	3214	3221	3228	1	1	2	3	4	4	5	6	7
·51	3236	3243	3251	3258	3266	3273	3281	3289	3296	3304	1	2	2	3	4	5	5	6	7
·52	3311	3319	3327	3334	3342	3350	3357	3365	3373	3381	1	2	2	3	4	5	5	6	7
·53	3388	3396	3404	3412	3420	3428	3436	3443	3451	3459	1	2	2	3	4	5	6	6	7
·54	3467	3475	3483	3491	3499	3508	3516	3524	3532	3540	1	2	2	3	4	5	6	6	7
·55	3548	3556	3565	3573	3581	3589	3597	3606	3614	3622	1	2	2	3	4	5	6	7	7
·56	3631	3639	3648	3656	3664	3673	3681	3690	3698	3707	1	2	3	3	4	5	6	7	8
·57	3715	3724	3733	3741	3750	3758	3767	3776	3784	3793	1	2	3	3	4	5	6	7	8
·58	3802	3811	3819	3828	3837	3846	3855	3864	3873	3882	1	2	3	4	4	5	6	7	8
·59	3890	3899	3908	3917	3926	3936	3945	3954	3963	3972	1	2	3	4	5	5	6	7	8
·60	3981	3990	3999	4009	4018	4027	4036	4046	4055	4064	1	2	3	4	5	6	6	7	8
·61	4074	4083	4093	4102	4111	4121	4130	4140	4150	4159	1	2	3	4	5	6	7	8	9
·62	4169	4178	4188	4198	4207	4217	4227	4236	4246	4256	1	2	3	4	5	6	7	8	9
·63	4266	4276	4285	4295	4305	4315	4325	4335	4345	4355	1	2	3	4	5	6	7	8	9
·64	4365	4375	4385	4395	4406	4416	4426	4436	4446	4457	1	2	3	4	5	6	7	8	9
·65	4467	4477	4487	4498	4508	4519	4529	4539	4550	4560	1	2	3	4	5	6	7	8	9
·66	4571	4581	4592	4603	4613	4624	4634	4645	4656	4667	1	2	3	4	5	6	7	9	10
·67	4677	4688	4699	4710	4721	4732	4742	4753	4764	4775	1	2	3	4	5	7	8	9	10
·68	4786	4797	4808	4819	4831	4842	4853	4864	4875	4887	1	2	3	4	6	7	8	9	10
·69	4898	4909	4920	4932	4943	4955	4966	4977	4989	5000	1	2	3	5	6	7	8	9	10
·70	5012	5023	5035	5047	5058	5070	5082	5093	5105	5117	1	2	4	5	6	7	8	9	11
·71	5129	5140	5152	5164	5176	5188	5200	5212	5224	5236	1	2	4	5	6	7	8	10	11
·72	5248	5260	5272	5284	5297	5309	5321	5333	5346	5358	1	2	4	5	6	7	9	10	11
·73	5370	5383	5395	5408	5420	5433	5445	5458	5470	5483	1	3	4	5	6	8	9	10	11
·74	5495	5508	5521	5534	5546	5559	5572	5585	5598	5610	1	3	4	5	6	8	9	10	12

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
·75	5623	5636	5649	5662	5675	5689	5702	5715	5728	5741	1	3	4	5	7	8	9	10	12
·76	5754	5768	5781	5794	5808	5821	5834	5848	5861	5875	1	3	4	5	7	8	9	11	12
·77	5888	5902	5916	5929	5943	5957	5970	5984	5998	6012	1	3	4	5	7	8	10	11	12
·78	6026	6039	6053	6067	6081	6095	6109	6124	6138	6152	1	3	4	6	7	8	10	11	13
·79	6166	6180	6194	6209	6223	6237	6252	6266	6281	6295	1	3	4	6	7	9	10	11	13
·80	6310	6324	6339	6353	6368	6383	6397	6412	6427	6442	1	3	4	6	7	9	10	12	13
·81	6457	6471	6486	6501	6516	6531	6546	6561	6577	6592	2	3	5	6	8	9	11	12	14
·82	6607	6622	6637	6653	6668	6683	6699	6714	6730	6745	2	3	5	6	8	9	11	12	14
·83	6761	6776	6792	6808	6823	6839	6855	6871	6887	6902	2	3	5	6	8	9	11	13	14
·84	6918	6934	6950	6966	6982	6998	7015	7031	7047	7063	2	3	5	6	8	10	11	13	15
·85	7079	7096	7112	7129	7145	7161	7178	7194	7211	7228	2	3	5	7	8	10	12	13	15
·86	7244	7261	7278	7295	7311	7328	7345	7362	7379	7396	2	3	5	7	8	10	12	13	15
·87	7413	7430	7447	7464	7482	7499	7516	7534	7551	7568	2	3	5	7	9	10	12	14	16
·88	7586	7603	7621	7638	7656	7674	7691	7709	7727	7745	2	4	5	7	9	11	12	14	16
·89	7762	7780	7798	7816	7834	7852	7870	7889	7907	7925	2	4	5	7	9	11	13	14	16
·90	7943	7962	7980	7998	8017	8035	8054	8072	8091	8110	2	4	6	7	9	11	13	15	17
·91	8128	8147	8166	8185	8204	8222	8241	8260	8279	8299	2	4	6	8	9	11	13	15	17
·92	8318	8337	8356	8375	8395	8414	8433	8453	8472	8492	2	4	6	8	10	12	14	15	17
·93	8511	8531	8551	8570	8590	8610	8630	8650	8670	8690	2	4	6	8	10	12	14	16	18
·94	8710	8730	8750	8770	8790	8810	8831	8851	8872	8892	2	4	6	8	10	12	14	16	18
·95	8913	8933	8954	8974	8995	9016	9036	9057	9078	9099	2	4	6	8	10	12	15	17	19
·96	9120	9141	9162	9183	9204	9226	9247	9268	9290	9311	2	4	6	8	11	13	15	17	19
·97	9333	9354	9376	9397	9419	9441	9462	9484	9506	9528	2	4	7	9	11	13	15	17	20
·98	9550	9572	9594	9616	9638	9661	9683	9705	9727	9750	2	4	7	9	11	13	16	18	20
·99	9772	9795	9817	9840	9863	9886	9908	9931	9954	9977	2	5	7	9	11	14	16	18	20

ত্রৈকোণমিতিক অনুপাতের
লগারিদ্‌মিক তালিকা

(LOGARITHMIC TABLES OF TRIGONOMETRIC RATIOS)

TABLE III
NATURAL SINES

	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′		Mean Differences 1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
0°	0·00000	0·00291	0·00582	0·00873	0·01164	0·01454	0·01745	89°	29	58	87	116	145	175	204	233	262
1°	·01745	·02036	·02327	·02618	·02908	·03199	·03490	88°	29	58	87	116	145	175	204	233	262
2°	·03490	·03781	·04071	·04362	·04653	·04943	·05234	87°	29	58	87	116	145	175	204	233	262
3°	·05234	·05524	·05814	·06105	·06395	·06685	·06976	86°	29	58	87	116	145	174	203	232	261
4°	·06976	·07266	·07556	·07846	·08136	·08426	·08716	85°	29	58	87	116	145	174	203	232	261
5°	0·08716	0·09005	0·09295	0·09585	0·09874	0·10164	0·10453	84°	29	58	87	116	145	174	203	232	261
6°	·10453	·10742	·11031	·11320	·11609	·11898	·12187	83°	29	58	87	116	145	174	203	232	261
7°	·12187	·12476	·12764	·13053	·13341	·13629	·13917	82°	29	58	87	116	145	173	202	231	260
8°	·13917	·14205	·14493	·14781	·15069	·15356	·15643	81°	29	58	86	115	144	173	202	230	259
9°	·15643	·15931	·16218	·16505	·16792	·17078	·17365	80°	29	57	86	115	144	172	201	230	258
10°	0·17365	0·17651	0·17937	0·18224	0·18509	0·18795	0·19081	79°	29	57	86	115	144	172	201	229	258
11°	·19081	·19366	·19652	·19937	·20222	·20507	·20791	78°	29	57	86	114	143	171	200	228	257
12°	·20791	·21076	·21360	·21644	·21928	·22212	·22495	77°	28	57	85	114	142	170	199	227	256
13°	·22495	·22778	·23062	·23345	·23627	·23910	·24192	76°	28	57	85	113	141	170	198	226	255
14°	·24192	·24474	·24756	·25038	·25320	·25601	·25882	75°	28	56	85	113	141	169	197	226	254
15°	0·25882	0·26163	0·26443	0·26724	0·27004	0·27284	0·27564	74°	28	56	84	112	140	168	196	224	252
16°	·27564	·27843	·28123	·28402	·28680	·28959	·29237	73°	28	56	84	112	140	167	195	223	251
17°	·29237	·29515	·29793	·30071	·30348	·30625	·30902	72°	28	56	83	111	139	166	194	222	250
18°	·30902	·31178	·31454	·31730	·32006	·32282	·32557	71°	28	55	83	110	138	166	193	221	248
19°	·32557	·32832	·33106	·33381	·33655	·33929	·34202	70°	27	55	82	110	137	164	192	219	247

	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
20°	0·34202	0·34475	0·34748	0·35021	0·35293	0·35565	0·35837	69°	27	55	82	109	137	164	191	218	246
21°	·35837	·36108	·36379	·36650	·36921	·37191	·37461	68°	27	54	81	108	136	163	190	217	244
22°	·37461	·37730	·37999	·38268	·38537	·38805	·39073	67°	27	54	81	108	135	161	188	215	242
23°	·39073	·39341	·39608	·39875	·40142	·40408	·40674	66°	27	53	80	107	134	160	187	214	240
24°	·40674	·40939	·41204	·41469	·41734	·41998	·42262	65°	27	53	80	106	133	159	186	212	238
25°	0·42262	0·42525	0·42788	0·43051	0·43313	0·43575	0·43837	64°	26	52	79	105	131	157	184	210	236
26°	·43837	·44098	·44359	·44620	·44880	·45140	·45399	63°	26	52	78	104	130	156	182	208	234
27°	·45399	·45658	·45917	·46175	·46433	·46690	·46947	62°	26	52	77	103	129	155	181	206	232
28°	·46947	·47204	·47460	·47716	·47971	·48226	·48481	61°	26	51	77	102	128	154	179	204	230
29°	·48481	·48735	·48989	·49242	·49495	·49748	·50000	60°	25	51	76	101	127	152	177	202	228
30°	0·50000	0·50252	0·50503	0·50754	0·51004	0·51254	0·51504	59°	25	50	75	100	125	150	175	200	225
31°	·51504	·51753	·52002	·52250	·52498	·52745	·52992	58°	25	50	74	99	124	149	174	198	223
32°	·52992	·53238	·53484	·53730	·53975	·54220	·54464	57°	25	49	74	98	123	147	172	196	221
33°	·54464	·54708	·54951	·55194	·55436	·55678	·55919	56°	24	49	73	97	122	146	170	194	219
34°	·55919	·56160	·56401	·56641	·56880	·57119	·57358	55°	24	48	72	96	120	144	168	192	216
35°	0·57358	0·57596	0·57833	0·58070	0·58307	0·58543	0·58779	54°	24	47	71	95	119	142	166	190	213
36°	·58779	·59014	·59248	·59482	·59716	·59949	·60182	53°	23	47	70	94	117	140	164	187	211
37°	·60182	·60414	·60645	·60876	·61107	·61337	·61566	52°	23	46	70	92	116	139	162	185	208
38°	·61566	·61795	·62024	·62251	·62479	·62706	·62932	51°	23	46	68	91	114	137	159	182	205
39°	·62932	·63158	·63383	·63608	·63832	·64056	·64279	50°	22	45	67	90	112	135	157	179	202
40°	0·64279	0·64501	0·64723	0·64945	0·65166	0·65386	0·65606	49°	22	44	66	88	111	133	155	177	199
41°	·65606	·65825	·66044	·66262	·66480	·66697	·66913	48°	22	44	65	87	109	131	153	174	196
42°	·66913	·67129	·67344	·67559	·67773	·67987	·68200	47°	21	43	64	86	107	129	150	172	193
43°	·68200	·68412	·68624	·68835	·69046	·69256	·69466	46°	21	42	63	84	106	127	148	169	190
44°	·69466	·69675	·69883	·70091	·70298	·70505	·70711	45°	21	42	62	83	104	124	145	166	187

NATURAL COSINES

NATURAL SINES

	1′	10′	20′	30′	40′	50′	60′		Mean Differences 1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
45°	0·70711	0·70916	0·71121	0·71325	0·71529	0·71732	0·71934	44°	20	41	61	82	102	122	143	163	184
46°	·71934	·72136	·72337	·72537	·72737	·72937	·73135	43°	20	40	60	80	100	120	140	160	180
47°	·73135	·73333	·73531	·73728	·73924	·74120	·74314	42°	20	39	59	78	98	118	138	157	177
48°	·74314	·74509	·74703	·74896	·75088	·75280	·75471	41°	19	39	58	77	96	116	135	154	173
49°	·75471	·75661	·75851	·76041	·76229	·76417	·76604	40°	19	38	57	76	95	113	132	151	170
50°	0·76604	0·76791	0·76977	0·77162	0·77347	0·77531	0·77715	39°	19	37	56	74	93	111	130	148	167
51°	·77715	·77897	·78079	·78261	·78442	·78622	·78801	38°	18	36	54	72	91	109	127	145	163
52°	·78801	·78980	·79158	·79335	·79512	·79688	·79864	37°	18	35	53	71	89	106	124	142	159
53°	·79864	·80038	·80212	·80386	·80558	·80730	·80902	36°	17	35	52	69	87	104	121	138	156
54°	·80902	·81072	·81242	·81412	·81580	·81748	·81915	35°	17	34	51	68	85	101	118	135	152
55°	0·81915	0·82082	0·82248	0·82413	0·82577	0·82741	0·82904	34°	16	33	49	66	82	99	115	132	148
56°	·82904	·83066	·83228	·83389	·83549	·83708	·83867	33°	16	32	48	64	80	96	112	128	144
57°	·83867	·84025	·84182	·84339	·84495	·84650	·84805	32°	16	31	47	63	78	94	110	125	141
58°	·84805	·84959	·85112	·85264	·85416	·85567	·85717	31°	15	30	46	61	76	91	106	122	137
59°	·85717	·85866	·86015	·86163	·86310	·86457	·86603	30°	15	30	44	59	74	89	103	118	133
60°	0·86603	0·86748	0·86892	0·87036	0·87178	0·87321	0·87462	29°	14	29	43	57	72	86	100	114	129
61°	·87462	·87603	·87743	·87882	·88020	·88158	·88295	28°	14	28	42	55	69	83	97	111	125
62°	·88295	·88431	·88566	·88701	·88835	·88968	·89101	27°	13	27	40	54	67	81	94	108	121
63°	·89101	·89232	·89363	·89493	·89623	·89752	·89879	26°	13	26	39	52	65	78	91	104	117
64°	·89879	·90007	·90133	·90259	·90383	·90507	·90631	25°	13	25	38	50	63	75	88	100	113

	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
65°	0·90631	0·90753	0·90875	0·90996	0·91116	0·91236	0·91355	24°	12	24	36	48	60	72	84	96	108
66°	·91355	·91472	·91590	·91706	·91822	·91936	·92050	23°	12	23	35	46	58	70	81	93	104
67°	·92050	·92164	·92276	·92388	·92499	·92609	·92718	22°	11	22	33	45	56	67	78	89	100
68°	·92718	·92827	·92935	·93042	·93148	·93253	·93358	21°	11	21	32	43	53	64	75	85	96
69°	·93358	·93462	·93565	·93667	·93769	·93869	·93969	20°	10	20	31	41	51	61	71	81	92
70°	0·93969	0·94068	0·94167	0·94264	0·94361	0·94457	0·94552	19°	10	19	29	39	49	58	68	78	87
71°	·94552	·94646	·94740	·94832	·94924	·95015	·95106	18°	9	18	28	37	46	55	64	74	83
72°	·95106	·95195	·95284	·95372	·95459	·95545	·95630	17°	9	18	26	35	44	52	61	70	79
73°	·95630	·95715	·95799	·95882	·95964	·96046	·96126	16°	8	17	25	33	41	50	58	66	74
74°	·96126	·96206	·96285	·96363	·96440	·96517	·96593	15°	8	16	23	31	39	47	54	62	70
75°	0·96593	0·96667	0·96742	0·96815	0·96887	0·96959	0·97030	14°	7	15	22	29	36	44	51	58	65
76°	·97030	·97100	·97169	·97237	·97304	·97371	·97437	13°	7	14	20	27	34	41	47	54	61
77°	·97437	·97502	·97566	·97630	·97692	·97754	·97815	12°	6	13	19	25	32	38	44	50	57
78°	·97815	·97875	·97934	·97992	·98050	·98107	·98163	11°	6	12	17	23	29	35	41	46	52
79°	·98163	·98218	·98272	·98325	·98378	·98430	·98481	10°	5	11	16	21	27	32	37	42	48
80°	0·98481	0·98531	0·98580	0·98629	0·98676	0·98723	0·98769	9°	5	10	14	19	24	29	34	38	43
81°	·98769	·98814	·98858	·98902	·98944	·98986	·99027	8°	4	9	13	17	22	26	30	34	39
82°	·99027	·99067	·99106	·99144	·99182	·99219	·99255	7°	4	8	11	15	19	23	27	30	34
83°	·99255	·99290	·99324	·99357	·99390	·99421	·99452	6°	3	7	10	13	17	20	23	26	30
84°	·99452	·99482	·99511	·99540	·99567	·99594	·99619	5°	3	6	8	11	14	17	20	22	25
85°	0·99619	0·99644	0·99668	0·99692	0·99714	0·99736	0·99756	4°	2	5	7	9	12	14	16	18	21
86°	·99756	·99776	·99795	·99813	·99831	·99847	·99863	3°	2	4	5	7	9	11	13	14	16
87°	·99863	·99878	·99892	·99905	·99917	·99929	·99939	2°	1	3	4	5	7	8	9	10	12
88°	·99939	·99949	·99958	·99966	·99973	·99979	·99985	1°									
89°	·99985	·99989	·99993	·99996	·99998	1·00000	1·00000	0°	এক্ষেত্রে অন্তর এত ক্ষুদ্র যে তাহা উপেক্ষণীয় বলিয়া প্রদত্ত হইল না।								
90°	1·00000																
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′

NATURAL COSINES

Table IV

NATURAL TANGENTS

	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
									Mean Differences								
0°	0·00000	0·00291	0·00582	0·00873	0·01164	0·01455	0·01746	89°	29	58	87	116	146	175	204	233	262
1°	·01746	·02037	·02328	·02619	·02910	·03201	·03492	88°	29	58	87	116	146	175	204	233	262
2°	·03492	·03783	·04075	·04366	·04658	·04949	·05241	87°	29	58	87	116	146	175	204	233	262
3°	·05241	·05533	·05824	·06116	·06408	·06700	·06993	86°	29	58	88	117	146	175	204	234	263
4°	·06993	·07285	·07578	·07870	·08163	·08456	·08749	85°	29	58	88	117	146	175	204	234	263
5°	0·08749	0·09042	0·09335	0·09629	0·09923	0·10216	0·10510	84°	29	59	88	118	147	176	206	235	265
6°	·10510	·10805	·11099	·11394	·11688	·11983	·12278	83°	29	59	88	118	147	176	206	235	265
7°	·12278	·12574	·12869	·13165	·13461	·13758	·14054	82°	30	59	89	118	148	178	207	237	266
8°	·14054	·14351	·14648	·14945	·15243	·15540	·15838	81°	30	59	89	119	149	178	208	238	267
9°	·15838	·16137	·16435	·16734	·17033	·17333	·17633	80°	30	60	90	120	150	179	209	239	269
10°	0·17633	0·17933	0·18233	0·18534	0·18835	0·19136	0·19438	79°	30	60	90	120	151	181	211	241	271
11°	·19438	·19740	·20042	·20345	·20648	·20952	·21256	78°	30	61	91	121	152	182	212	242	273
12°	·21256	·21560	·21864	·22169	·22475	·22781	·23087	77°	31	61	92	122	153	183	214	244	275
13°	·23087	·23393	·23700	·24008	·24316	·24624	·24933	76°	31	62	92	123	154	185	216	246	277
14°	·24933	·25242	·25552	·25862	·26172	·26483	·26795	75°	31	62	93	124	155	186	217	248	279
15°	0·26795	0·27107	0·27419	0·27732	0·28046	0·28360	0·28675	74°	31	63	94	125	157	188	219	250	282
16°	·28675	·28990	·29305	·29621	·29938	·30255	·30573	73°	32	63	95	126	158	190	221	253	285
17°	·30573	·30891	·31210	·31530	·31850	·32171	·32492	72°	32	64	96	128	160	192	224	256	288
18°	·32492	·32814	·33136	·33460	·33783	·34108	·34433	71°	32	65	97	129	162	194	226	259	291
19°	·34433	·34758	·35085	·35412	·35740	·36068	·36397	70°	33	65	98	131	164	196	229	262	294

20°	0·36397	0·36727	0·37057	0·37388	0·37720	0·38053	0·38386	69°	33	66	100	133	166	199	232	265	298
21°	·38386	·38721	·39055	·39391	·39727	·40065	·40403	68°	34	67	101	134	168	202	236	269	302
22°	·40403	·40741	·41081	·41421	·41763	·42105	·42447	67°	34	68	102	136	170	205	239	273	306
23°	·42447	·42791	·43136	·43481	·43828	·44175	·44523	66°	35	69	104	138	173	208	242	277	311
24°	·44523	·44872	·45222	·45573	·45924	·46277	·46631	65°	35	70	105	140	176	211	246	281	316
25°	0·46631	0·46985	0·47341	0·47698	0·48055	0·48414	0·48773	64°	36	71	107	143	179	214	250	286	321
26°	·48773	·49134	·49495	·49858	·50222	·50587	·50953	63°	36	73	109	145	182	218	254	291	327
27°	·50953	·51320	·51688	·52057	·52427	·52798	·53171	62°	37	74	111	148	185	222	259	296	333
28°	·53171	·53545	·53920	·54296	·54673	·55051	·55431	61°	38	75	113	151	189	226	264	302	339
29°	·55431	·55812	·56194	·56577	·56962	·57348	·57735	60°	38	77	115	154	192	230	269	307	346
30°	0·57735	0·58124	0·58513	0·58905	0·59297	0·59691	0·60086	59°	39	78	118	157	196	235	274	313	353
31°	·60086	·60483	·60881	·61280	·61681	·62083	·62487	58°	40	80	120	160	200	240	280	320	360
32°	·62487	·62892	·63299	·63707	·64117	·64528	·64941	57°	41	82	123	164	205	245	286	327	368
33°	·64941	·65355	·65771	·66189	·66608	·67028	·67451	56°	42	84	126	167	209	251	293	334	376
34°	·67451	·67875	·68301	·68728	·69157	·69588	·70021	55°	43	86	128	171	214	257	300	342	385
35°	0·70021	0·70455	0·70891	0·71329	0·71769	0·72211	0·72654	54°	44	88	132	176	220	263	307	351	395
36°	·72654	·73100	·73547	·73996	·74447	·74900	·75355	53°	45	90	135	180	225	270	315	360	405
37°	·75355	·75812	·76272	·76733	·77196	·77661	·78129	52°	46	92	139	185	231	277	324	370	416
38°	·78129	·78598	·79070	·79544	·80020	·80498	·80978	51°	48	95	143	190	238	285	333	380	428
39°	·80978	·81461	·81946	·82434	·82923	·83415	·83910	50°	49	98	147	196	245	293	342	391	440
40°	0·83910	0·84407	0·84906	0·85408	0·85912	0·86419	0·86929	49°	50	101	151	201	252	302	352	402	453
41°	·86929	·87441	·87955	·88473	·88992	·89515	·90040	48°	52	104	156	208	260	311	363	415	467
42°	·90040	·90569	·91099	·91633	·92170	·92709	·93252	47°	54	107	161	214	268	321	375	429	482
43°	·93252	·93797	·94345	·94896	·95451	·96008	·96569	46°	55	111	166	221	277	332	387	442	498
44°	·96569	·97133	·97700	·98270	·98843	·99420	1·00000	45°	57	114	172	229	286	343	400	457	515
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′

NATURAL COTANGENTS

NATURAL TANGENTS

	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′		Mean Differences 1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
45°	1·00000	1·00583	1·01170	1·01761	1·02355	1·02952	1·03553	44°	59	118	178	237	296	355	414	474	533
46°	·03553	·04158	·04766	·05378	·05994	·06613	·07237	43°	61	123	184	246	307	368	430	491	553
47°	·07237	·07864	·08496	·09131	·09770	·10414	·11061	42°	64	127	191	255	319	382	446	510	573
48°	·11061	·11713	·12369	·13029	·13694	·14363	·15037	41°	66	132	199	265	332	397	463	530	596
49°	·15037	·15715	·16398	·17085	·17777	·18474	·19175	40°	69	138	207	276	345	413	482	552	620
50°	1·19175	1·19882	1·20593	1·21310	1·22031	1·22758	1·23490	39°	72	144	216	288	360	431	503	575	647
51°	·23490	·24227	·24969	·25717	·26471	·27230	·27994	38°	75	150	225	300	376	451	526	601	676
52°	·27994	·28764	·29541	·30323	·31110	·31904	·32704	37°	78	157	235	314	392	471	549	628	707
53°	·32704	·33511	·34323	·35142	·35968	·36800	·37638	36°	82	164	247	329	411	493	576	658	740
54°	·37638	·38484	·39336	·40195	·41061	·41934	·42815	35°	86	172	259	345	431	517	603	690	776
55°	1·42815	1·43703	1·44598	1·45501	1·46411	1·47330	1·48256	34°	91	181	272	363	453	544	634	725	816
56°	·48256	·49190	·50133	·51084	·52043	·53010	·53987	33°	96	191	287	382	478	573	669	764	860
57°	·53987	·54972	·55966	·56969	·57981	·59002	·60033	32°	101	201	302	403	504	604	705	806	907
58°	·60033	·61074	·62125	·63185	·64256	·65337	·66428	31°	107	213	320	426	533	639	746	852	959
59°	·66428	·67530	·68643	·69766	·70901	·72047	·73205	30°	113	226	339	451	565	677	790	903	1016
60°	1·7321	1·7437	1·7556	1·7675	1·7796	1·7917	1·8040	29°	12	24	36	48	60	72	84	96	108
61°	1·8040	1·8165	1·8291	1·8418	1·8546	1·8676	1·8807	28°	13	25	38	51	64	77	89	102	115
62°	1·8807	1·8940	1·9074	1·9210	1·9347	1·9486	1·9626	27°	14	27	41	54	68	82	95	109	122
63°	1·9626	1·9768	1·9912	2·0057	2·0204	2·0353	2·0503	26°	15	29	44	58	73	88	102	117	131
64°	2·0503	2·0655	2·0809	2·0965	2·1123	2·1283	2·1445	25°	16	31	47	63	79	94	110	126	141

65°	2·1445	2·1609	2·1775	2·1943	2·2113	2·2286	2·2460	24°	17	34	51	68	85	101	118	135	152
66°	2·2460	2·2637	2·2817	2·2998	2·3183	2·3369	2·3559	23°	18	37	55	73	92	110	128	146	165
67°	2·3559	2·3750	2·3945	2·4142	2·4342	2·4545	2·4751	22°	20	40	60	80	100	119	139	159	179
68°	2·4751	2·4960	2·5172	2·5386	2·5605	2·5826	2·6051	21°	22	43	65	87	109	130	152	174	195
69°	2·6051	2·6279	2·6511	2·6746	2·6985	2·7228	2·7475	20°	24	47	76	95	119	142	166	190	213
70°	2·7475	2·7725	2·7980	2·8239	2·8502	2·8770	2·9042	19°	26	52	78	104	131	157	183	209	235
71°	2·9042	2·9319	2·9600	2·9887	3·0178	3·0475	3·0777	18°	29	58	87	116	145	174	202	231	260
72°	3·0777	3·1084	3·1397	3·1716	3·2041	3·2371	3·2709	17°	32	64	97	129	161	193	225	258	290
73°	3·2709	3·3052	3·3402	3·3759	3·4124	3·4495	3·4874	16°	36	72	108	144	181	216	253	289	325
74°	3·4874	3·5261	3·5656	3·6059	3·6470	3·6891	3·7321	15°	41	81	122	163	204	244	285	326	366
75°	3·7321	3·7760	3·8208	3·8667	3·9136	3·9617	4·0108	14°	46	93	139	185	232	278	325	371	418
76°	4·0108	4·0611	4·1126	4·1653	4·2193	4·2747	4·3315	13°	53	107	160	214	267	320	374	427	481
77°	4·3315	4·3897	4·4494	4·5107	4·5736	4·6382	4·7046	12°	62	124	186	248	311	373	435	497	559
78°	4·7046	4·7729	4·8430	4·9152	4·9894	5·0658	5·1446	11°	73	146	220	293	366	439	512	586	659
79°	5·1446	5·2257	5·3093	5·3955	5·4845	5·5764	5·6713	10°	88	175	263	350	438	526	613	701	788
80°	5·6713	5·7694	5·8708	5·9758	6·0844	6·1970	6·3138	9°									
81°	6·3138	6·4348	6·5606	6·6912	6·8269	6·9682	7·1154	8°	এক্ষেত্রে অন্তর এত দ্রুত পরিবর্তনশীল যে তাহা তালিকাভুক্ত করা সম্ভবপর নহে।								
82°	7·1154	7·2687	7·4287	7·5958	7·7704	7·9530	8·1443	7°									
83°	8·1443	8·3450	8·5555	8·7769	9·0098	9·2553	9·5144	6°									
84°	9·5144	9·7882	10·0780	10·3854	10·7119	11·0594	11·4301	5°									
85°	11·4301	11·8262	12·2505	12·7062	13·1969	13·7267	14·3007	4°									
86°	14·3007	14·9244	15·6048	16·3499	17·1693	18·0750	19·0811	3°	অতি ক্ষুদ্র x' কোণের ক্ষেত্রে, cot x' বা tan $(90°-x')$ প্রায় $3437·7 \div x$-এর সমান।								
87°	19·0811	20·2056	21·4704	22·9038	24·5418	26·4316	28·6363	2°									
88°	28·6363	31·2416	34·3678	38·1885	42·9641	49·1039	57·2900	1°									
89°	57·2900	68·7501	85·9398	114·589	171·885	343·774	+∞	0°									
90°	+∞																
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′

NATURAL COTANGENTS

TABLE V

LOGARITHMIC SINES

	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
									Mean Differences								
0°	− ∞	7·46373	7·76475	7·94084	8·06578	8·16268	8·24186	89°	এক্ষেত্রে অন্তর এত দ্রুত পরিবর্তনশীল যে তাহাদিগকে তালিকাভুক্ত করা সম্ভবপর নহে। অতি ক্ষুদ্র x' কোণের ক্ষেত্রে log tan x' বা log cot $(90° - x') = \log x + \bar{4}\cdot46373$.								
1°	8·24186	8·30879	8·36678	8·41792	8·46366	8·50504	8·54282	88°									
2°	8·54282	8·57757	8·60973	8·63968	8·66769	8·69400	8·71880	87°									
3°	8·71880	8·74226	8·76451	8·78568	8·80585	8·82513	8·84358	86°									
4°	8·84358	8·86128	8·87829	8·89464	8·91040	8·92561	8·94030	85°									
5°	8·94030	8·95450	8·96825	8·98157	8·99450	9·00704	9·01923	84°									
6°	9·01923	9·03109	9·04262	9·05386	9·06481	9·07548	9·08589	83°									
7°	9·08589	9·09606	9·10599	9·11570	9·12519	9·13447	9·14356	82°	96	192	288	384	480	576	672	768	864
8°	9·14356	9·15245	9·16116	9·16970	9·17807	9·18628	9·19433	81°	85	169	254	338	423	507	592	676	761
9°	9·19433	9·20223	9·20999	9·21761	9·22509	9·23244	9·23967	80°	76	151	227	302	378	453	529	604	680
10°	9·23967	9·24677	9·25376	9·26063	9·26739	9·27405	9·28060	79°	68	136	204	272	341	409	477	545	613
11°	·28060	·28705	·29340	·29966	·30582	·31189	·31788	78°	62	124	186	248	310	373	435	497	559
12°	·31788	·32378	·32960	·33534	·34100	·34658	·35209	77°	57	114	171	228	285	342	399	456	513
13°	·35209	·35752	·36289	·36819	·37341	·37858	·38368	76°	53	105	158	210	263	316	368	421	473
14°	·38368	·38871	·39369	·39860	·40346	·40825	·41300	75°	49	98	147	195	244	293	342	391	440
15°	9·41300	9·41768	9·42232	9·42690	9·43143	9·43591	9·44034	74°	46	91	137	182	228	273	319	364	410
16°	·44034	·44472	·44905	·45334	·45758	·46178	·46594	73°	43	85	128	171	213	256	299	341	384
17°	·46594	·47005	·47411	·47814	·48213	·48607	·48998	72°	40	80	120	160	201	241	281	321	361
18°	·48998	·49385	·49768	·50148	·50523	·50896	·51264	71°	38	76	113	151	189	227	264	302	340
19°	·51264	·51269	·51991	·52350	·52705	·53056	·53405	70°	36	71	107	143	179	214	250	285	321

20°	9·53405	9·53751	9·54093	9·54433	9·54769	9·55102	9·55433	69°	34	68	101	135	169	203	237	270	304
21°	·55433	·55761	·56085	·56408	·56727	·57044	·57358	68°	32	64	96	128	161	193	225	257	289
22°	·57358	·57669	·57978	·58284	·58588	·58889	·59188	67°	31	61	92	122	153	183	214	244	275
23°	·59188	·59484	·59778	·60070	·60359	·60646	·60931	66°	29	58	87	116	146	174	204	233	262
24°	·60931	·61214	·61494	·61773	·62049	·62323	·62595	65°	28	56	83	111	139	166	195	222	250
25°	9·62595	9·62865	9·63133	9·63398	9·63662	9·63924	9·64184	64°	27	53	80	106	133	159	186	212	239
26°	·64184	·64442	·64698	·64953	·65205	·65456	·65705	63°	25	51	76	102	127	152	178	203	229
27°	·65705	·65952	·66197	·66441	·66682	·66922	·67161	62°	24	49	73	97	122	146	170	194	219
28°	·67161	·67398	·67633	·67866	·68098	·68328	·68557	61°	23	47	70	93	117	140	163	186	210
29°	·68557	·68784	·69010	·69234	·69456	·69677	·69897	60°	22	45	67	89	112	134	156	179	201
30°	9·69897	9·70115	9·70332	9·70547	9·70761	9·70973	9·71184	59°	22	43	65	86	107	129	150	172	193
31°	·71184	·71393	·71602	·71809	·72014	·72218	·72421	58°	21	41	62	82	103	124	144	165	185
32°	·72421	·72622	·72823	·73022	·73219	·73416	·73611	57°	20	40	59	79	99	119	139	159	178
33°	·73611	·73805	·73997	·74189	·74379	·74568	·74756	56°	19	38	57	76	96	115	134	153	172
34°	·74756	·74943	·75128	·75313	·75496	·75678	·75859	55°	18	37	55	74	92	110	129	147	165
35°	9·75859	9·76039	9·76218	9·76395	9·76572	9·76747	9·76922	54°	18	35	53	71	89	106	124	142	159
36°	·76922	·77095	·77268	·77439	·77609	·77778	·77946	53°	17	34	51	68	86	103	120	137	154
37°	·77946	·78113	·78280	·78445	·78609	·78772	·78934	52°	17	33	50	66	83	99	116	132	149
38°	·78934	·79095	·79256	·79415	·79573	·79731	·79887	51°	16	32	48	64	80	95	112	127	143
39°	·79887	·80043	·80197	·80351	·80504	·80656	·80807	50°	15	31	46	62	77	92	108	123	138
40°	9·80807	9·80957	9·81106	9·81254	9·81402	9·81549	9·81694	49°	15	30	44	59	74	89	104	118	133
41°	·81694	·81839	·81983	·82126	·82269	·82410	·82551	48°	14	29	43	57	72	86	100	114	129
42°	·82551	·82691	·82830	·82968	·83106	·83242	·83378	47°	14	28	41	55	69	83	97	110	124
43°	·83378	·83513	·83648	·83781	·83914	·84046	·84177	46°	13	27	40	53	67	80	93	106	120
44°	·84177	·84308	·84437	·84566	·84694	·84822	·84949	45°	13	26	38	51	64	77	90	102	115
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′

LOGARITHMIC COSINES

LOGARITHMIC SINES

	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′		Mean Differences 1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
45°	9·84949	9·85074	9·85200	9·85324	9·85448	9·85571	9·85693	44°	12	25	37	50	62	74	87	99	112
46°	·85693	·85815	·85936	·86056	·86176	·86294	·86413	43°	12	24	36	48	60	72	84	96	108
47°	·86413	·86530	·86647	·86763	·86879	·86993	·87107	42°	12	23	35	46	58	70	81	93	104
48°	·87107	·87221	·87334	·87446	·87557	·87668	·87778	41°	11	22	34	45	56	67	78	89	100
49°	·87778	·87887	·87996	·88105	·88212	·88319	·88425	40°	11	22	32	43	54	65	76	86	97
50°	9·88425	9·88531	9·88636	9·88741	9·88844	9·88948	9·89050	39°	10	21	31	42	52	62	73	83	94
51°	·89050	·89152	·89254	·89354	·89455	·89554	·89653	38°	10	20	30	40	50	60	70	80	90
52°	·89653	·89752	·89849	·89947	·90043	·90139	·90235	37°	10	19	29	39	49	58	68	78	87
53°	·90235	·90330	·90424	·90518	·90611	·90704	·90796	36°	9	19	28	37	47	56	65	74	84
54°	·90796	·90887	·90978	·91069	·91158	·91241	·91336	35°	9	18	27	36	45	54	63	72	81
55°	9·91336	9·91425	9·91512	9·91599	9·91686	9·91772	9·91857	34°	9	17	26	35	44	52	61	70	78
56°	·91857	·91942	·92027	·92111	·92194	·92277	·92359	33°	8	17	25	34	42	50	59	67	76
57°	·92359	·92441	·92522	·92603	·92683	·92763	·92842	32°	8	16	24	32	41	49	57	65	73
58°	·92842	·92921	·92999	·93077	·93154	·93230	·93307	31°	8	16	23	31	39	47	55	62	70
59°	·93307	·93382	·93457	·93532	·93606	·93680	·93753	30°	8	15	23	30	37	45	52	60	67
60°	9·93753	9·93826	9·93898	9·93970	9·94041	9·94112	9·94182	29°	7	14	22	29	36	43	50	57	64
61°	·94182	·94252	·94321	·94390	·94458	·94526	·94593	28°	7	14	21	27	34	41	48	55	62
62°	·94593	·94660	·94727	·94793	·94858	·94923	·94988	27°	7	13	20	26	33	40	46	53	59
63°	·94988	·95052	·95116	·95179	·95242	·95304	·95366	26°	6	13	19	25	32	38	44	50	57
64°	·95366	·95427	·95488	·95549	·95609	·95668	·95728	25°	6	12	18	24	30	36	42	48	54

65°	9·95728	9·95786	9·95844	9·95902	9·95960	9·96017	9·96073	24°	6	12	17	23	29	35	40	46	52
66°	·96073	·96129	·96185	·96240	·96294	·96349	·96403	23°	6	11	17	22	28	33	38	44	50
67°	·96403	·96456	·96509	·96562	·96614	·96665	·96717	22°	5	10	16	21	26	31	36	42	47
68°	·96717	·96767	·96818	·96868	·96917	·96966	·97015	21°	5	10	15	20	25	29	34	40	44
69°	·97015	·97063	·97111	·97159	·97206	·97252	·97299	20°	5	9	14	19	24	28	33	38	42
70°	9·97299	9·97344	9·97390	9·97435	9·97479	9·97523	9·97567	19°	4	9	13	18	22	27	31	36	40
71°	·97567	·97610	·97653	·97696	·97738	·97779	·97821	18°	4	9	13	17	21	26	30	34	38
72°	·97821	·97861	·97902	·97942	·97982	·98021	·98060	17°	4	8	12	16	20	24	28	32	36
73°	·98060	·98098	·98136	·98174	·98211	·98248	·98284	16°	4	8	11	15	19	22	26	30	34
74°	·98284	·98320	·98356	·98391	·98426	·98460	·98494	15°	4	7	11	14	18	21	25	28	32
75°	9·98494	9·98528	9·98561	9·98594	9·98627	9·98659	9·98690	14°	3	7	10	13	17	20	23	26	30
76°	·98690	·98722	·98753	·98783	·98813	·98843	·98872	13°	3	6	9	12	15	18	21	24	27
77°	·98872	·98901	·98930	·98958	·98986	·99013	·99040	12°	3	6	8	11	14	17	20	22	25
78°	·99040	·99067	·99093	·99119	·99145	·99170	·99195	11°	3	5	8	10	13	16	18	21	23
79°	·99195	·99219	·99243	·99267	·99290	·99313	·99335	10°	2	5	7	9	12	14	16	19	21
80°	9·99335	9·99357	9·99379	9·99400	9·99421	9·99442	9·99462	9°	2	4	6	8	11	13	15	17	19
81°	·99462	·99482	·99501	·99520	·99539	·99557	·99575	8°	2	4	6	8	10	11	13	15	17
82°	·99575	·99593	·99610	·99627	·99643	·99659	·99675	7°	2	3	5	7	8	10	12	13	15
83°	·99675	·99690	·99705	·99720	·99734	·99748	·99761	6°	1	3	4	6	7	9	10	12	13
84°	·99761	·99775	·99787	·99800	·99812	·99823	·99834	5°	1	3	4	5	6	8	9	10	11
85°	9·99834	9·99845	9·99856	9·99866	9·99876	9·99885	9·99894	4°	1	2	3	4	5	6	7	8	9
86°	·99894	·99903	·99911	·99919	·99926	·99934	·99940	3°	1	2	2	3	4	5	5	6	7
87°	·99940	·99947	·99953	·99959	·99964	·99969	·99974	2°	1	1	2	2	3	3	4	4	5
88°	·99974	·99978	·99982	·99985	·99988	·99991	·99993	1°	0	1	1	1	2	2	2	2	3
89°	·99993	·99995	·99997	·99998	·99999	10·00000	10·00000	0°									
90°	10·00000																
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′

LOGARITHMIC COSINES

TABLE VI
LOGARITHMIC TANGENTS

	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
0°	$-\infty$	7·46373	7·76476	7·94086	8·06581	8·16273	8·24192	89°									
1°	8·24192	8·30888	8·36689	8·41807	8·46385	8·50527	8·54308	88°									
2°	8·54308	8·57788	8·61009	8·64009	8·66816	8·69453	8·71940	87°									
3°	8·71940	8·74292	8·76525	8·78649	8·80674	8·82610	8·84464	86°									
4°	8·84464	8·86243	8·87953	8·89598	8·91185	8·92716	8·94195	85°									
5°	8·94195	8·95627	8·97013	8·98358	8·99662	9·00930	9·02162	84°									
6°	9·02162	9·03361	9·04528	9·05666	9·06775	9·07858	9·08914	83°	98	195	293	391	488	586	684	782	879
7°	9·08914	9·09947	9·10956	9·11943	9·12909	9·13854	9·14780	82°	87	173	260	346	433	519	606	692	779
8°	9·14780	9·15688	9·16577	9·17450	9·18306	9·19146	9·19971	81°	78	155	233	310	388	466	543	621	698
9°	9·19971	9·20782	9·21578	9·22361	9·23130	9·23887	9·24632	80°									
10°	9·24632	9·25365	9·26086	9·26797	9·27496	9·28186	9·28865	79°	71	141	212	282	354	420	494	564	635
11°	·28865	·29535	·30195	·30846	·31489	·32122	·32747	78°	65	129	194	259	323	388	453	518	582
12°	·32747	·33365	·33974	·34576	·35170	·35757	·36336	77°	60	120	179	239	299	359	419	478	538
13°	·36336	·36909	·37476	·38035	·38589	·39136	·39677	76°	56	111	167	222	278	334	389	445	500
14°	·39677	·40212	·40742	·41266	·41784	·42297	·42805	75°	52	104	156	208	261	313	365	417	469
15°	9·42805	9·43308	9·43806	9·44299	9·44787	9·45271	9·45750	74°	49	98	147	196	245	294	343	392	442
16°	·45750	·46224	·46694	·47160	·47622	·48080	·48534	73°	46	93	139	186	232	278	325	371	418
17°	·48534	·48984	·49430	·49872	·50311	·50746	·51178	72°	44	88	132	176	220	264	308	352	396
18°	·51178	·51606	·52031	·52452	·52870	·53285	·53697	71°	42	84	126	168	210	252	294	336	378
19°	·53697	·54106	·54512	·54915	·55315	·55712	·56107	70°	40	80	121	160	201	241	281	321	362

(Mean Differences, 0°–4°:) এক্ষেত্রে অন্তর এত দ্রুত পরিবর্তনশীল যে তাহাদিগকে তালিকাভুক্ত করা সম্ভবপর নহে। অতি ক্ষুদ্র x' কোণের ক্ষেত্রে $\log \sin x'$ বা $\log \cos (90° - x') = \log x + \bar{4}·46373$.

20°	9·56107	9·56498	9·56887	9·57274	9·57658	9·58039	9·58418	69°	39	77	116	154	193	231	270	308	347
21°	·58418	·58794	·59168	·59540	·59909	·60276	·60641	68°	37	74	111	148	185	222	259	296	333
22°	·60641	·61004	·61364	·61722	·62079	·62433	·62785	67°	36	72	107	143	179	214	250	286	322
23°	·62785	·63135	·63484	·63830	·64175	·64517	·64858	66°	35	69	104	138	173	208	242	277	311
24°	·64858	·65197	·65535	·65870	·66204	·66537	·66867	65°	34	67	101	134	168	201	235	268	302
25°	9·66867	9·67196	9·67524	9·67850	9·68174	9·68497	9·68818	64°	33	65	98	130	163	195	228	260	293
26°	·68818	·69138	·69457	·69774	·70089	·70404	·70717	63°	32	63	95	126	158	190	221	253	284
27°	·70717	·71028	·71339	·71648	·71955	·72262	·72567	62°	31	62	92	123	154	185	216	246	277
28°	·72567	·72872	·73175	·73476	·73777	·74077	·74375	61°	30	60	90	120	151	181	211	241	271
29°	·74375	·74673	·74969	·75264	·75558	·75852	·76144	60°	29	59	88	118	147	177	206	236	265
30°	9·76144	9·76435	9·76725	9·77015	9·77303	9·77591	9·77877	59°	29	58	87	116	144	173	202	231	260
31°	·77877	·78163	·78448	·78732	·79015	·79297	·79579	58°	28	57	85	113	142	170	198	227	255
32°	·79579	·79860	·80140	·80419	·80697	·80975	·81252	57°	28	56	84	112	139	167	195	223	251
33°	·81252	·81528	·81803	·82078	·82352	·82626	·82899	56°	28	55	83	110	137	165	192	220	247
34°	·82899	·83171	·83442	·83713	·83984	·84254	·84523	55°	27	54	81	108	136	162	190	217	244
35°	9·84523	9·84791	9·85059	9·85327	9·85594	9·85860	9·86126	54°	27	54	80	107	134	160	188	214	241
36°	·86126	·86392	·86656	·86921	·87185	·87448	·87711	53°	26	53	79	106	132	158	185	212	238
37°	·87711	·87974	·88236	·88498	·88759	·89020	·89281	52°	26	52	78	105	131	157	183	209	236
38°	·89281	·89541	·89801	·90061	·90320	·90578	·90837	51°	26	52	78	104	130	156	182	208	234
39°	·90837	·91095	·91353	·91610	·91868	·92125	·92381	50°	26	52	77	103	129	155	180	206	232
40°	9·92381	9·92638	9·92894	9·93150	9·93406	9·93661	9·93916	49°	26	51	77	102	128	154	179	205	230
41°	·93916	·94171	·94426	·94681	·94935	·95190	·95444	48°	25	51	76	102	127	153	178	204	229
42°	·95444	·95698	·95952	·96205	·96459	·96712	·96966	47°	25	51	76	101	127	152	177	203	228
43°	·96966	·97219	·97472	·97725	·97978	·98231	·98484	46°	25	51	76	101	127	152	177	202	228
44°	·98484	·98737	·98989	·99242	·99495	·99747	10·00000	45°	25	51	76	101	127	152	177	202	228
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′

LOGARITHMIC COTANGENTS

	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′		Mean Differences 1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
45°	10·00000	10·00253	10·00505	10·00758	10·01011	10·01263	10·01516	44°	25	51	76	101	127	152	177	202	228
46°	·01516	·01769	·02022	·02275	·02528	·02781	·03034	43°	25	51	76	101	127	152	177	202	228
47°	·03034	·03288	·03541	·03795	·04048	·04302	·04556	42°	25	51	76	101	127	152	177	203	228
48°	·04556	·04810	·05065	·05319	·05574	·05829	·06084	41°	25	51	76	102	127	153	178	204	229
49°	·06084	·06339	·06594	·06850	·07106	·07362	·07619	40°	26	51	77	102	128	154	179	205	230
50°	10·07619	10·07875	10·08132	10·08390	10·08647	10·08905	10·09163	39°	26	52	77	103	129	155	180	206	232
51°	·09163	·09422	·09680	·09939	·10199	·10459	·10719	38°	26	52	78	104	130	156	182	208	234
52°	·10719	·10980	·11241	·11502	·11764	·12026	·12289	37°	26	52	78	105	131	157	183	209	236
53°	·12289	·12552	·12815	·13079	·13344	·13608	·13874	36°	26	53	79	106	132	158	185	212	238
54°	·13874	·14140	·14406	·14673	·14941	·15209	·15477	35°	27	54	80	107	134	160	188	214	241
55°	10·15477	10·15746	10·16016	10·16287	10·16558	10·16829	10·17101	34°	27	54	81	108	136	162	190	217	244
56°	·17101	·17374	·17648	·17922	·18197	·18472	·18748	33°	28	55	83	110	137	165	192	220	247
57°	·18748	·19025	·19303	·19581	·19860	·20140	·20421	32°	28	56	84	112	139	167	195	223	251
58°	·20421	·20703	·20985	·21268	·21552	·21837	·22123	31°	28	57	85	113	142	170	198	227	255
59°	·22123	·22409	·22697	·22985	·23275	·23565	·23856	30°	29	58	87	116	144	173	202	231	260
60°	10·23856	10·24148	10·24442	10·24736	10·25031	10·25327	10·25625	29°	29	59	88	118	147	177	206	236	265
61°	·25625	·25923	·26223	·26524	·26825	·27128	·27433	28°	30	60	90	120	151	181	211	241	271
62°	·27433	·27738	·28045	·28352	·28661	·28972	·29283	27°	31	62	92	123	154	185	216	246	277
63°	·29283	·29596	·29911	·30226	·30543	·30862	·31182	26°	32	63	95	126	158	190	221	253	284
64°	·31182	·31503	·31826	·32150	·32476	·32804	·33133	25°	33	65	98	130	163	195	228	260	293

	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
65°	10·33133	10·33463	10·33796	10·34130	10·34465	10·34803	10·35142	24°	34	67	101	134	168	201	235	268	302
66°	·35142	·35483	·35825	·36170	·36516	·36865	·37215	23°	35	69	104	138	173	208	242	277	311
67°	·37215	·37567	·37921	·38278	·38636	·38996	·39359	22°	36	72	107	143	179	214	251	286	322
68°	·39359	·39724	·40091	·40460	·40832	·41206	·41582	21°	37	74	111	148	185	222	259	296	333
69°	·41582	·41961	·42342	·42726	·43113	·43502	·43893	20°	39	77	116	154	193	231	270	308	347
70°	10·43893	10·44288	10·44685	10·45085	10·45488	10·45894	10·46303	19°	40	80	121	160	201	241	281	321	362
71°	·46303	·46715	·47130	·47548	·47969	·48394	·48822	18°	42	84	126	168	210	252	294	336	378
72°	·48822	·49254	·49689	·50128	·50570	·51016	·51466	17°	44	88	132	176	220	264	308	352	396
73°	·51466	·51920	·52378	·52840	·53306	·53776	·54250	16°	46	93	139	186	232	278	325	371	418
74°	·54250	·54729	·55213	·55701	·56194	·56692	·57195	15°	49	98	147	196	245	294	343	392	442
75°	10·57195	10·57703	10·58216	10·58734	10·59258	10·59788	10·60323	14°	52	104	156	208	261	313	365	417	469
76°	·60323	·60864	·61411	·61965	·62524	·63091	·63664	13°	56	111	167	222	278	334	389	445	500
77°	·63664	·64243	·64830	·65424	·66026	·66635	·67253	12°	60	120	179	239	299	359	419	478	538
78°	·67253	·67878	·68511	·69154	·69805	·70465	·71135	11°	65	129	194	259	323	388	453	518	582
79°	·71135	·71814	·72504	·73203	·73914	·74635	·75368	10°	71	141	212	282	354	420	494	564	635
80°	10·75368	10·76113	10·76870	10·77639	10·78422	10·79218	10·80029	9°	78	155	233	310	388	466	543	621	698
81°	·80029	·80854	·81694	·82550	·83423	·84312	·85220	8°	87	173	260	346	433	519	606	692	779
82°	·85220	·86146	·87091	·88057	·89044	·90053	·91086	7°	98	195	293	391	488	586	684	782	879
83°	·91086	·92142	·93225	·94334	·95472	·96639	·97838	6°									
84°	·97838	·99070	11·00338	11·01642	11·02987	11·04373	11·05805	5°									
85°	11·05805	11·07284	11·08815	11·10402	11·12047	11·13757	11·15536	4°									
86°	11·15536	11·17390	11·19326	11·21351	11·23475	11·25708	11·28060	3°									
87°	11·28060	11·30547	11·33184	11·35991	11·38991	11·42212	11·45692	2°									
88°	11·45692	11·49473	11·53615	11·58193	11·63311	11·69112	11·75808	1°									
89°	11·75808	11·83727	11·93419	12·05914	12·23524	12·53627	+∞	0°									
90°	+∞																

এক্ষেত্রে অন্তর এত দ্রুত পরিবর্তনশীল যে তাহাদিগকে তালিকাভুক্ত করা সম্ভবপর নহে।

LOGARITHMIC COTANGENTS